PENGANTAR PERANCANGAN EKSPERIMEN

Sejarah

- Perancangan eksperimen sebagai sebuah metodologi yang didasari prinsip-prinsip statistika seperti kita kenal sekarang dirintis oleh Sir Donald F. Fisher lewat publikasinya "*The Arrangement of Field Experiments*" pada tahun 1926
- Tiga hal yang ditekankan oleh Fisher di sini : **local control, replication, & randomization**

Merencanakan Riset

- Program riset : usaha yang terorganisir pada sebagian saintis untuk mendapatkan pemahaman tentang proses alamiah dan manufaktur.
- Total program mungkin memerlukan beberapa individual studies
- Masing-masing individual studies ini memerlukan beberapa keputusan kritis
- Karenanya, penting bagi peneliti memiliki perencanaan tertulis yang menjadi pedomannya.
- Perencanaan tertulis ini dapat berupa sebuah checklist yang berisikan :
  - ✓ Tujuan spesifik dari eksperimen
  - ✓ Identifikasi faktor-faktor pengaruh dan faktor-faktor apa saja yang diubah-ubah dan dan apa saja yang dipertahankan konstan
  - ✓ Karakteristik yang akan diukur
  - ✓ Prosedur yang spesifik untuk melakukan pengujian atau mengukur karakteristik.
  - ✓ Jumlah pengulangan (repetisi) eksperimen dasar yang akan dilakukan
  - ✓ Sumber daya dan material yang tersedia

Keyterm

- **Experiment** : investigasi dengan membuat suatu set situasi tertentu dibawah protokol yang telah ditentukan untuk memeriksa dan menguji akibat dari hasil suatu observasi.
- **Comparative experiment** : jenis eksperimen yang biasanya dilakukan peneliti pada bidang biologi, obat-obatan, dsb, yang mengakibatkan dibangunnya lebih dari satu set keadaan dalam eksperimen, dan respon yang dihasilkan dari situasi yang berbeda tersebut akan saling dibandingkan.
- **Treatments** : suatu set perlakuan yang dibuat untuk eksperimen untuk mendapat jawaban hipotesa riset, dan fokusnya kepada investigasi.
- **Experimental unit** : satuan fisik atau subjek yang dikenakan pada treatment secara independen dengan satuan lainnya.
- **Experimental Error** : variasi di antara experimental unit yang identik dan independen.
- **Comparative Observational Studies** : studi yang sebenarnya ingin kita lakukan untuk eksperimen tetapi tidak memungkinkan karena alasan praktis atau etika.
  Contohnya : Studi tentang bagaimana pengaruh obat tertentu terhadap janin (etika)
  Studi tentang perilaku kendaraan di persimpangan dan terowongan (praktis)

Hipotesa Riset dan Perancangan Riset

- Hipotesa Riset membuat suatu set situasi dan akibat yang ditimbulkan situasi tersebut
- Jadi, peneliti harus memastikan bahwa pemilihan treatment sesuai dengan hipotesa riset
- Contoh :
  Perkembangan kompetensi sosial pada seorang anak diukur melalui hubungannya dengan :
  1. Pendidikan orang tua

2. Pendapatan orang tua
3. Struktur di keluarga
4. Umur si anak

Untuk menggambarkan suatu riset kompleks bahwa keluarga tertentu mepengaruhi secara baik terhadap perkembangan anak.

Control Treatments sebagai Perbandingan

- Control treatment : treatment perbandingan yang diperlukan untuk menguji keefektifan dari suatu treatment percobaan.
- Tiga jenis control treatment :
  1. tanpa treatment
  2. placebo (pemalsuan)
  3. Standar

Perancangan Faktor Treatment Berganda

- Faktor : sekelompok treatment tertentu.
  Contoh : temperatur, kelembaban, dsb
- Level : kategori dari setiap faktor yang dibuat
- Dalam sistem alami kita tidak mengetahui apakah suatu pengaruh treatment bersifat independen terhadap yang lain
- Factorial arrangement : penyusunan faktorial, kombinasi yang mungkin dari beberapa level di dalam beberapa faktor treatment.
  Contoh :

Temperatur	Kelembaban	Tekanan	→ Faktor
Tinggi	Tinggi	Tinggi	
Sedang	Sedang	Sedang	3 Level
Rendah	Rendah	Rendah	

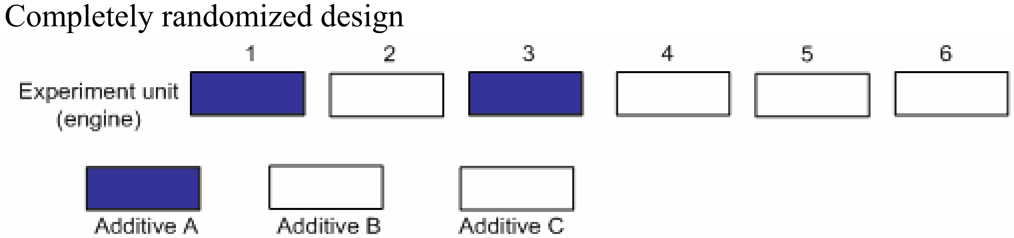
Kombinasi yang mungkin : 3 x 3 x 3 = 27

Local Control dari Experimental Error

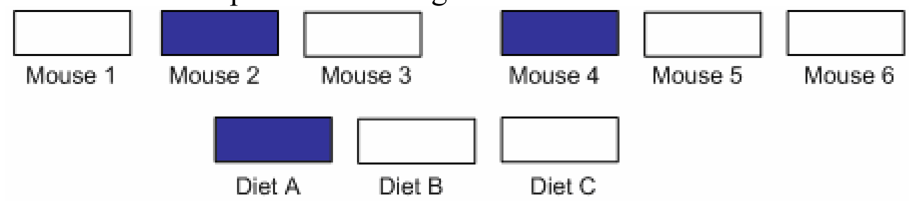
- Local control adalah tindakan peneliti yang dilakukan untuk mengurangi atau mengendalikan experimental error, meningkatkan akurasi observasi, dan membuat kesimpulan dasar dari penelitian.
- Disini peneliti mengendalikan :
  1. Teknik
     - Teknik meliputi tugas-tugas seperti pengukuran akurat, persiapan media, kalibrasi, dsb.
     - Pada level yang lebih kompleks, peneliti harus memilih metode atau peralatan yang paling akurat dan set observasi yang paling tepat dengan biaya yang tersedia
     - Jika suatu teknik mengakibatkan presisi semakin berkurang maka variansi experimental error yang diestimasi menjadi meningkat.
  2. Pemilihan satuan eksperimen yang seragam
     - Satuan eksperimen yang heterogen akan menghasilkan nilai variansi experimental error yang besar.

- Akan tetapi, set kondisi yang sedikit akan membatasi kesimpulan dasar dari studi dikarenakan kondisinya seragam secara artifisial
- Sifat eksperimen membentuk keseimbangan antara range beberapa kondisi dan keseragaman dari satuan.

3. Blocking
    - Experimental unit di block menjadi kelompok-kelompok unit yang sama pada basis faktor atau faktor-faktor yang diharapkan atau diketahui, untuk mendapatkan beberapa hubungan dengan variabel keluaran atau pengukuran yang di hipotesakan untuk menanggapi secara berbeda terhadap beberapa treatment.
    - 4 kriteria utama blocking :
      1. Proximity (kedekatan)
      2. Karakteristik fisik
      3. Waktu
      4. Manajemen tugas-tugas
    - Percobaan Keseragaman : suatu eksperimen yang experimental unit nya diukur tetapi tidak mengarah kepada treatment manapun.
      Misalnya : sebidang tanah pertanian
    - Observasi Baseline : pengukuran kepentingan, atau beberapa variabel yang diketahui memiliki hubungan yang kuat dengan pengukuran kepentingan.
      Misalnya : pengukuran pada berat, tinggi, dsb.
    - Ilustrasi :
      - Observasi : 43, 72, 46, 66, 49, 68, 50, 76, 42, 69
        Mean = 58, variansi = 175
      - Block 1 : 43, 46, 49, 50, 42 → mean = 46, variansi = 12,5
      - Block 2 : 72, 66, 68, 76, 69 → mean = 70, variansi = 15,2
    - Pencocokkan berpasangan vs pencocokkan tidak berpasangan
      - Pencocokkan berpasangan : eksak vs caliper
      - Pencocokkan tidak berpasangan : frekuensi vs strategi rata-rata
4. Pemilihan rancangan eksperimen
    - Rancangan eksperimen : penyusunan experimental unit yang digunakan untuk mengendalikan experimental error dan, pada saat yang sama, mengakomodasi rancangan treatment dalam sebuah eksperimen.
    - Hal ini menimbulkan banyak keragaman dalam rancangan eksperimen
    - Rancangan eksperimen dua sampel
    - Completely randomized design



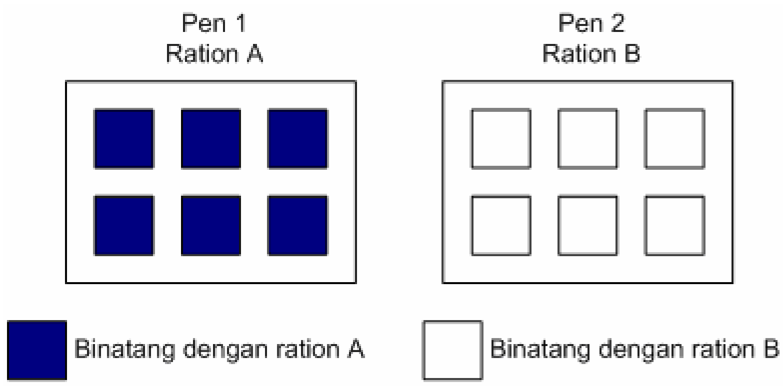
- Randomized complete block design



5. Pengukuran kovariat sebagai pengontrol variansi
    - Kovariat : variabel-variabel yang berhubungan dengan hasil dari variabel yang menjadi perhatian kita.
    - Contoh : berat badan dapat menjadi kovariat dari penambahan berat dalam percobaan diet.
    - Semua atribut yang dapat diukur dan diperkirakan mempunyai hubungan statistik dengan variabel utama merupakan kandidat untuk menjadi perbaikan kovariat.
    - Variasi : hasil yang berhubungan dengan variasi kovariat seperti halnya efek treatment (jika ada).

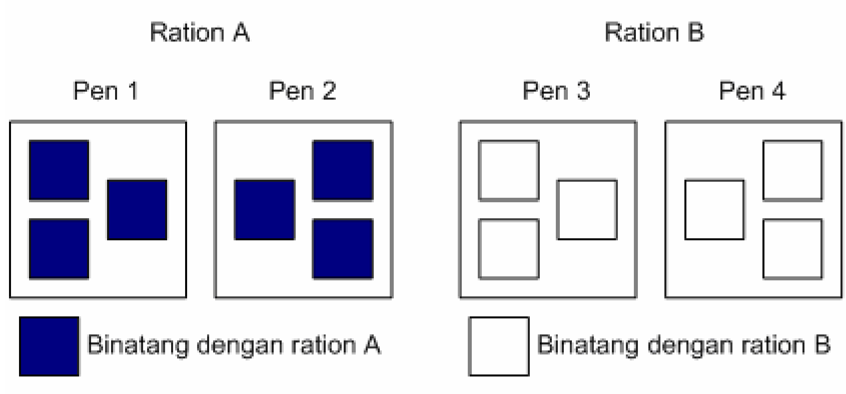
Replikasi untuk Eksperimen yang sah

- Replikasi : repetisi (pengulangan) independen pada eksperimen dasar
- Alasan untuk mereplikasi eksperimen :
    - menunjukkan hasil-hasil yang dapat direproduksi
    - penjaminan terhadap hasil yang aberrant
    - bertujuan untuk mengestimasi variansi experimental error
    - meningkatkan presisi pada estimasi rata-rata treatment
- Observational vs experimental units
    - Variansi experimental error adalah variansi observasi pada experimental unit (tidak perlu sama dengan variansi observational units).
    - Experimental units : treatment unit adalah independen
    - Contoh observational units :



- Caution : semua perbedaan diantara dua ration tidak dapat dihubungkan dengan jelas dengan ration itu sendiri.

- Contoh experimental units :



- Berapa replikasi yang dibutuhkan?
  Jumlah replikasi yang dibutuhkan sangat dipengaruhi oleh empat faktor :
  - Variansi
  - Besar perbedaan (yang mempunyai signifikansi fisik) diantara dua rataan
  - Level signifikansi
  - Kehandalan pengujian

Randomisasi

- Observasi independen merupakan hal penting untuk estimasi dan uji hipotesa karena ia memberikan estimasi experimental error yang valid
- Asumsi independen tidak dapat diberikan jika terdapat hubungan diantara mereka.
- Alokasi treatment secara acak pada experimental units menunjukkan efek independensi dan jika observasi tersebut independen dan berdistribusi normal maka kita dapat meneruskan eksperimen.
- Uji randomisasi : diskusikan contoh 1.3 hal. 21 (Kuehl, 2000)

Efisiensi Relatif pada Rancangan Eksperimen

- Efisiensi relatif : pengukuran untuk menentukan efisiensi dari suatu rancangan yang kita gunakan relatif dengan rancangan yang lain.
- Efisiensi didasarkan pada presisi
- Lebih banyak rataan replikasi maka lebih presisi
- Dalam prakteknya, variansi untuk setiap rancangan tidak diketahui dan harus diestimasi untuk data
- Estimasi dipengaruhi oleh *degree of freedom*
- Fisher merumuskan konsep informasi untuk pengukuran efisiensi ini.

COMPLETELY RANDOMIZED DESIGN

KASUS

Deskripsi

Pengemasan standar dengan atmosfir udara mempunyai perlindungan diri sekitar 48 jam dan setelah itu rata-rata kualitasnya mulai memburuk karena kontaminasi mikroba, degradasi warna, dan penyusutan. Pengemasan vakum efektif dalam menghambat pertumbuhan mikroba; tetapi, kurangnya kualitas yang lain masih menyisakan masalah.

Studi terbaru mengusulkan penggunaan atmosfir gas yang terkendali sebagai kemungkinan alternatif untuk pengemasan. Dua atmosfir yang menjanjikan untuk mengkombinasikan kemampuan menekan perkembangan mikroba tetapi tetap mempertahankan kualitas daging yang lain adalah : (1) Karbondioksida murni (CO_2), dan
(2) campuran karbondioksida (CO), oksigen (O_2), dan nitrogen (N).

Hipotesa

Beberapa bentuk atmosfir gas yang terkendali dapat memberikan lingkungan pengemasan yang lebih efektif untuk penyimpanan daging.

Perancangan Treatment

1. Udara jenuh pada pembungkus plastik komersial
2. Hampa udara (vakum)
3. Campuran 1% CO, 40% O_2, dan 59% N
4. 100% CO_2

Perancangan Eksperimen

- *Completely randomized design* digunakan untuk eksperimen ini
- Tiga daging sapi yang kira-kira ukurannya sama (75g) secara acak masing-masing diberikan jenis pengemasan tertentu.
- Jumlah bakteri psychrotrophic pada daging dihitung setelah 9 hari penyimpanan pada suhu 4^0C di dalam fasilitas penyimpanan daging standar
- Bakteri psychrotrophic ditemukan pada permukaan daging dan membuat busuk produk daging tsb.

Hasil

Kondisi pengemasan	Bakteri Psychrotrophic				
	Log (count/cm^2)			Total	Rata-rata
Bungkus plastik komersil	7,66	6,98	7,80	22,44	7,48
Kemasan vakum	9,26	5,44	5,80	16,50	5,50
1%CO, 40% O, 59% N	7,41	7,33	7,04	21,78	7,26
100% CO_2	3,51	2,91	3,66	10,08	3,36

Bagaimana Proses Randomisasi nya?

- Langkah 1 : Berikan sederet nomer dari 1 sampai 12 pada experimental units (dalam hal ini adalah daging)
- Langkah 2 : Carilah permutasi acak dari nomor 1 sampai 12, misalnya menggunakan tabel nomer acak

- Langkah 3 : Pada tiga daging pertama berikan treatment A, tiga daging berikutnya treatment B, dan tiga daging terakhir treatment C
- Dalam *comparative observational studies*, peneliti tidak dapat memberikan sekumpulan treatment secara acak kepada unit.
- Di sini, probabilitas unit sampel sebaiknya dipilih dari member yang tersedia pada setiap populasi treatment.
- Langkah 1 : Identifikasi populasi dan buatlah daftar dari semua unit yang ada pada setiap populasi
- Langkah 2 : Berikan nomer order pada setiap unit di setiap populasi
- Langkah 3 : Generate bilangan acak untuk setiap populasi dan ambil unit dengan nomer yang sama dengan bilangan acak tersebut.

Model Statistik Eksperimen

- Variabel respon (y) : Karakteristik unit atau subjek yang diukur pada observasi
- Populasi referensi : Populasi yang terdiri dari subjek atau experimental units untuk tiap treatment dalam penelitian.
- Variansi populasi diasumsikan sama untuk setiap populasi dan tidak dipengaruhi oleh treatment.

Cell Means Model

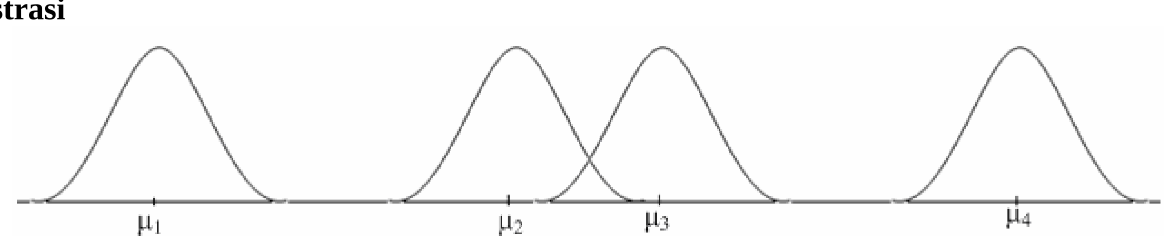
Observasi dinyatakan sebagai penjumlahan rata-rata populasi treatment dan experimental error dengan *cell means model* yaitu :

$$y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$$

$$i = 1,2,\ldots,t \qquad j = 1,2,\ldots,r$$

Dimana y_{ij} : observasi ke-j dari treatment ke-i
μ_i : rata-rata kelompok treatment ke-i
e_{ij} : experimental error

Ilustrasi

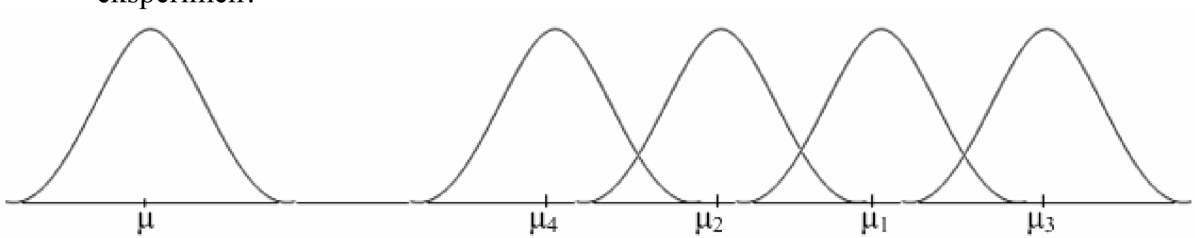


Bentuk distribusi nya sama karena variansi antar treatment sama untuk semua populasi.

Model Alternatif dan Hipotesa Statistik

- Model rataan sel adalah *reduce model* : rataan semua treatment sama
- Reduce model : $y_{ij} = \mu + e_{ij}$
- Reduce model menyatakan bahwa semua observasi berasal populasi yang sama dengan rataan μ
- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_t$
- $H_1 : \mu_i \neq \mu_k$ untuk $i \neq k$
- Pertanyaan riset : adakah pertumbuhan bakteri yang lebih banyak pada beberapa pengemasan dibandingkan yang lainnya ?

- Pertanyaan statistik : Model apakah yang terbaik yang dapat menggambarkan hasil eksperimen?



$Y_{ij} = \mu + e_{ij}$ ATAU $Y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$

General Linear Statistical Model

- Model rataan sel merupakan kasus khusus dari Model Linier Umum :

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + e$$

- Disini x_i dapat merupakan level treatment atau kovariat
- Kovariat : faktor yang berpengaruh terhadap respon tetapi tidak ingin kita kendalikan
- Jika x_i merupakan level treatment, kita dapat menggunakannya seperti variabel dummy pada model regresi majemuk

Penerapan GLS Pada Kasus

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{jika pembungkus komersial} \\ 0 & \text{selainnya} \end{cases}$$

- Jika model menggunakan treatment pembungkus komersial, maka model menjadi :

$$y = \beta_1 x_1 + e$$

- Jadi $\beta_1 = \mu_1$ dan model umum untuk semua group menjadi :

$$y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$$

$$i = 1, 2, \ldots, t \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

- Fleksibilitas Model Linier Umum adalah peneliti dapat melibatkan kovariat.
- Contohnya, peneliti memperhatikan bahwa kandungan uap yang digunakan pada sampel daging dapat mengubah tingkat pertumbuhan bakteria. Model menjadi :

$$y_{ij} = \mu_i + \beta_t x_{ij} \; e_{ij}$$

Estimasi Parameter Model

- Set : $e_{ij} = y_{ij} - \mu_i$
- Misalkan $\hat{\mu}$ sebagai estimator kuadrat terkecil dari μ_i
- Maka estimator experimental error adalah :

$$SSE = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\hat{e}^2_{ij} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \hat{\mu}_i\right)^2$$

Persamaan Normal

- Untuk setiap treatment *i* kita dapat membentuk Persamaan Normal dengan menurunkan persamaan : $Q = \sum_{j=1}^{r} e^2_{ij} = \sum_{j=1}^{r} \left(y_{ij} - \mu_i\right)^2$
- Dengan menyelesaikan persamaan normal kita dapat mengestimasi μ_i :

$$\hat{\mu}_i = \frac{y_{i\bullet}}{r} = \bar{y}_i$$

Estimasi Variansi Pada Full Model

- Sehingga, jumlah kuadrat experimental error pada full model $y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$ adalah :

$$SSE_f = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \hat{\mu}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2$$

- Sehingga, dengan mengasumsikan variansinya homogen diantara treatment kita dapat mengestimasi variansi full model

$$s^2 = \frac{SSE}{t(r-1)}$$

Estimator untuk Reduce Model

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{\bullet\bullet} = \frac{y_{\bullet\bullet}}{N}$$

$$SSE_r = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$$

Partisi Fundamental

- Total Jumlah kuadrat SSE_r dari reduce model, adalah penjumlahan dari jumlah kuadrat treatment dan experimental error SSE_f dari full model
- SS Total = SS Treatment + SS Error

$$SSE_r = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2$$

Treatment Effect Model

$$y_{ij} = \bar{y}_{\bullet\bullet} + \left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right) + \left(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)$$

$$y_{ij} = \bar{\mu}_{\bullet} + \left(\mu_i - \bar{\mu}_{\bullet}\right) + \left(y_{ij} - \mu_i\right)$$

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij}$$

$$y_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}$$

N = jumlah semua respon

τ_i = efek dari treatment ke-i

Derajat Kebebasan

- Derajat Kebebasan : jumlah elemen yang independen secara statistik pada jumlah kuadrat
- Untuk model penuh akan ada t parameter yang diestimasi, jadi d.o.f = (N-t)
- Untuk model tereduksi hanya akan ada satu parameter yang diestimasi, jadi d.o.f = (N-1)
- SS Total = SS Treatment + SS error

  (N-1) = (t-1) + (N-t)

Kesimpulan : Tabel Anova

Source of Variation	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Square
Treatment	t - 1	SS Treatment	$MST = \frac{SST}{t-1}$
Error	N - t	SS Error (penuh)	$MST = \frac{SSE}{N-t}$
Total	N - 1	SS Total (tereduksi)	

Uji Hipotesis

$$E(MSE) = \sigma^2$$

$$E(MST) = \sigma^2 + r\theta_t^2$$

$$\theta_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^{t}(\mu_i - \bar{\mu}_{\bullet})}{(t-1)}$$

Di sini, kita harus menguji apakah θ_t^2 samadengan nol

Sum of Squares Difference

- $SSE_r - SSE_f$ adalah ukuran kenaikan dari penggunaan full model dari reduce model, nilainya signifikan apa tidak.
- Karena itu, nilai rasionya memberikan rata-rata kenaikan relatif dan bentuk kriteria uji F nya adalah :

$$\frac{SSE_r - SSE}{SSE_f}$$

- Maka, penggunaan rasio ekuivalen dengan penggunaan uji statistik yang dihitung dari tabel ANOVA :

$$F_0 = \frac{MST}{MSE}$$

Standard Error dan Selang Kepercayaan

$$S_{\bar{y}_{i\bullet}}^{2} = \frac{s^2}{r} \qquad \text{dimana } s^2 = \text{MSE}$$

- Kemudian, kita dapat menghitung selang kepercayaan untuk setiap rataan kelompok treatment dengan menggunakan

$$\bar{y}_{i\bullet} \pm t_{\alpha/2_t(N-t)} S_{\bar{y}_{i\bullet}}$$

Berapa replikasi diperlukan ?

- Jumlah replikasi tergantung pada variansi, *significance level* dan *power of the test*
- Power of the test adalah probabilitas menolak H_0 saat H_0 salah

$$1-\beta = P\left(F > F_{\alpha,v_1,v_2} \middle| H_0 \ false\right)$$

- Apabila H_0 salah, F_0 tidak lagi berdistribusi F tetapi berdistribusi F non-central dengan v_1 dan v_2 adalah *degree of freedom* dan parameter non-centrality

$$\lambda = r\frac{\sum_{i}^{t}\tau_i^2}{\sigma^2}$$

- Tabel yang telah dihitung merupakan tabulasi *power of the F test* dengan nilai-nilai yang diberikan : level signifikansi α ; power 1 – β ; *degree of freedom* v_1 dan v_2 ; dan Φ adalah fungsi parameter non-centrality yaitu :

$$\Phi = \sqrt{\frac{\lambda}{t}} = \sqrt{\frac{r\sum_{i=1}^{t}\tau_i^2}{t\sigma^2}}$$

- Grafik ditunjukkan pada Appendix IX

COMPLETE BLOCK DESIGN

Pendahuluan

- Blocking artinya mengurangi dan mengendalikan variansi error eksperiment untuk mendapatkan kepresisian yang lebih tinggi.
- Dalam Completely Randomized Design, diasumsikan bahwa unit eksperimen relatif homogen terhadap variabel respon yang terukur.
- Blocking membagi-bagi unit eksperimen menjadi kelompok yang homogen, atau menjadi seperti unit-unit.
- Kategori umum dari kriteria sukses adalah : proximity (kedekatan), karakteristik fisik, waktu, dan manajemen tugas pada eksperimen

Studi Kasus

- Tujuan riset : Peneliti ingin menguji efek dari beberapa waktu penjadwalan fertilisasi yang berbeda terhadap jumlah nitrat pada jaringan batang dan produksi panas yang dihasilkannya.
- Desain treatment : Melibatkan enam penjadwalan pemberian nitrogen yang berbeda yang diharapkan akan menghasilkan kondisi range yang mencukupi untuk mengevaluasi proses.
- Desain eksperimen : Eksperimen disusun dalam lahan irigasi dengan gradien air yang searah. Karena respon tanaman dipengaruhi oleh variabilitas jumlah embun yang tersedia, plot lahan dikelompokkan menjadi block-block sehingga setiap block memiliki gradien air yuang sama.
  Hasil desain eksperimen adalah randomized complete block design dengan empat block dan enam plot lahan dimana tiap plot diberikan treatment nitrogen secara acak.

Penyusunan Plot Eksperimen

Block 1	2 40.89	5 37.99	4 37.18	1 34.98	6 34.89	3 42.07
Block 2	1 41.22	3 49.42	4 45.85	6 50.15	5 41.99	2 46.49
Block 3	6 44.57	3 52.68	5 37.61	1 36.94	2 46.65	4 40.23
Block 4	2 41.9	4 39.2	6 43.29	5 40.45	3 42.91	1 39.97

Model Statistik untuk RCBD

- Respon unit pada treatment ke-i dan block ke-j dituliskan sebagai :

  $$y_{ij} = \mu + \tau_i + \rho_j + e_{ij}$$

  Dimana :
  - μ adalah general mean
  - τ_i adalah efek treatment
  - ρ_j adalah efek blok
  - e_{ij} adalah error eksperimental

  Efek block ρ_j menyatakan deviasi rata-rata pada block-j dari general mean

- Deviasi pada sembarang observasi dari grand mean dapat dituliskan sebagai identitas aljabar :

$$\left(y_{ij}-\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)=\left(\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)+\left(\bar{y}_{\bullet j}-\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)+\left(y_{ij}-\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet j}+\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)$$

- Pernyataan pada ruas kanan persamaan diatas adalah :
  - Deviasi treatment $\left(\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)$
  - Deviasi block $\left(\bar{y}_{\bullet j}-\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)$
  - Error eksperimental $\left(y_{ij}-\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet j}+\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)$
- Tabel data untuk RCBD

Treatment	Block				Rataan Treatment
	1	2	. . .	r	
1	y_{11}	y_{12}	. . .	y_{1r}	$\bar{y}_{1\bullet}$
2	y_{21}	y_{22}	. . .	y_{2r}	$\bar{y}_{2\bullet}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
t	y_{t1}	y_{t2}	. . .	y_{tr}	$\bar{y}_{t\bullet}$
Rataan block	$\bar{y}_{\bullet 1}$	$\bar{y}_{\bullet 2}$	. . .	$\bar{y}_{\bullet r}$	$\bar{y}_{\bullet\bullet}$

Partisi Sum Squares pada RCBD

- Dari persamaan di atas, dengan mengkuadratkan dan menjumlahkan kedua ruas :

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij}-\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2=r\sum_{i=1}^{t}\left(y_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2+t\sum_{j=1}^{r}\left(y_{\bullet j}-\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2+\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet j}+\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$$

Atau :

SS Total = SS Treatment + SS Block + SS Error

Tabel ANOVA untuk RCBD

Sumber Variasi	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Squares	Expected Mean Square
Total	rt - 1	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij}-\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$		
Treatment	t - 1	$r\sum_{i=1}^{t}\left(y_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$	$MST=\frac{SST}{t-1}$	$\sigma^2+r\theta_T^2$
Blocks	r - 1	$t\sum_{j=1}^{r}\left(y_{\bullet j}-\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$	$MSB=\frac{SSB}{r-1}$	$\sigma^2+t\theta_B^2$
Error	(t-1)(r-1)	SS Total – SST – SSB	$MSE=\frac{SSE}{(t-1)(r-1)}$	σ

Data Untuk Studi Kasus

Nitrogen Timing Schedule	Block				Rataan Treatment $(\bar{y}_{i\bullet})$
	1	2	3	4	
Control	34.98	41.22	36.94	39.97	38.28
2	40.98	46.69	46.65	41.90	44.03
3	42.07	49.42	52.68	42.91	46.77
4	37.18	45.85	40.23	39.20	40.62
5	37.99	41.99	37.61	40.45	39.51
6	34.89	50.15	44.57	43.29	43.23
Rataan Block $(\bar{y}_{\bullet j})$	38.00	45.89	43.11	41.29	$\bar{y}_{\bullet\bullet} = 42.07$

ANOVA untuk Studi Kasus

Sumber Variasi	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Squares	F	Pr > F
Total	23	506.33			
Treatment	5	201.32	40.26	5.59	0.004
Blocks	3	197.00	65.57	9.12	
Error	15	108.1	7.20		

H_0 treatment ditolak, artinya ada perbedaan antar treatment.

Analisis RCBD

- Sum of Squares Block membagi-bagi apa yang telah menjadi Sum of Squares Error pada Completely Randomized Design.
- Blocked Design ditandai dengan meningkatnya presisi pada estimasi rataan treatment jika reduksi pada SS Error dengan blocking begitu besar.
- Tetapi, reduksi pada SS Error dapat diabaikan oleh reduksi dalam degrees of freedom, karena r-1 dari d.o.f harus diberikan pada SS Blocks.

Error Standar pada Rataan Treatment

- Error standar pada rataan treatment adalah :

$$s_{\bar{y}_{i\bullet}} = \sqrt{\frac{MSE}{r}} = \sqrt{\frac{7.20}{4}} = 1.34$$

- Selang kepercayaan estimasi 95% dari rataan treatment adalah :

$$\bar{y}_{i\bullet} \pm t_{0.025,15}(s_{\bar{y}_{i\bullet}}) \quad \text{dimana} \quad t_{0.025,\,15} = 2.131$$

- Error standar dari perbedaan diantara dua rataan treatment sembarang diestimasi oleh :

$$s_{(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet j})} = \sqrt{\frac{2MSE}{r}} = \sqrt{\frac{2(7.20)}{4}} = 1.90$$

Uji Hipotesis terhadap Rataan Treatment

- Statistik F_0 untuk menguji hipotesa ke-nol bahwa tidak ada perbedaan diantara rataan treatment adalah

$$F_0 = \frac{MST}{MSE} = \frac{40.26}{7.20} = 5.59$$

- Perhitungan ini melebihi nilai kritis $F_{0.05,15} = 2.90$
- Maka, terdapat perbedaan yang signifikan diantara treatment nitrogen terhadap masing-masing batang nitrogen nitrat pada pertumbuhan tanaman.

Jika Treatment berinteraksi dengan Blocks

- Asumsi bahwa tidak ada interaksi antara treatment dan block mengandung arti bahwa efek treatment dan block bersifat additif (tambahan).
- Jika asumsi tidak dapat dibenarkan maka harus dilakukan anaisis non-aditifitas yang lebih umum.

Unit eksperimen berganda per treatment pada setiap Block

- Notasi interaksi $(\tau\rho)_{ij}$ menyatakan non-aditifitas yang lebih umum.
- Model Linier untuk eksperimen dengan u buah unit eksperimen untuk setiap treatment pada setiap r buah blocks adalah

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \rho_j + (\tau\rho)_{ij} + e_{ijk}$$

$i = 1,2, ..., t \quad ; \quad j = 1, 2,..., r \quad ; \quad k = 1, 2, ..., u$

dimana e_{ijk} adalah random, error eksperimen independen dengan rataan 0 dan variansi σ^2.

- Perhitungan untuk partisi-partisi Sum of Squares dan pengujian interaksi prosesnya sama seperti penyusunan faktorial dua faktor.

Analisis Residual untuk Menguji Asumsi

Untuk menguji asumsi homogenitas variansi dan distribusi normal error kita dapat menggunakan residual :

$$\hat{e}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{\bullet j} - \bar{y}_{i\bullet} + \bar{y}_{\bullet\bullet}$$

Efisiensi Relatif karena Blocking

- Kita dapat menggunakan ukuran efisiensi relatif untuk memeriksa seberapa besar benefit karena blocking
- Efisiensi desain RCB dibandingkan dengan desain CRD nya.
- Untuk itu, kita bandingkan MSE dari RCBD dan CRD, atau

$$RE = \frac{s_{cr}^2}{s_{rcb}^2}$$

- Karena kita tidak membuat eksperimen CRD nya maka kita tidak mempunyai s_{cr}^2, namun kita dapat mengestimasinya dengan menggunakan s_{rcb}^2

$$s_{cr}^2 = \frac{SSB + r(t-1)MSE}{rt-1}$$

- Kita juga membutuhkan faktor koreksi untuk estimasi σ^2 dengan s^2 yaitu

$$s^2 = \frac{(f_{rcb}+1)(f_{cr}+3)}{(f_{rcb}+3)(f_{cr}+1)}$$

- Pada studi kasus :

$$s_{cr}^2 = \frac{SSB + r(t-1)MSE}{rt-1} = \frac{197 + 20.(7.2)}{23} = 14.8$$

$$s^2 = \frac{(f_{rcb}+1)(f_{cr}+3)}{(f_{rcb}+3)(f_{cr}+1)} = \frac{(16).(21)}{(18).(19)} = 0.98$$

$$RE = \frac{s_{cr}^2}{s_{rcb}^2} = \frac{14.8}{7.2}(0.98) = 2.06.(0.98) = 2.02$$

Quick Check untuk Keefektifan Blocking

- Efisiensi relatif dapat dituliskan sebagai :

$$RE = \frac{s_{cr}^2}{s_{rcb}^2} = \frac{SSB + r(t-1)MSE}{(rt-1)MSE}$$

- Dengan manipulasi aljabar

$$RE = k + (1-k)H \qquad \text{dengan} \qquad H = \frac{MSB}{MSE} \qquad \text{dan} \qquad k = \frac{r(t-1)}{rt-1}$$

- Maka hubungan RE dan H berikut ini dapat ditentukan :

  $RE < 1$ jika dan hanya jika $H < 1$

  $RE > 1$ jika dan hanya jika $H > 1$

LATIN SQUARE DESIGN

- Pada beberapa kasus, kita ingin membuat block pada dua faktor atau lebih dengan treatment yang dapat mempengaruhi hasil eksperimen.
- Studi kasus : contoh 8.2
- Contoh : Eksperimen yang menguji empat treatment ban (A, B, C, D) pada empat mobil. Setiap jenis ban hanya muncul sekali pada keempat posisi ban di setiap mobil.
- Baris merupakan kriteria blocking untuk mobil dan kolom merupakan kriteria blocking untuk posisi ban.

Mobil	Posisi Ban			
	1	2	3	4
1	A	B	C	D
2	B	C	D	A
3	C	D	A	B
4	D	A	B	C

Latin Square Standar

- Square Standar memiliki simbol treatment (A, B, C, ...) yang dituliskan dalam urutan alfabet pada baris pertama dan kolom pertama pada array. Setiap simbol treatment muncul sekali pada setiap kolum dan sekali pada setiap baris pada array.
- Square standar untuk t = 2 dan 3 hanya terjadi sekali dan terdapat 4 square standar dengan jumlah treatment t=4.
- Latin square merupakan desain yang terbatas karena membutuhkan beberapa treatment, barism dan kolom dengan jumlah yang sama.
- Dengan demikian, ukuran yang cocok pada kebanyakan eksperimen dengan penyusunan Latin Square melibatkan treatment sejumlah t = 5 sampai 7.

Cara untuk Randomisasi Desain

- Step 1 : Pilih secara acak salah satu dari desain standar
- Step 2 : Urutkan secara acak semuanya kecuali pada baris pertama
- Step 3 : Urutkan secara acak semua kolom
- Step 4 : Berikan treatment secara acak dengan huruf-huruf.

Model Statistik untuk Latin Square Design

- Model linier statistik untuk eksperimen dengan t buah treatment pada desain Latin Square t x t adalah :

$$y_{ij} = \mu + \rho_i + \gamma_j + e_{ij}$$

- Partisi Sum of Squares untuk blocking :

$$\left(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right) = \left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right) + \left(\bar{y}_{\bullet j} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right) + \left(\bar{y}_k - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right) + \left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet j} - \bar{y}_k + 2\bar{y}_{\bullet\bullet}\right)$$

Tabel ANOVA untuk Latin Square Design

Sumber Variasi	Degrees of Freedom	Sum of Squares (SS)	Mean Squares (MS)	Expected Mean Square
Total	t^2 - 1	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$		
Column	t - 1	$t\sum_{j=1}^{t}\left(y_{\bullet j} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$	$MSC = \frac{SSC}{t-1}$	$\sigma^2 + t\theta_C^2$
Row	t - 1	$t\sum_{i=1}^{t}\left(y_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$	$MSR = \frac{SSR}{t-1}$	$\sigma^2 + t\theta_R^2$
Treatment	t - 1	$t\sum_{k=1}^{k}\left(y_k - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$	$MST = \frac{SST}{t-1}$	$\sigma^2 + t\theta_T^2$
Error	t^2 - 1	SS Total – SST – SSC - SSR	$MSE = \frac{SSE}{t^2 - 1}$	σ

FACTORIAL DESIGN

Deskripsi Kasus

Pemerataan aspal dengan pencampuran air memiliki keburukan seperti keretakan, jalanan berlubang, dan kerusakan permukaan. Keburukan ini terjadi jika terdapat kerusakan pada ikatan adhesive (tarik menarik zat tak sejenis) antara semen agregat dan semen aspal yang membuat pemerataan lebih tahan terhadap detorasi.
Dua faktor yang diketahui mempunyai efek pada kekuatan ikatan spesimen adalah :
(1) Metode yang digunakan untuk mencampur spesimen saat konstruksi
(2) Tipe Agregate yang digunakan pada campuran aspal
Desain faktorial treatment dapat digunakan untuk menguji apakah kedua faktor tersebut memberi pengaruh secara independen pada kekuatan spesimen uji. Penyusunan faktorial diilustrasikan dalam tabel berikut

Tabel Kekuatan Tensile

Tipe Agregat (A)	Metode Kompaksi (B)		Rataan Agregat
	Static (B1)	Kneading (B2)	
Silicous (A1)	68	60	64
Basalt (A2)	65	97	81
Rataan Kompaksi	66.5	78.5	

- **Faktor** adalah jenis treatment seperti metode kompaksi (pencampuran) dan jenis agregat (bahan pencampur), dan beberapa kategori yang berbeda dari faktor disebut **level** dari faktor tersebut.
- **Eksperimen Faktorial** adalah eksperimen dengan desain treatment faktorial yang terdiri dari seluruh kombinasi yang mungkin dari level-level beberapa faktor.
- Level dapat berupa **kuantitatif** (bernilai metrik) juga dapat **kualitatif** (bernilai non-metrik)
- **Efek Faktor** adalah perubahan pada respon yang diukur yang disebabkan oleh perubahan level faktor tersebut.
- Ada tiga tipe efek :
  1. **Simple Effect (Efek sederhana)**
     - Simple effect dari suatu faktor adalah contrast antara level-level dari suatu faktor dengan level-level di faktor yang lain
     - Simple effect (I_1) dari tipe agregat (A) pada level tensil dengan kompaksi static (B_1) dihitung dari tabel cell means sebagai :

       $$I_1 = \mu_{21} - \mu_{11} = 65 - 68 = -3$$
  2. **Main Effect (efek utama)**
     - Main effect dari suatu faktor adalah contrast antara level-level pada suatu faktor terhadap rata-rata seluruh level pada faktor yang lain.
     - Main effect dari tipe agregat kekuatan tensil adalah perbedaan antara rataan marginal untuk tipe agregat pada tabel cell means.

       $$I_1 = \bar{\mu}_{2\bullet} - \vec{\mu}_{1\bullet} = 81 - 64 = 17$$
  3. **Interaction Effect (efek interaksi)**
     - Interaction effect mengukur perbedaan antara simple effect suatu faktor dengan level-level yang berbeda di faktor yang lain.

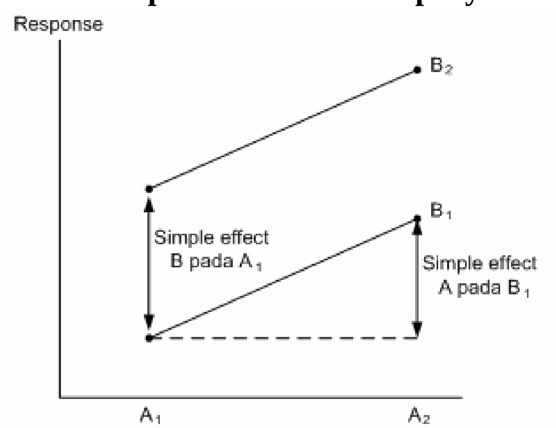
- Perhatikan bahwa simple effect dari tipe agregat untuk metode kompaksi static adalah -3 dan untuk kneading adalah 37. Maka perbedaannya adalah 40
- Hal tersebut menginformasikan bahwa terdapat interaksi antara metode kompaksi dan simple effect dari tipe agregat.
- Contrast interaksi faktorial 2x2 dihitung dari perbedaan antara dua simple effect untuk faktor A :

$$AB = (\mu_{22} - \mu_{12}) - (\mu_{21} - \mu_{11})$$

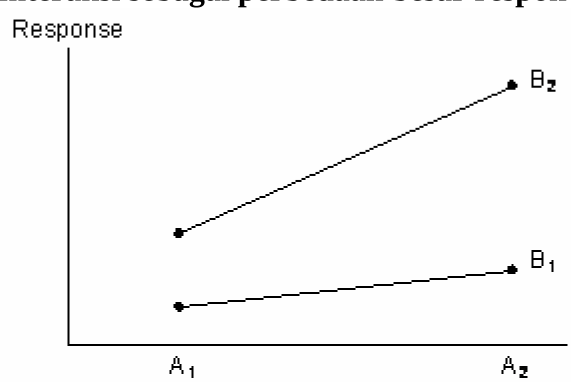
Tabel Rataan untuk Eksperimen Faktorial 2x2

A	B		Rataan faktor A
	1	2	
1	μ_{11}	μ_{12}	$\bar{\mu}_{1\bullet} = \frac{\mu_{11} + \mu_{12}}{2}$
2	μ_{21}	μ_{22}	$\bar{\mu}_{2\bullet} = \frac{\mu_{21} + \mu_{22}}{2}$
Rataan Faktor B	$\bar{\mu}_{\bullet 1} = \frac{\mu_{11} + \mu_{21}}{2}$	$\bar{\mu}_{\bullet 2} = \frac{\mu_{12} + \mu_{22}}{2}$	

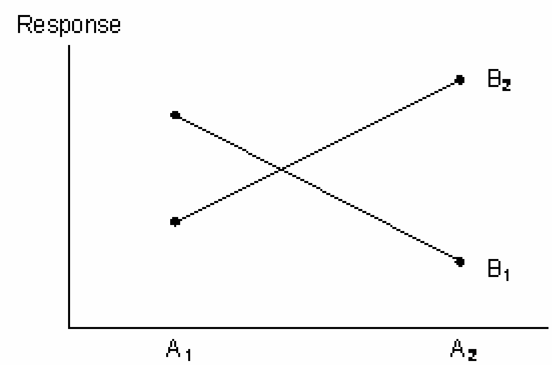
Ilustrasi tanpa Interaksi dalam penyusunan faktorial



Interaksi sebagai perbedaan besar respon



Interaksi sebagai perbedaan arah respon



Model Cell Means

- Observasi dari eksperimen faktorial dengan dua faktor, A dengan jumlah level a dan B dengan jumlah level b, dapat direpresentasikan dengan **model cell means.**
- Model cell means untuk faktorial a x b dengan r buah replikasi dalam completely randomized design adalah :

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}$$

i = 1, 2, ..., a j = 1, 2, ..., b k = 1, 2, ..., r

Estimasi cell means dan SSE Eksperimen

- Cell means dapat diestimasi menggunakan rumus :

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{y_{ij\bullet}}{r} = \bar{y}_{ij\bullet} \qquad \text{i = 1, 2, ..., a} \qquad \text{j = 1, 2, ..., b}$$

- SSE eksperimen dapat diestimasi menggunakan :

$$SS\ Error = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\hat{e}_{ijk}^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(y_{ijk} - \hat{y}_{ij}\right)^2$$

Aditifitas dan Efek Faktor

- Cell means μ_{ij} menyatakan respon sebenarnya untuk kombinasi treatment level i untuk A dan level j untuk B.
- Dalam hal tidak ada interaksi, cell mean dapat diekspresikan sebagai jumlah dar general mean μ ditambah kontribusi efek oleh A (disebut α_i) dan kontribusi efek oleh B (disebut β_{jt}) sehingga $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$
- Efek untuk level ke-i pada faktor A dapat dinyatakan sebagai : $\alpha_i = \bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}$

  Efek untuk level ke-j pada faktor B dapat dinyatakan sebagai : $\beta_j = \bar{\mu}_{\bullet j} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}$
- Efek akan menjadi fixed effect jika level-level faktor dapat direproduksi.
- Dalam hal tidak ada interaksi, cell mean adalah jumlah dari grand mean dan efek-efek faktor untuk cell tersebut :

$$\mu_{ij} = \bar{\mu}_{\bullet\bullet} + \left(\bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right) + \left(\bar{\mu}_{\bullet j} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right)$$

- Efek dari kombinasi treatment ke-ij, $\tau_{ij} = \left(\mu_{ij} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right)$ adalah penjumlahan dari efek-efek dua faktor : $\left(\mu_{ij} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right) = \left(\bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right) + \left(\bar{\mu}_{\bullet j} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right)$

  Dan efek-efek faktor bersifat additive dalam hal tidak ada interaksi
- Dalam hal terdapat interaksi, efek interaksi yang dinotasikan sebagai $(\alpha\beta)_{ij}$ dapat didefinisikan sebagai perbedaan antara kedua ruas pembentuk persamaan :

$$(\alpha\beta)_{ij} = \left(\mu_{ij} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right) - \left(\bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right) + \left(\bar{\mu}_{\bullet j} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right) = \mu_{ij} - \bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet j} + \bar{\mu}_{\bullet\bullet}$$

- Kelompok parameter yang baru, α_i, β_j, dan $(\alpha\beta)_{ij}$ dapat digunakan untuk menuliskan model linier untuk faktorial sebagai effects model

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

i = 1, 2, ..., a ; j = 1, 2, ..., b ; k = 1, 2, ..., r

- Secara alami dari definisi, penjumlahan efek-efek sama dengan nol

$$\sum_{i=1}^{a}\alpha_i = 0 \qquad \sum_{j=1}^{b}\beta_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{a}(\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij} = 0$$

Sum of Squares Faktor Fundamental

- Total sum of squares dapat diturunkan dari efek treatment dan error eksperimental :
  $$(y_{ijk} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}) = (\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\bullet})$$
- SS Total = SS Treatment + SS Error
  $$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 = r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij\bullet})^2$$

Sum of Squares untuk Efek Faktorial

- Efek treatment dapat diekspersikan sebagai identitas :
  $$(y_{ijk} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}) = (\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}) + (\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}) + (\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})$$
  Dimana efek treatment adalah jumlah dari ketiga efek :
  a. Main Effect dari faktor A $(\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})$
  b. Main Effect dari faktor B $(\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})$
  c. Interaksi $(\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})$
- Sum of Squares untuk komponen pertama akan menjadi Sum of Squares diantara marginal means untuk A
  $$SSA = rb\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$$
- Komponen kedua akan menjadi Sum of Squares diantara marginal means untuk B
  $$SSB = ra\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$$
- Komponen ketiga akan menjadi Sum of Squares diantara marginal means interaksi A dan B
  $$SS\ (AB) = r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$$

Tabel ANOVA untuk Desain Treatment Dua Faktor

Sumber Variasi	d.o.f	Sum of Squares (SS)	Mean Squares (MS)	EMS
Total	rab – 1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$		
Faktor A	a – 1	$rb\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$\sigma_e^2 + rb\theta_a^2$
Faktor B	b – 1	$ra\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$\sigma_e^2 + ra\theta_a^2$
Interaksi AB	(a–1)(b-1)	$r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$MS(AB) = \frac{SS(AB)}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma_e^2 + r\theta_{ab}^2$
Error	ab(r – 1)	SS Total – SSA – SSB – SS(AB)	$MSE = \frac{SSE}{ab(r-1)}$	σ_e^2

Uji Hipotesa Efek Faktor

- Jika tidak ada perbedaan diantara marginal means untuk A, maka $\alpha_i = \bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet} = 0$ dan $\theta_a^2 = 0$ pada Expected Mean Square untuk A. Maka Hipotesa ke-0 yaitu kesamaan diantara mean

  $H_0 : \bar{\mu}_{1\bullet} = \bar{\mu}_{2\bullet} = \cdots = \bar{\mu}_{a\bullet}$ → untuk semua kondisi b

  Dengan alternatif

  $H_a : \bar{\mu}_{i\bullet} \neq \bar{\mu}_{k\bullet}$ untuk beberapa i,k

  Di uji dengan rasio $F_0 = \dfrac{MSA}{MSE}$

- Jika tidak ada perbedaan diantara marginal means untuk B, maka $\beta_i = \bar{\mu}_{\bullet j} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet} = 0$ dan $\theta_b^2 = 0$ pada Expected Mean Square untuk B. Maka Hipotesa ke-0 yaitu kesamaan mean

  $H_0 : \bar{\mu}_{\bullet 1} = \bar{\mu}_{\bullet 2} = \cdots = \bar{\mu}_{\bullet b}$ → untuk semua kondisi a

  Dengan alternatif

  $H_b : \bar{\mu}_{\bullet j} \neq \bar{\mu}_{\bullet m}$ untuk beberapa j,m

  Di uji dengan rasio $F_0 = \dfrac{MSB}{MSE}$

- Dalam hal tidak ada interaksi $(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet j} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet} = 0$ dan $\theta_{ab}^2 = 0$ pada Expected Mean Square untuk interaksi AB. Maka Hipotesa ke-0 yaitu kesamaan diantara interaksi

  $H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet j} + \bar{\mu}_{\bullet\bullet} = 0$ untuk semua i, j

  Dengan alternatif

  $H_{ab} : (\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet j} + \bar{\mu}_{\bullet\bullet} \neq 0$ untuk semua i, j

  Di uji dengan rasio $F_0 = \dfrac{MS(AB)}{MSE}$

Error Standar dan Interval Estimasi untuk Means

Error standar untuk marginal dan cell means terestimasi untuk eksperimen faktorial adalah

- Agregat $s_{\bar{y}_{i\bullet\bullet}} = \sqrt{\dfrac{MSE}{rb}}$
- Kompaksi $s_{\bar{y}_{\bullet j\bullet}} = \sqrt{\dfrac{MSE}{ra}}$
- Cell Means $s_{\bar{y}_{ij\bullet}} = \sqrt{\dfrac{MSE}{r}}$

Contrast Majemuk Membantu Interpretasi Signifikansi Efek Interaksi

- Interaksi yang signifikan antar faktor mengindikasikan bahwa simple effects dari suatu faktor berbeda dengan level pada faktor yang lain. Akibatnya, uji hipotesis terhadap faktor treatment sebaiknya didasarkan pada contrast dari simple effects diantara cell means
- Contrast diantara cell means dapat digunakan untuk menguji simple effect suatu faktor pada tiap level di faktor yang lain.
- Disini kita membuat selang kepercayaan estimasi secara bersamaan dengan statistik t Bonferroni.

Analisis Residual untuk Menguji Asumsi

Disini kita harus menguji asumsi :

- Homogenitas variansi (menggunakan uji Levene)
- Normalitas distribusi residual (menggunakan uji K-S atau P-P Plot)

Menggunakan Kurva Respon untuk Treatment Kuantitatif

- Kurva trend Respon untuk faktor treatment kuantitatif diestimasi dengan polinomial orthogonal.
- Kurva respon yang diestimasi mempunyai keuntungan yaitu dapat melukiskan hubungan diantara variabel respon dan faktor treatment.
- Efek polinomial (a-1) dapat diperiksa dari treatment A yang memiliki level kuantitatif dan interaksi antara A dan B yang secara alamiah memiliki level kualitatif.

Sumber Variasi	**Degrees of Freedom**	**Sum of Squares (SS)**
Total	$(a \times b \times r) - 1$	
Treatment A	a - 1	
Treatment A linear	1	$\dfrac{ra\left[\sum_{j=1}^{b} P_{1j}\bar{y}_{\bullet j \bullet}\right]^2}{\sum_{j=1}^{b} P_{1j}^2}$
Treatment A quadratic	1	$\dfrac{ra\left[\sum_{j=1}^{b} P_{2j}\bar{y}_{\bullet j \bullet}\right]^2}{\sum_{j=1}^{b} P_{2j}^2}$
Treatment B	b – 1	
Treatment A x Treatment B	(a – 1)(b – 1)	
Treat.A linear x Treat.B	1 x (b – 1)	$\dfrac{r\sum_{i=1}^{a}\left[\sum_{j=1}^{b} P_{1j}\bar{y}_{ij\bullet}\right]^2}{\sum_{j=1}^{b} P_{1j}^2} - SS[A linear]$
Treat. A quadratic x Treat.B	1 x (b – 1)	$\dfrac{r\sum_{i=1}^{a}\left[\sum_{j=1}^{b} P_{2j}\bar{y}_{ij\bullet}\right]^2}{\sum_{j=1}^{b} P_{2j}^2} - SS[A quad]$
Error	$a \times b \times (r-1)$	

Interpretasi Efek Faktor dengan Contrast Regresi

- Interaksi yang signifikan antar treatment dan efek polinomial menunjukkan bahwa interpretasi sebaiknya didasarkan pada garis regresi yang terpisah.
- Sebagai contoh, contrast regresi linier untuk treatment A merupakan simple effect untuk A dihitung untuk tiap level B.
- Kooefisien polinomial linier orthogonal mengestimasi level pertama faktor B

$$a_1 = \frac{\sum_{j=1}^{b} P_{1j}\bar{y}_{\bullet j}}{\sum_{j=1}^{b} P_{1j}^2}$$

Estimasi Variansi Error dengan Satu Replikasi

- Variansi eksperimental error tidak dapat diestimasi dengan hanya satu replikasi kombinasi treatment.
- Partisi Sum of Squares untuk main effect dari faktor dan interaksinya samadengan total Sum of Squares untuk observasi.
- Aditifitas menggambarkan kasus jika tidak terdapat interaksi diantara faktor-faktor.
- Dengan aditifitas faktor, partisi mean squares untuk interaksi dapat digunakan sebagai estimasi error eksperimental.

Estimasi Variansi Error dengan Dua Faktor Kuantitatif

- Aditifitas faktor-faktor kuantitatif dapat diperiksa dengan komponen-komponen interaksinya untuk partisi regresi linier dan kemungkinan kuadratik.
- Sebagai contoh, sum of squares untuk interaksi linier dengan linier dapat dipartisi menjadi beberapa sum of squares interaksi dengan asumsi bahwa sum of squares yang tersisa untuk deviasi interaksi linier x linier merupakan error eksperimental.

Estimasi Variansi Error dengan Faktor Kualitatif dan Kuantitatif

- Pendekatan yang sama dapat digunakan jika salah satu faktor adalah kualitatif dan yang lainnya kuantitatif.
- Dalam kasus ini, sum of square dari interaksi antara faktor kualitatif dan efek linier faktor kuantitatif dapat di partisi menjadi beberapa sum of squares interaksi.
- Sum of squares deviasi yang tersisa dapat digunakan untuk mengestimasi error eksperimental.

Estimasi Variansi Error dengan Dua Faktor Kualitatif

- Bentuk non-aditifitas dalam model linier merupakan hasil sederhana dari main effect $\lambda(\alpha_i\beta_j)_t$ dimana parameter λ menyatakan parameter tambahan untuk non-aditifitas.
- Hasil dari main effect merupakan bentuk multiplikatif dari interaksi, dan jika terdapat bentuk non-aditifitas dari tipe interaksi antar main effect yang spesifik ini, maka $\lambda \neq 0$.
- Dengan model ini maka cell means merupakan penjumlahan general mean, efek-efek faktor, dan bentuk hasilnya, atau

$$\mu_{ij} = \bar{\mu}_{\bullet\bullet} + \left(\bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right) + \left(\bar{\mu}_{\bullet j} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right) + \lambda\left(\bar{\mu}_{i\bullet} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right)\left(\bar{\mu}_{\bullet j} - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}\right)$$

- Perhitungan tersebut meliputi :

$$P_j = \sum_{i=1}^{a} \left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right) y_{ij}$$

$$P = \sum_{j=1}^{b} P_j \left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)$$

$$S(Nonadditivity) = \frac{P^2}{\sum_{i=1}^{a} \left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 \sum_{j=1}^{b} \left(\bar{y}_{j} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2}$$

Berapa Replikasi Diperlukan?

- Prosedur untuk menentukan berapa replikasi dalam desain faktorial serupa dengan jika memakai CRD.
- Saat kita menguji perbedaan antara cell means kita dapat mengabaikan struktur faktorial dan model cell means $y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$ diekspresikan dalam bentuk model efek yaitu $y_{ijk} = \mu + \tau_{ij} + \varepsilon_{ijk}$, dimana τ_{ij} adalah efek kombinasi treatment ke-ij dalam penyusunan faktorial. Maka :

$$\Phi^2 = \frac{r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\tau_{ij}^2}{ab\sigma^2}$$

- Digunakan untuk mengestimasi jumlah replikasi dari grafik berdasarkan nilai τ_{ij} yang signifikan.
- Jika jumlah replikasi berdasarkan efek-efek faktorial didapatkan, parameter non-sentralitas adalah :

$$\lambda_a = br\sum_{i=1}^{a}\frac{\alpha_i^2}{\sigma^2} \qquad \lambda_b = ar\sum_{j=1}^{a}\frac{\beta_j^2}{\sigma^2} \qquad \lambda_{ab} = r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{(\alpha\beta)_{ij}^2}{\sigma^2}$$

Main Effect A Main Effect B Interaksi AB

Sehingga, dapat ditentukan

$$\Phi = \sqrt{\frac{\lambda}{(v_1 + 1)}}$$

Dimana v_1 adalah degree of freedom penjumlah untuk statistik F_0

PERBANDINGAN TREATMENT

Mengapa dilakukan perbandingan?

- Ketika eksperimen dilakukan untuk menjawab pertanyaan tertentu, semua treatment nya dipilih sehingga perbandingan diantara treatment tersebut akan menjawab pertanyaan tsb.
- Contoh : Apakah pembuatan atmosfer buatan lebih efektif dalam mengurangi pertumbuhan bakteria daripada uap udara dengan pembungkus komersial?
  Hal ini setara dengan pengujian hipotesis :
  $$H_0 : \mu_1 = \frac{1}{3}\left(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3\right)$$

Contrast

- Hipotesis tersebut merupakan contoh dari contrast
- Contrast : bentuk khusus dari fungsi linier pada observasi
- Contrast diantara rataan didefinisikan sebagai
  $$C = \sum_{i=1}^{t} k_i \mu_i = k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + \ldots + k_t\mu_t$$
  Dimana $\sum_{i=1}^{t} k_i = 0$

Estimasi Contrast

- Estimasi Contrast, error standar, estimasi selang kepercayaan, dan pengujian hipotesis contrast dihitung dari data pengamatan
- Contrast c diestimasi oleh :
  $$c = \sum_{i=1}^{t} k_1 \bar{y}_{i\bullet} = k_1\bar{y}_{1\bullet} + k_2\bar{y}_{2\bullet} + \ldots + k_t\bar{y}_{t\bullet}$$
- Sebagai contoh :
  $$c_1 = \bar{y}_{1\bullet} - \frac{1}{3}\left(\bar{y}_{2\bullet} + \bar{y}_{3\bullet} + \bar{y}_{4\bullet}\right) = 7.48 - \frac{1}{3}\left(5.5 + 7.26 + 3.36\right) = 2.11$$

Error Standar Contrast

- Variansi contrast diestimasi oleh :
  $$s_c^2 = s^2\left[\sum_{i=1}^{t}\frac{k_i^2}{r_i}\right] = s^2\left[\frac{k_1^2}{r_1} + \frac{k_2^2}{r_2} + \ldots + \frac{k_t^2}{r_t}\right]$$
  Dimana s^2 = MSE dari ANOVA
- Jika r_i sama, estimator variansi dapat disederhanakan menjadi :
  $$s_c^2 = \frac{s^2}{r}\left[k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_t^2\right]$$

Estimasi Interval untuk Contrast

Estimator selang kepercayaan 100(1-α)% untuk contrast adalah : $c \pm t_{\alpha/2,(N-1)^S c}$

Partisi Sum of Squares

- Sum of Squares yang dihitung pada contrast treatment untuk mengindikasikan seberapa besar variasi dalam data yang dapat dijelaskan oleh contrast tersebut

$$SSC = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t} k_i \bar{y}_{i\bullet}\right)^2}{\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{k_i^2}{r_i}\right)}$$

- Jika semua r_i sama :

$$SSC = r\frac{\left(\sum_{i=1}^{t} k_i \bar{y}_{i\bullet}\right)^2}{\sum_{i=1}^{t} k_i^2}$$

Menguji Hipotesis Contrast

- Analog dengan pengujian hipotesis dalam Completely Randomized Design
- Menggunakan uji-F :

$$F_0 = \frac{MSC}{MSE}$$

- Degree of Freedom MSC adalah 1
- Menggunakan uji-t :

$$t_0 = \frac{c}{s_c}$$

Contrast Orthogonal

- Misalkan ada dua contrast c dan d, dimana :

$$c = \sum_{i=1}^{t} k_i \bar{y}_{i\bullet} = k_1\bar{y}_{1\bullet} + k_2\bar{y}_{2\bullet} + \ldots + k_t\bar{y}_{t\bullet}$$

$$d = \sum_{i=1}^{t} d_i \bar{y}_{i\bullet} = d_1\bar{y}_{1\bullet} + d_2\bar{y}_{2\bullet} + \ldots + d_t\bar{y}_{t\bullet}$$

- Contrast c dan d orthogonal jika

$$\sum_{i=1}^{t}\frac{k_i d_i}{r_i} = \frac{k_1 d_1}{r_1} + \frac{k_2 d_2}{r_2} + \ldots + \frac{k_t d_t}{r_t}$$

Perbandingan Berganda

- Sebagai contoh peneliti ingin menguji hipotesis berikut ini :
  1. Apakah pembuatan atmosfir buatan lebih efektif dalam mengurangi pertumbuhan bakteri daripada uap air pada pembungkus komersial?
  2. Apakah gas lebih efektif dalam mengurangi pertumbuhan bakteri daripada vakum total?
  3. Apakah CO_2 murni lebih efektif daripada campuran CO, O_2, dan N dalam mengurangi pertumbuhan bakteri?

- Hipotesa tersebut setara dengan pengujian apakah :
  1. $C_1 = \mu_1 - \frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) = 0$
  2. $C_2 = \mu_2 - \frac{1}{2}(\mu_3 + \mu_4) = 0$
  3. $C_3 = \mu_3 - \mu_4 = 0$

Tingkat Error pada Perbandingan Berganda

- Jika kita ingin menguji ketiga contrast tersebut secara bersamaan, resiko atau α menjadi lebih besar (mengapa?)
- Analog dengan perbandingan berganda, jika kita ingin membuat perbandingan secara berpasangan (pairwise) diantara p buah rataan treatment. Maka terdapat $\frac{p(p-1)}{2}$ perbandingan pairwise.
- Jika diberikan p=4, dengan kemungkinan pengujian hingga enam kali, kita dapat menggunakan bentuk lain dari error tipe I berdasarkan resiko yang terakumulasi ditambah dengan keluarga pengujian dengan pertimbangan tersebut.

Mengevaluasi Tingkat Error Maksimum

- Batas atas error tipe I eksperimen, mengasumsikan bahwa setiap perbandingan bersifat independen, diberikan oleh distribusi binomial yaitu :

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\alpha_\upsilon^x\left(1-\alpha_\upsilon^x\right)^{n-x}$$

- Probabilitas terjadinya error tipe I adalah :

$$P(x=0) = \left(1-1-\alpha_\upsilon^x\right)^n$$

- Probabilitas terjadi error tipe I sekurang-kurangnya sekali adalah

$$\alpha_E = 1-(1-\alpha_C)^n$$

- Hubungan

$$\alpha_C = 1-(1-\alpha_E)^{1/n}$$

Penarikan Kesimpulan Statistik Secara Simultan

- Tipe contrast yang lebih sering digunakan oleh peneliti adalah ::
  - contrast yang terencana (planned contrast)
  - contrast polinomial yang tegak lurus (orthogonal polinomial contrast)
  - Perbandingan berganda dengan treatment terbaik
  - Perbandingan berganda dengan treatment kontrol
  - Perbandingan keseluruhan secara berpasangan (all pairwise comparison)
- Selang Kepercayaan secara Simultan :
  - Ketidaksamaan Benferroni : $\alpha_E < n\alpha_C$
  - Statistik Scheffe : $S(\alpha_E) = s_C\sqrt{(t-1)F_{\alpha_E(t-1)\nu}}$