

Sucesiones

Las sucesiones son listados de números ordenados bajo algún criterio.

Ejemplo

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

La sucesión anterior representan a los números naturales ordenados en forma ascendente.

En este capítulo veremos algunas reglas de formación y ejercicios prácticos. En líneas generales se recomienda al lector practicar con diversas reglas de formación de forma que mejore su capacidad de identificación en problemas futuros.

Para complementar el presente estudio, recomendamos ver las [progresiones](#) aritméticas y geométricas analizadas con mayor amplitud en otro apartado.

Las series numéricas son la suma de los términos de una Sucesión.

Sea $a_n = f(n)$ el término general de una sucesión, es decir, el término n -ésimo está en función de su posición dentro de la sucesión.

Las expresiones que dan un valor a partir de otro anterior se llaman fórmulas de recurrencia.

Ejemplo

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

Una de las sucesiones más famosas es la de Fibonacci, cuyas características son:

- La sucesión empieza con dos unos.
- Cualquier término de la sucesión se obtiene de sumar los dos anteriores. Por ejemplo, el noveno término de la sucesión se construye sumando el séptimo y el octavo.
- La sucesión es infinita.

Bajo esas condiciones, la sucesión de Fibonacci es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229,...

La fórmula de recurrencia es: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Sucesión Aritmética

Vista con detalle en el Capítulo Progresiones, tiene la siguiente regla de formación:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Analizando la expresión anterior, podremos afirmar que una sucesión es aritmética cuando la resta de dos números consecutivos cualesquiera siempre es constante. Este valor se denomina razón aritmética o diferencia.

Ejemplo

Determinar si la sucesión indicada es aritmética y hallar su regla de formación: 2, 5, 8, 11, 14,...

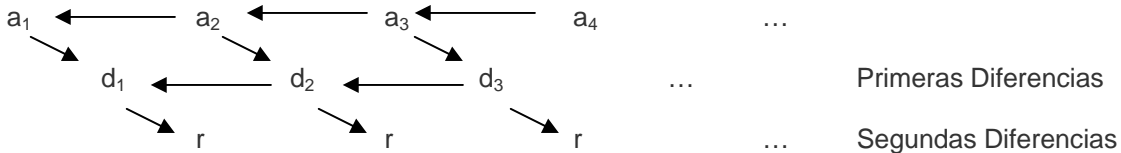
Verificamos que: $5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = \dots = 3 = d$. Por tanto, se trata de una sucesión aritmética.

La regla de formación será: $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$.

Sucesión Aritmética de segundo orden

El método de las diferencias consiste en efectuar diferencias (restas) entre términos consecutivos de una sucesión.

Si los resultados son diferentes se procede nuevamente a efectuar la diferencia entre los resultados consecutivos y así sucesivamente. Lo que se trata de hacer es que, en algún momento, las diferencias sean constantes.



El término general viene dado por: $a_n = an^2 + bn + c$
Trabajando en esta expresión, obtenemos que:

$$a_n = (r/2)(n - 1)^2 + (d_1 - r/2)(n-1) + a_1$$

La expresión anterior puede simplificarse si la sucesión empieza en a_0 , siendo:

$$a_n = (r/2)n^2 + (d_0 - r/2)n + a_0$$

Notar que en este último caso el término n -ésimo se obtendrá cuando la posición sea $n - 1$ (por ejemplo, el quinto término se obtendrá para $n=4$).

Ejemplo

Hallar el término 20 en la siguiente sucesión: 5, 8, 15, 26, 41, ...

Las primeras diferencias son: 3, 7, 11, 15, ...

Las segundas diferencias son: 4, 4, 4, ... Por tanto se trata de una sucesión aritmética de segundo orden. Identificando términos: $r = 4$, $d_1 = 3$, $a_1 = 5$. Reemplazando en la expresión general obtenemos: $a_n = (4/2)(n - 1)^2 + (3 - 4/2)(n - 1) + 5 = 2(n - 1)^2 + n + 4$.

El término 20 será: $a_{20} = 2(19)^2 + 20 + 4 = 746$.

Sucesión Geométrica

Vista con detalle en el Capítulo Progresiones, tiene la siguiente regla de formación:

$$a_n = a_1 R^{n-1}$$

Analizando la expresión anterior, podremos afirmar que una sucesión es geométrica cuando el cociente de dos números consecutivos cualesquiera siempre es constante. Este valor se denomina razón geométrica.

Ejemplo

Determinar si la sucesión indicada es geométrica y hallar su regla de formación: 2, 6, 18, 54, 162...

Verificamos que: $6/2 = 18/6 = 54/18 = 162/54 = \dots = 3 = R$. Por tanto, se trata de una sucesión geométrica.

La regla de formación será: $a_n = 2(3)^{n-1}$.

Sucesiones alternadas

Son aquellas de la forma: $a_n = (-1)^{f(n)}g(n)$, donde $f(n)$ y $g(n)$ son funciones de "n".

Ejemplo

-5, 8, -15, 26, -41, ...

Como vemos, hay una similitud con la sucesión aritmética de segundo orden, excepto por el signo alternado de los términos. Como los términos impares son negativos, $f(n)$ sería $(-1)^n$. Si los términos impares fueran positivos, $f(n)$ sería $(-1)^{n+1}$.

La expresión general tiene la forma: $a_n = (-1)^n [2(n-1)^2 + n + 4]$

Los siguientes ejercicios serán para familiarizarse con diversas reglas de formación y establecer las "características" de las mismas. En todos los casos se hallaron los 6 primeros términos.

Ejemplos

$A_n = n^2$	1, 4, 9, 16, 25, 36
$A_n = n^2 + n$	2, 6, 12, 20, 30, 42
$A_n = n^2 - n$	0, 2, 6, 12, 20, 30, 42
$A_n = 2n^2$	2, 8, 18, 32, 50, 72
$A_n = 2(n+1)^2$	8, 18, 32, 50, 72, 98
$A_n = n^2 + 1$	2, 5, 10, 17, 26, 37
$A_n = 2^n$	2, 4, 8, 16, 32, 64
$A_n = n2^n$	2, 8, 24, 64, 160, 384
$A_n = (n+1)2^n$	4, 12, 32, 80, 192, 448
$A_n = n2^{n+1}$	2, 16, 48, 128, 320, 768
$A_n = 2^{n+1}$	4, 8, 16, 32, 64, 128
$A_n = (-1)^n n^2$	-1, 4, -9, 16, -25, 36
$A_n = (-1)^{n+1} n^2$	1, -4, 9, -16, 25, -36
$A_n = (n+1)/n^2$	2, 3/4, 4/9, 5/16, 6/25, 7/36
$A_n = n/(n+1)^2$	1/4, 2/9, 3/16, 4/25, 5/36, 6/49
$A_n = (n^2 + 1)/n^2$	2, 5/4, 10/9, 17/16, 26/25, 37/36
$A_n = n!$	1, 2, 6, 24, 120, 720
$A_n = (n-1)!$	1, 1, 2, 6, 24, 120
$A_n = (n!)^2$	1, 4, 36, 576, 14400, 518400
$A_n = 2^{n!}$	2, 4, 64, 16777216, ...
$A_n = 2^{(n-1)!}$	2, 2, 4, 64, 16777216, ...

En los siguientes ejercicios asumir $a_1 = 1$

Ejemplos

$A_{n+1} = a_n + 3$	1, 4, 7, 10, 13, 16	$1 + 3(n-1) = 3n - 2$
$A_{n+1} = 3a_n$	1, 3, 9, 27, 81, 243	3^{n-1}
$A_{n+1} = na_n$	1, 1, 2, 6, 24, 120	$(n-1)!$
$A_{n+1} = 2(a_n)^2$	1, 2, 8, 128, 32768,	$2^{f(n)} = \frac{2^{2^{n-1}}}{2}$
$A_{n+1} = (a_n + 1)^2$	1, 4, 25, 676, 458329, 2.1×10^{11}	$[f(n)]^2 = ?$