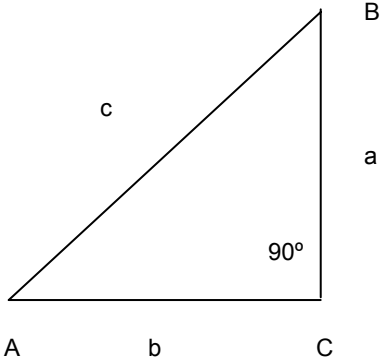


Triángulos Notables y Funciones Trigonómicas

Algunos triángulos se denominan Notables debido a que es fácil obtener una relación entre sus lados. Éstos principalmente son rectángulos, es decir, que tienen un ángulo igual a 90° .



A b C
opuesto.

En estos casos, los triángulos se denominan por los ángulos distintos al de 90° , por ejemplo 45° - 45° , 30° - 60° , etc.

Establecemos la convención de que los ángulos serán denominados con letras mayúsculas y los lados con letras minúsculas.

Asimismo, el lado "a" se opone al ángulo A e igualmente con los demás.

Lo que toca es establecer las relaciones entre los lados de éstos triángulos.

Para evitar confusiones debe recordarse que a una menor amplitud de ángulo le corresponde una menor longitud de lado

Triángulo 45° - 45°

En este triángulo se verifica que si la hipotenusa $\sqrt{2}$, los catetos serán ambos 1.

Triángulo 30° - 60°

En este triángulo se verifica que si la hipotenusa es 2, el cateto opuesto a 30° será 1 y el opuesto a 60° será $\sqrt{3}$.

Triángulo 37° - 53° (aproximadamente)

Se verifica que si la hipotenusa es 5, el cateto opuesto a 37° es 3 y el opuesto a 53° es 4.

Triángulo 15° - 75°

En este triángulo se verifica que si la hipotenusa es 4, el cateto opuesto a 15° será $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ y el opuesto a 75° será $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

Funciones trigonométricas

Nos ayudan también a relacionar los lados y ángulos:

Sen = cateto opuesto / hipotenusa

Cos = cateto adyacente / hipotenusa

Tan = cateto opuesto / cateto adyacente

Cot = $1 / \text{Tan}$ = cateto adyacente / cateto opuesto

Sec = $1 / \text{Cos}$ = hipotenusa / cateto adyacente

Csc = $1 / \text{sen}$ = hipotenusa / cateto opuesto

Donde el cateto opuesto se refiere al lado opuesto al ángulo de referencia y el cateto adyacente se refiere al cateto contiguo al ángulo.

Ejemplo

En la figura anterior, el lado "a" sería el cateto opuesto al ángulo A y el cateto "b" sería el adyacente. Por supuesto "c" es la hipotenusa.

Estableceremos ahora el procedimiento para hallar estas funciones trigonométricas ayudándonos en los triángulos notables.

- Antes que nada debemos dibujar el triángulo rectángulo.
- Deberemos ahora ubicar los ángulos dentro de él.
- Colocar en cada lado (según corresponda) la longitud de los mismos.
- Aplicar la definición de cada función trigonométrica.

Ejemplo

Sen 45°

1. Dibujamos el triángulo rectángulo (utilizaremos el dibujo de arriba).
2. Ubicamos los ángulos dentro de él (A=45°, B=45°, C=90°)
3. Colocamos la longitud de los lados: $c=\sqrt{2}$, $a=1$, $b=1$
4. Aplicamos la definición de la función: $\text{sen} = \text{Cat. Opuesto} / \text{hipotenusa} = a/c = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2} / 2$.

Cos 30°

1. Dibujamos el triángulo rectángulo (utilizaremos el dibujo de arriba).
2. Ubicamos los ángulos dentro de él (A=30°, B=60°, C=90°)
3. Colocamos la longitud de los lados: $c=2$, $a=1$, $b=\sqrt{3}$
4. Aplicamos la definición de la función: $\text{cos} = \text{Cat. Adyacente} / \text{hipotenusa} = b/c = \sqrt{3} / 2$.

Comentario

En este ejercicio tenemos tres lados 2, 1 y $\sqrt{3}$.

Si seguimos la recomendación de: a mayor ángulo le corresponde un mayor lado opuesto tendremos que siendo 90° el mayor de los tres ángulos entonces le correspondería a la hipotenusa ser 2.

Siendo 30° el menor de los tres ángulos entonces le correspondería al cateto opuesto a éste ser 1.

Otras aplicaciones

Con lo anterior podemos formar combinaciones que nos permitan hallar diversos valores tales como $\text{sen}(2x)$, $\text{cos}(x/2)$, $\text{tan}(x+y)$.

Para ello podría ser de utilidad la tabla siguiente:

	Sen(X+Y)	
Cos(X+Y)	CosY	CosX
	SenX	SenY

Para la función seno la tabla debe leerse de forma vertical, para el coseno de forma horizontal.

$$\text{sen}(X+Y) = \text{senX} \cos Y + \text{CosX} \text{senY}.$$

Como vemos el primer factor corresponde a la primera columna de la tabla debajo de Seno mientras que el segundo término corresponde a la segunda columna.

$$\text{cos}(X+Y) = \text{cosX} \cos Y - \text{senX} \text{senY}.$$

En este caso la lectura será de forma horizontal.

Las expresiones completas serían:

$$\text{sen}(X+Y) = \text{senX} \cos Y + \text{CosX} \text{senY}.$$

$$\text{sen}(X-Y) = \text{senX} \cos Y - \text{CosX} \text{senY}.$$

$$\text{cos}(X+Y) = \text{cosX} \cos Y - \text{senX} \text{senY}.$$

$$\text{cos}(X-Y) = \text{cosX} \cos Y + \text{senX} \text{senY}.$$

Ejemplo

Hallar $\text{sen}15^\circ$

1. Tratamos de obtener el ángulo como la suma o resta de otros conocidos: $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$
2. Dibujamos los triángulos notables correspondientes a los dos ángulos elegidos y establecemos la relación de sus lados.

3. Desarrollamos la función trigonométrica como la suma o resta de ángulos según corresponda: $\text{sen}15 = \text{sen}(45-30) = \text{sen}45 \cos30 - \cos45 \text{sen}30$.
4. Reemplazamos los valores de las funciones para los ángulos seleccionados apoyándonos en los triángulos notables construidos. $\text{Sen}15 = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) - (\sqrt{2}/2)(1/2)$.
5. Reducimos y/o simplificamos según corresponda. $\text{Sen}15 = (\sqrt{2}/4)(\sqrt{3} - 1)$.

Ángulo doble

Si el ángulo doble es $2X$, cada ángulo será X .

$$\begin{aligned}\text{Sen}(2X) &= \text{Sen}(X+X) = \text{sen}X \cos X + \cos X \text{sen}X = 2\text{sen}X \cos X \\ \text{Cos}(2X) &= \text{Cos}(X+X) = \cos X \cos X - \text{sen}X \text{sen}X = \cos^2 X - \text{sen}^2 X\end{aligned}$$

Ángulo mitad

Para ello nos apoyamos en la siguiente identidad trigonométrica: $\text{sen}^2 Y + \cos^2 Y = 1$
 $\text{Cos}(2Y) = \cos^2 Y - \text{sen}^2 Y = \cos^2 Y - (1 - \cos^2 Y) = 2 \cos^2 Y - 1$

Despejando $\cos Y$ obtenemos:

$$\cos Y = [(1 + \cos(2Y))/2]^{1/2}$$

Si $Y=X/2$ obtenemos finalmente:

$$\text{Cos}(X/2) = [(1 + \cos X)/2]^{1/2}$$

Por un procedimiento similar obtenemos:

$$\text{Sen}(X/2) = [(1 - \cos X)/2]^{1/2}$$