Sumatorias

Definamos como sumatoria a la suma de un conjunto finito de puntos. Cuando el conjunto de puntos es infinito entonces lleva el nombre de Serie.

A continuación se listan las principales fórmulas y propiedades:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \quad \text{(Propiedad Telescópica)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} R^k = \frac{R^{n+1} - 1}{R - 1}, \sum_{k=1}^{n} R^k = \frac{R(R^n - 1)}{R - 1}, \sum_{k=1}^{n} R^{k-1} = \frac{R^n - 1}{R - 1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$$

Ejemplos

$$\sum_{k=1}^{5} k = \frac{5(5+1)}{2} = 15$$

$$\sum_{k=3}^{8} k = \sum_{k=1}^{8} k - \sum_{k=1}^{2} k = \frac{8(8+1)}{2} - \frac{2(2+1)}{2} = 33$$

$$\sum_{k=1}^{4} 2(k^2+1) = 2\sum_{k=1}^{4}(k^2+1) = 2\left[\sum_{k=1}^{4} k^2 + \sum_{k=1}^{4} 1\right] = 2\left[\frac{4(4+1)(2(4)+1)}{6} + 4(1)\right] = 68$$

$$\sum_{k=1}^{40} (3k)^2 = 9\sum_{k=1}^{40} k^2 = 9.\frac{40(40+1)(2(40)+1)}{6} = 199260$$

$$\sum_{k=1}^{10} k(k+1) = \sum_{k=1}^{10}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10(10+1)(2(10)+1)}{6} + \frac{10(10+1)}{2} = 385 + 55 = 440$$

Hallar la fórmula para la suma de los primeros “n” número pares.

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Hallar la fórmula para la suma de los primeros “n” números impares.

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = n^2$$

Hallar la fórmula para:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

(En este ejemplo se ha utilizado la propiedad telescópica)

$$\sum_{k=1}^{4} 2^k = \frac{2(2^4-1)}{2-1} = 30$$

$$\sum_{k=1}^{4} 3^{-k} = \sum_{k=1}^{4} (1/3)^k = \frac{(1/3)((1/3)^4-1)}{\frac{1}{3}-1} = \frac{40}{81}$$

Cambio de índice

A veces es útil apoyarse en un cambio de índice para realizar determinadas sumatorias.

Sea la siguiente sumatoria:

$\sum_{k=1}^{n}(k+1)$ Supongamos ahora que k + 1 = j, es decir, k= j – 1.

La sumatoria anterior puede expresarse como: $\sum_{j=2}^{n+1} j$ La Solución sería:

$\sum_{j=2}^{n+1} j = \sum_{j=1}^{n+1} j - \sum_{j=1}^{1} j = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ siendo el mismo resultado que el anterior.

Ejemplo

$$\sum_{k=1}^{n}(k+2)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k^2+4k+4) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + 4n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2} + 4n$$, pero:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+2)^2 = \sum_{j=3}^{n+2} j^2 = \sum_{j=1}^{n+2} j^2 - \sum_{j=1}^{2} j^2 = \frac{(n+2)(n+3)(2n+4+1)}{6} - 1 - 4 = \frac{(n+2)(n+3)(2n+5)-30}{6}$$

Encontraremos que ambas expresiones son iguales a: $n(2n^2 + 15n + 37)/6$

Otros ejemplos

Hallar la cantidad de términos de la progresión sabiendo que 1 + 2 + 3 + 4 + …..+ n es 36

$$\sum_{k=1}^{n} k = 36, \frac{n(n+1)}{2} = 36, n(n+1) = 72, n = 8$$

Ejemplo

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+2)}$$

Ejemplo

Hallar la suma de los 7 primeros términos de la progresión geométrica: 3, 6, 12, 24, 48………..

El término n-ésimo será: $An = A_1R^{n-1} = 3(2)^{n-1}$. Entonces:

$$\sum_{k=1}^{7} A_k = \sum_{k=1}^{7} 3(2)^{k-1} = 3\sum_{k=1}^{7} 2^{k-1} = \frac{3(2^7-1)}{2-1} = 381$$