

Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados no controle de Qualidade em Observações Direcionais

Rafael José de Oliveira Andrade ¹
Giuliano Sant'Anna Marotta ²
Rômulo Parma Gonçalves ³
Leonardo Campos de Assis ⁴
Dalto Domingos Rodrigues ⁵

Universidade Federal de Viçosa – UFV
Departamento de Engenharia Civil
36570-000 Viçosa MG

rafaeljoaufv@yahoo.com.br ¹
giumarotta@yahoo.com.br ²
romuloparma@yahoo.com.br ³
assis_leonardo@yahoo.com.br ⁴
dalto@ufv.br ⁵

Resumo: Em topografia, para diferentes situações, empregam-se diferentes observáveis que devem ser modeladas matematicamente com intuito de obter parâmetros capazes de proporcionar o controle da precisão. Uma das técnicas empregadas no controle da qualidade posicional de um determinado objeto é a triangulação topográfica, onde são realizadas observações de direções a partir de posições pré-estabelecidas. Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) – especificamente, o método das equações de observação ou método paramétrico – é possível fazer o monitoramento de pequenos deslocamentos, avaliando estatisticamente a qualidade dos parâmetros determinados, bem como a das observações. Este trabalho tem o objetivo de aplicar a triangulação topográfica em alvos pré-estabelecidos em um imóvel localizado na Universidade Federal de Viçosa – MG utilizando o MMQ no controle da qualidade das posições determinadas e das observações. Analisando as observações e feitas novas iterações, foram calculados valores para as observações e os parâmetros com seus respectivos desvios padrões.

Palavras chaves: Triangulação Topográfica. Ajustamento de Observações. Qualidade Posicional. Qualidade das observações.

Abstract: On topography area, is common to use different observations to different situations that, mathematically modeled, obtain parameters able to provide the precision control. The survey triangulation is one of the techniques used to determine the positional quality control of an object, where, direction observations are made from previous established positions. By utilizing the Least Square Method (LSM) – specifically the observation equations method or parametric method – is possible to do the monitoring of small displacements, as well as to evaluate statistically the observations quality. This work has the intent to apply the survey triangulation method in previously established marks on a building localized in the Federal University of Viçosa – MG, using the LSM on the quality control of the determined positions and of the observations. Analyzing the observations and doing new iterations, the values of the observations and of the parameters was calculated with their respective standard deviations.

Key words: Topography Triangulation. Observations Adjustment, Positional Quality, Observations Quality.

1 Introdução

Atualmente, com o avanço tecnológico, os equipamentos topográficos vêm passando por constantes mudanças, devido à necessidade da confecção de mapas e cartas com maior eficiência, ou seja, menor custo em menor tempo.

Equipamentos eletrônicos como receptores GPS e as Estações Totais vêm ganhando espaço por sua eficiência e facilidade de manuseio, deixando aparelhos analógicos a quem, no que se refere à produtividade.

Contudo, quando se pensa em observações posicionais muito precisas, como é o caso da detecção de distorções ou deslocamentos de um determinado objeto, a utilização de aparelhos analógicos de alta precisão angular se destaca entre os demais aparelhos presentes atualmente no mercado, pois são mais acessíveis e tão eficientes quanto os equipamentos eletrônicos de alta precisão.

Pode-se afirmar que a topografia é de grande valia no controle da qualidade posicional em obras de engenharia, em todas as suas fases.

Uma das formas empregadas no controle qualidade posicional de um determinado objeto é a triangulação, onde são realizadas observações de direções em posições pré-estabelecidas, às quais, utilizando o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) – Método Paramétrico - é possível fazer o monitoramento, acarretando na possibilidade de se detectar pequenos deslocamentos, bem como avaliar estatisticamente a qualidade das observações.

Segundo Furtado *et al* (2001), alguns processos como a triangulação, visam principalmente o controle de movimentos horizontais das estruturas, onde os procedimentos se baseiam na utilização de teodolitos, que irão fornecer o valor dos ângulos entre uma linha de base fixa e os pontos-objetos ou pontos alvo. Sempre que houver a possibilidade de instalação do teodolito nos pontos de controle, o método a ser utilizado deve ser a triangulação, reconhecidamente o mais indicado. Quando a ocupação não é possível, uma das alternativas é se fazer o uso da interseção angular.

2 Objetivo

Este trabalho tem o objetivo de aplicar a triangulação em alvos pré-estabelecidos em um imóvel localizado na Universidade Federal de Viçosa – MG utilizando o MMQ no controle da qualidade das observações.

3 Materiais e Métodos

3.1 Materiais

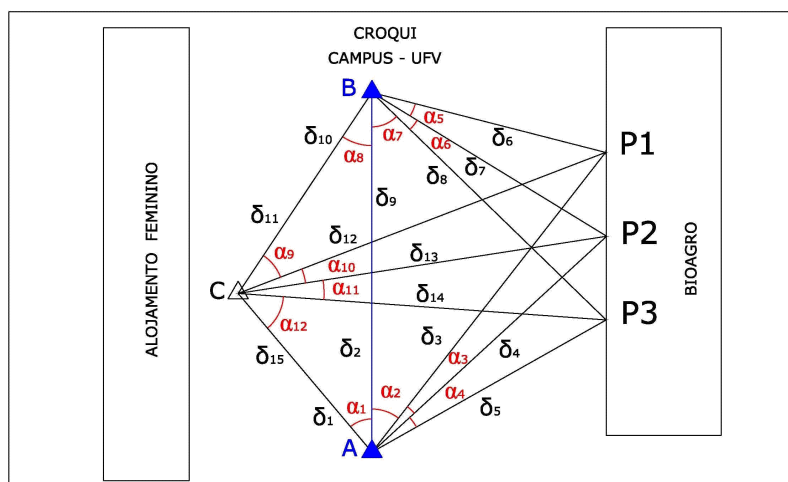


Figura 1 : Croqui da área em estudo, ilustrando todas as observações.)

Na realização do trabalho, foram utilizados 03 pilares fixos (A, B e C), compostos de concreto e plataforma de aço, onde foram fixados parafusos com centragem forçada em dois desses pilares (A e B) para a fixação do aparelho (Figura 1).

Foram fixados, de forma distribuída, 03 alvos de metal (P1, P2 e P3) em pilares de uma edificação (Figura 1).

Foram coletados dados utilizando um teodolito *Wild T2* de precisão nominal angular de 1" com aproximação de 0,1" para a observação das direções em todos os alvos e bases e uma mira horizontal de invar *NOM K074* para a observação da distância entre os pilares A e B.

3.2 Metodologia

Primeiramente, foram realizadas 04 séries de observações de distância da base $\overline{AB}$, onde, após determinada a distância, foram arbitradas as coordenadas (X, Y) do pilar A e calculada a abscissa do pilar B, tomando a direção $\overline{AB}$ como eixo das ordenadas.

Posteriormente, a partir das estações A, B e C, as direções, determinadas por estas estações e pelos alvos P1, P2 e P3, foram observadas em quatro séries, com a luneta em posição direta e invertida (Figura 1).

Também com o intuito de detectar a possível ocorrência de erros sistemáticos, realizaram-se, em cada série, observações das direções em diferentes posições (0°, 45°, 90° e 135°) do limbo horizontal, que a *posteriori* foram reduzidas à origem. A partir das direções reduzidas, foram calculadas a média e os desvios padrões, descartando as séries que apresentaram resíduos maiores ou iguais a 4".

A fim de empregar o modelo paramétrico, onde para cada observação é formada uma equação relacionando explicitamente observação e parâmetro, as direções observadas diretamente e filtradas, atendendo o critério pré-estabelecido de resíduo menor que 4", foram transformadas em ângulos – observações indiretas – da seguinte forma:

$$F_n : \alpha_n = \overline{\delta_{n+1}} - \overline{\delta_n} \quad n > 1 \text{ até } 4 \quad (1)$$

$$F_n : \alpha_n = \overline{\delta_{n+2}} - \overline{\delta_{n+1}} \quad n > 5 \text{ até } 8 \quad (2)$$

$$F_n : \alpha_n = \overline{\delta_{n+3}} - \overline{\delta_{n+2}} \quad n > 9 \text{ até } 12 \quad (3)$$

Após a transformação, foi feita a propagação das variâncias das direções para os ângulos.

Conforme Fonte (1994) no processo de resolução de um problema, não é suficiente calcular os valores mais prováveis das grandezas pretendidas, é necessário se conhecer a precisão desses valores. Para tanto, faz-se necessário conhecer a matriz das variâncias/covariâncias das observações.

Segundo Gemaél (2004), a matriz das covariâncias deve ser calculada para se conhecer a correlação entre as componentes da variável aleatória, definido o grau de dependência entre elas.

A matriz variância/covariância (MVC) dos ângulos foi obtida em função do modelo matemático dos ângulos:

$$C_{\text{ângulos}} = J \cdot C_{\delta} \cdot J^T \quad (4)$$

$${}_{12}J_{15} = \left. \frac{\partial F}{\partial \delta} \right|_{\delta_0} \quad (5)$$

Na aplicação do Método Paramétrico, deve-se, primeiramente, estabelecer o modelo matemático das equações das observações na forma:

$$La = F(Xa) \quad (6)$$

Assim tem-se as equações para os ângulos expressas seguindo o seguinte exemplo:

$$F1: \alpha_1 = Az_{AC} - Az_{AB} = \arctan \frac{X_C - X_A}{Y_C - Y_A} - \arctan \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} \quad (7)$$

Posteriormente, obtêm-se os valores aproximados para os parâmetros (X_0) através da “lei dos senos” utilizando como referência a distância $\overline{AB}$.

Dáí, calcula-se a matriz peso (P) utilizando σ_0^2 (sigma zero a priori) igual a 1.

$$P = \sigma_0^2 \cdot C_{\text{ângulos}}^{-1} \quad (8)$$

Logo após, calcula-se o vetor das observações calculadas (L_0), obtendo os ângulos:

$$L_0 = F(X_0) \quad (9)$$

Faz-se então o cálculo de L :

$$L = L_b - L_0 \quad (10)$$

Uma vez que se conhece o vetor L e a matriz P , o próximo passo é o cálculo da matriz A , que tem seus elementos definidos pela forma geral da matriz:

$$A_{12} = \frac{\partial F}{\partial X_a} \Big|_{X_0} \quad (11)$$

De posse das matrizes calculadas, resolve-se o sistema de equações normais:

$$X = (N)^{-1} U = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot L \quad (12)$$

No intuito de calcular MVC dos pontos observados, primeiro deve-se calcular o vetor das correções (X) a serem feitas a X_0 para obter os parâmetros ajustados (X_a).

$$X_a = X_0 - X \quad (13)$$

Enquanto os valores do vetor das correções (X) não atenderem a um valor pré-estabelecido (1mm), deve-se realizar novas iterações, onde são substituídos os parâmetros aproximados (X_0) pelos parâmetros ajustados (X_a).

Ao se tomar conhecimento do vetor das correções, foram calculados os valores dos resíduos das observações (V).

$$V = A \cdot X - L \quad (14)$$

Avaliando as observações através do vetor dos resíduos pode-se notar a presença de erros sistemáticos através da tendência dos valores bem como a possível discrepância de cada observação. Sugere-se então refazer os cálculos eliminando na ordem decrescente, as observações com maiores resíduos, até que atenda algum critério pré-estabelecido.

Calcula-se então o σ_0^2 (sigma zero *a posteriori*) e a MVC dos resíduos.

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{GL} \quad (15)$$

$GL = (\text{número de observações} - \text{número de parâmetros})$

Supondo que não há erros no modelo funcional, nos cálculos ou erros grosseiros nas observações, pode-se corrigir a matriz dos pesos. Quando o sigma zero *a posteriori* for diferente de 1, o peso atribuído às observações pode ter sido subestimado ou superestimado. Então faz-se:

$$P = \hat{\sigma}_0^2 \cdot C_{OBS} \quad (16)$$

Para obter um valor de σ_0^2 que satisfaça a condição ($\sigma_0^2 = 1,0$), retorna-se à equação (15), calculando o novo σ_0^2 utilizando o Peso obtido pela equação (16).

Ajustado o σ_0^2 , calculou-se a MVC dos resíduos.

$$C_V = \sigma_0^2 \cdot \left[C_{lb} - A \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \right] \quad (17)$$

Avaliam-se as observações a partir do Resíduo Padronizado (*RP*), calculado pela razão:

$$RP = \frac{V_{obs}}{\sigma_{V_{obs}}} \quad (18)$$

Através do *RP* pode-se concluir qual observação apresenta pior qualidade, isto é, a que apresentar a maior relação *RP*.

Calcula-se a MVC dos parâmetros ajustados:

$$C_X = \sigma_0^2 \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \quad (19)$$

Aceitas todas as condições de qualidade pré-estabelecidas, realiza-se o cálculo das elipses dos erros com nível de confiança de 95%, que significa multiplicar os desvios padrões dos parâmetros ajustados por 2,448. Os elementos das elipses dos erros foram calculados da seguinte forma:

Semi-eixo maior:

$$a^2 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2) + \left[\frac{1}{4} \cdot (\sigma_X^2 - \sigma_Y^2) + \sigma_{XY}^2 \right]^{1/2} \quad (20)$$

Semi-eixo menor:

$$b^2 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2) - \left[\frac{1}{4} \cdot (\sigma_X^2 - \sigma_Y^2) + \sigma_{XY}^2 \right]^{1/2} \quad (21)$$

Azimute do semi-eixo maior:

$$\tan(2 \cdot Az) = 2 \cdot \left(\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2 - \sigma_X^2} \right) \quad (22)$$

onde deve-se analisar o quadrante do azimute.

Assim, são apresentados os valores dos parâmetros ajustados.

4 Resultados e Discussões

De posse das médias das observações reduzidas à origem e desvios padrões das médias (Tabela1), foi realizada a propagação das variâncias para os ângulos, que possibilitaram a aplicação do MMQ.

Tabela 1: Média e desvio padrão das médias das direções reduzidas.

ESTAÇÃO	P VISADO	DIREÇÃO	MÉDIA DA DIREÇÃO			DESVIO PADRÃO DA MÉDIA (σ'')
			°	'	''	
A	C	$\bar{\delta}_1$	00	00	00	0,00
	B	$\bar{\delta}_2$	40	12	12,35	0,55
	P1	$\bar{\delta}_3$	78	11	54,85	1,24
	P2	$\bar{\delta}_4$	87	39	05,43	0,48
	P3	$\bar{\delta}_5$	100	48	45,00	0,95
B	P1	$\bar{\delta}_6$	00	00	00	0,00
	P2	$\bar{\delta}_7$	17	05	45,59	0,92
	P3	$\bar{\delta}_8$	29	46	25,80	0,35
	A	$\bar{\delta}_9$	75	40	37,01	1,06
	C	$\bar{\delta}_{10}$	109	25	14,04	0,80
C	B	$\bar{\delta}_{11}$	00	00	00	0,00
	P1	$\bar{\delta}_{12}$	35	18	05,92	1,18
	P2	$\bar{\delta}_{13}$	47	27	23,61	1,46
	P3	$\bar{\delta}_{14}$	60	22	20,64	0,81
	A	$\bar{\delta}_{15}$	106	03	36,49	0,55

A partir dos resultados da tabela 1, obteve-se os valores angulares e seus respectivos desvios padrões, que serviram como observações para o cálculo dos parâmetros (coordenadas e desvios padrões).

Após os cálculos utilizando o Modelo Paramétrico, notou-se um resíduo de 26" para a observação α_{12} , que pode ter sido ocasionado pela ocorrência de um erro grosseiro. Segundo Cross (1983), não existe uma definição estritamente estatística para erros grosseiros, sendo, por vezes, definido intuitivamente. Entretanto, Hawkins (1980) *apud* Cross (1983) define erro grosseiro como uma observação que apresenta valores que desviam tanto das demais observações, que despertam a suspeita de que aquela observação tenha sido gerada por um mecanismo diferente.

Como procedimento para tratar o erro grosseiro, fez-se a eliminação na observação α_{12} e processou-se um novo ajustamento com 11 observações. Assim, obteve-se o vetor dos resíduos com seu pior valor igual à aproximadamente 10", porém, embora a precisão interna tenha melhorado com uma observação a menos, reduz-se o Grau de Liberdade e, portanto, a confiabilidade do ajustamento.

Como resultados do Método Paramétrico, após a eliminação de uma observação e ajustamento convergindo com uma iteração, pode-se constatar os seguintes resultados:

Através dos valores da tabela 2 (vetor das observações aproximadas) pode-se comparar, a priori, o comportamento dos resíduos. Se há algum distúrbio ou discrepância nas observações.

Tabela 2: Vetor L (") das observações:

-3,53
6,00
-2,04
-0,25
1,59
-0,56
-7,33
10,30
-3,69
0,26
-2,12

Nota-se que todos os valores da tabela 3 (correções aos valores aproximados dos parâmetros), são menores que o décimo de milímetro, atendendo ao valor de tolerância pré-estabelecido de um milímetro.

Tabela 3: Vetor X (mm) das correções dos parâmetros:

0,022
-0,027
0,099
0,095
0,020
0,020
0,025
0,015

De posse dos valores da tabela 4 (vetor dos resíduos), aplicando o teste *t de student*, foi observado que não houve a presença de 'tendência' nos resíduos, utilizando nível de confiança igual a 90%.

Tabela 4: Vetor V (") dos resíduos:

0,35
-0,59
0,19
0,02
-0,06
0,06
0,75
-1,06
0,35
0,00
-0,32

Vale lembrar que o vetor X_a corresponde às coordenadas (X,Y) ajustadas dos pontos C, P1, P2 e P3 respectivamente (Tabela 5) e seus devidos desvios padrões (Tabela 6).

Tabela 5: Vetor X_a (m) dos parâmetros ajustados:

988,059
2.014,128
1.020,844
2.026,685
1.020,935
2.019,219
1.020,889
2.011,767

Tabela 6: Vetor dos desvios padrões dos parâmetros ajustados (mm):

0,343
0,054
1,231
0,427
0,906
0,576
0,944
0,600

Foram utilizadas três formas de avaliação da qualidade das observações, a partir dos resíduos, da razão ou mesmo dos resíduos padronizados (Tabela 7). A partir dos resíduos, quanto maior o resíduo, pior é a observação. Analisando a razão a partir da variância observada com o desvio padrão das observações, quanto maior for a razão e/ou o resíduo padronizado, pior é a observação.

Tabela 7: Resíduos(V), Razão e Resíduos Padronizados(RP)

V(")	Razão	RP
3,53	6,43	1,29
-5,89	-4,34	-0,87
1,92	1,44	0,25
0,24	0,23	0,04
-0,61	-0,66	-0,11
0,58	0,59	0,10
7,53	6,74	1,55
-10,62	-7,99	-4,11
3,50	2,97	0,72
-0,04	-0,02	-0,01
-3,17	-1,90	-0,48

De posse de todos os valores calculados e ajustados das observações, as elipses dos erros foram representadas com a seguinte configuração (Figura 2).

5 Conclusão

O controle de qualidade nas observações é o principal fator que influi na determinação de coordenadas com elevado grau de precisão, pois, de posse de valores como resíduos e variâncias, aliados às observações redundantes, pode-se avaliar os dados coletados em campo para obter maior eficiência e

certeza no resultado final do trabalho com precisão e confiabilidade devidamente avaliadas.

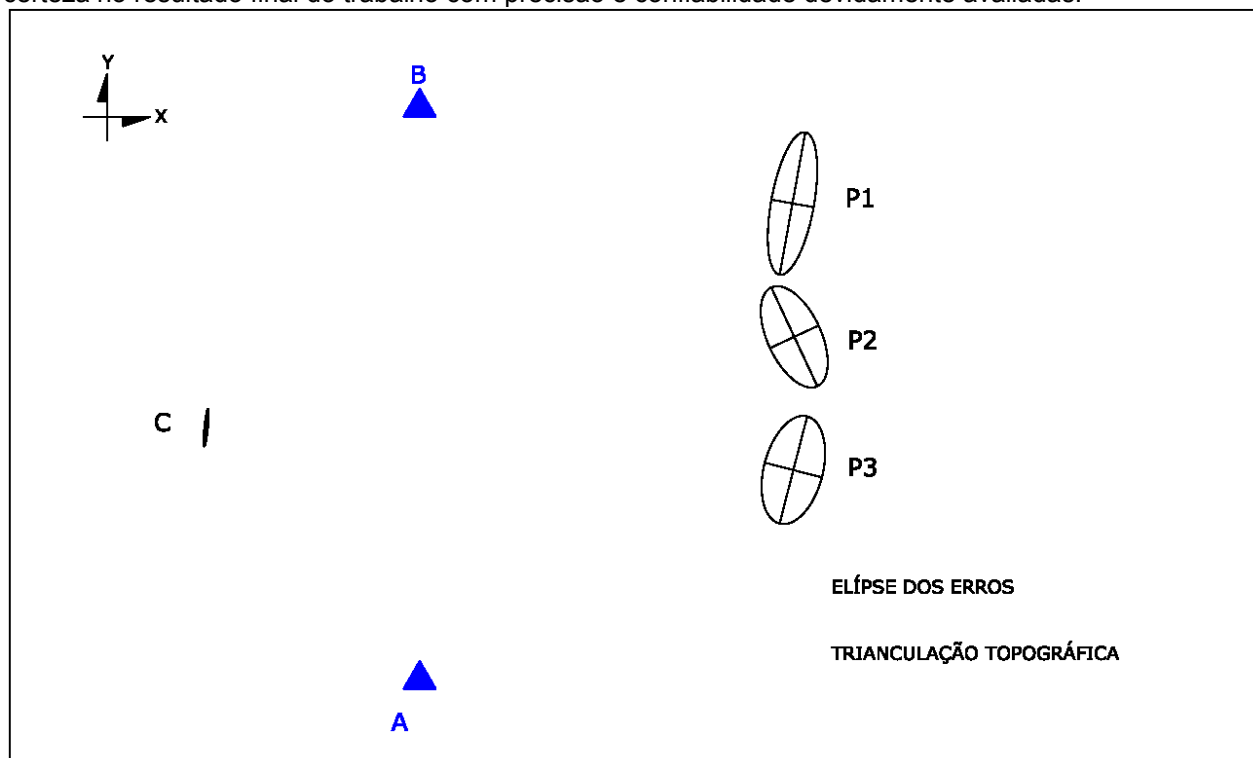


Figura 2 : Croqui das elipses dos erros

6 Referências Bibliográficas

CROSS, P. A. **Advanced least squares applied to position-fixing**. 205 p. North East London Polytechnic. Department of Land Surveying. Working Paper No. 6. Ed: A. S. Walker. 1983.

FONTE, C. M. P. C. **Ajustamento de observações utilizando o método dos mínimos quadrados**. 48 p. Universidade de Coimbra. 1994. Acesso em 22 maio. 2006. Disponível em < <http://scholar.google.com/url?sa=U&q=http://www.mat.uc.pt/~cfonte/docencia/Topografia%2520Aplicada/MQnovo.pdf> >.

FURTADO, J. A. L. F.; D'ANTONINO, L. C. **Estudo sobre a influência da posição da linha de base e comparação de instrumentos no uso do método de interseção no controle de deformação de estruturas**. Anais do XXI Congresso Brasileiro de Cartografia. Belo Horizonte. 2003.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. 319 p. Curitiba: Ed. UFPR, 1994. Reimpressão 2004.

SEIXAS, A.; SILVA, T. F.; ROMÃO, V. C.; BOTELHO, F. **Definição de sistemas de referência no controle de qualidade de edificações**. 13 p. Universidade Federal de Pernambuco. Anais do III Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas. 2003. Acesso em 22 mai. 2006. Disponível em < http://scholar.google.com/url?sa=U&q=http://geodesia.ufsc.br/geodesia-online/arquivo/GeoColoq_2003/artigos/T043.pdf >.