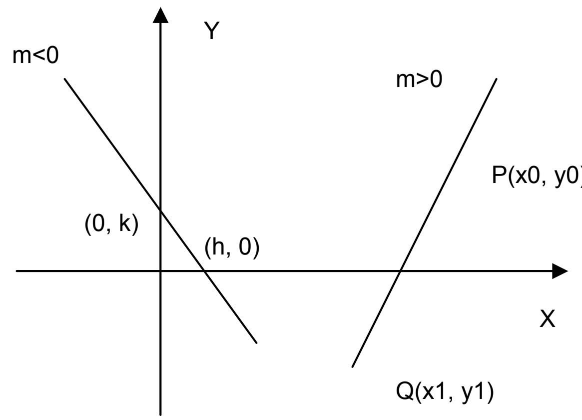
Caso Especial. Rectas perpendiculares.

Para dos rectas con pendientes m_1 y m_2, perpendiculares entre sí, se verifica que:

$m_1 \cdot m_2 = -1$

Es decir, una es la inversa negativa de la otra.



Ejemplos
Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (3, 4) y (1, 2).

Aplicamos la fórmula de pendiente y obtenemos:

$$m = \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$$

Hallar la pendiente de la recta perpendicular a: y = 3x + 2
La pendiente de la recta dada es m=3
La pendiente de la recta perpendicular es la inversa negativa: m_2 (3) = -1, m_2 = -1/3

Puntos de corte
Los que son comunes a la recta y a los ejes coordenados tienen la forma:
En el eje Y (0, k). Obtenemos este punto reemplazando x=0 en la ecuación de la recta.
En el eje X (h, 0). Obtenemos este punto reemplazando y=0 en la ecuación de la recta.

Cuando trabajamos con dos rectas en el plano pueden darse los siguientes casos:

- Las rectas son paralelas. En ese caso las pendientes son iguales. $m_1 = m_2$
- Las rectas son idénticas. En ese caso las ecuaciones son idénticas.
- Las rectas se cortan en un punto.

Con las ecuaciones de las rectas debemos proceder igual que en un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Resolviendo el sistema obtendremos el punto de corte.

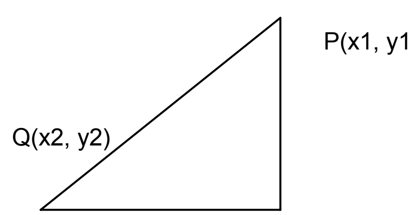
Ejemplo
Hallar la intersección de la recta y=x con y= 3x – 1.
Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas y deberemos resolverlo por cualquiera de los métodos conocidos (igualación, sustitución, reducción o matricial).

Reemplazando y=x en la ecuación de la segunda recta: x = 3x – 1, 2x = 1, x = ½. Por tanto, y = ½.
El punto de corte o intersección es (½, ½).

<u>Distancia entre dos puntos</u>

La distancia entre los puntos P y Q, se establece como:

$$dPQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Notar que la distancia entre dos puntos equivale a hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde el cateto vertical es el cambio en Y y el cateto horizontal es el cambio en X.

Ejemplo
Hallar la distancia entre los puntos (1,2) y (4,5)

Reemplazando en la fórmula tenemos: $d = [(4-1)^2 + (5-2)^2]^{1/2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Punto Medio
Las coordenadas del punto medio de un segmento cuyos extremos son (x_0, y_0) (x_1, y_1) está dado por:

$$M = [(x_0 + x_1)/2, (y_0 + y_1)/2]$$

Ejemplo
Hallar el punto medio del segmento limitado por A(1, 2) y B(4,-5)

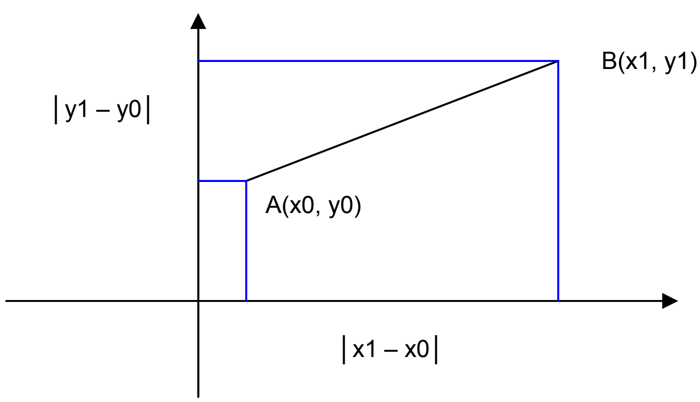
Reemplazando en la fórmula tenemos: M = [(1+4)/2, (2-5)/2] = (5/2, -3/2)

Repartir un segmento en partes proporcionales

Notar que si proyectamos el segmento sobre los ejes coordenados podemos aplicar la teoría de proporcionalidades en segmentos. La longitud de esas proyecciones serán $|x_1-x_0|$, $|y_1-y_0|$.

Plantearemos el siguiente procedimiento:

- Ubicar los puntos y establecer sus posiciones relativas (izquierda/derecha, arriba/abajo)
- Dividir las proyecciones sobre los ejes coordenados en las partes requeridas.
- Sumar o restar los valores a la coordenada de referencia.



Ejemplo
Hallar las coordenadas del punto más cercano a A que resulta de dividir el segmento AB en tres partes iguales, donde A(1, 2) y B(4, 8).

Ubicamos los puntos en el plano y establecemos como referencia al punto A. El cambio en X es │4-1│=3. Este cambio se divide en 3 partes, cada parte es: 3/3 =1. El cambio en Y es │8-2│=6. Este cambio se divide en 3 partes, cada parte es: 6/3=2. Los puntos buscados se encuentran arriba y a la derecha de la referencia A(1, 2), por tanto las partes halladas deben sumarse: $M_1 = (x_A + 1, y_A + 2) = (1+1, 2+2) = (2, 4)$.

Las coordenadas del siguiente punto serán: $M_2 = [x_A + 2(1), y_A + 2(2)] = (1+2, 2+4) = (3, 6)$.
El enunciado del ejemplo es equivalente a indicar que el segmento es dividido en partes cuya relación es de 2:1, por tanto hay que dividir el segmento en 2+1=3 partes. Si fuera en relación de 4:3 hay que dividirlo en 4+3=7 partes. La primera coordenada se hallará tomando las 4 primeras partes.

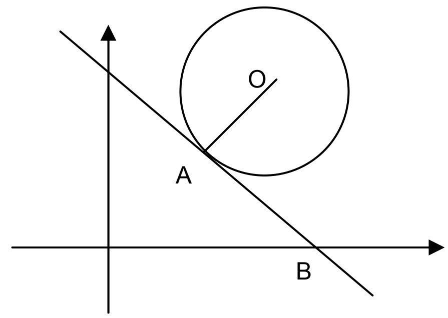
Si el punto de referencia hubiese sido B, en vez de sumar hubiésemos tenido que restar.

Distancia de un punto a una recta

Supongamos que deseamos hallar la distancia que hay desde el punto (x_0, y_0) hacia la recta $ax + by + c = 0$.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La distancia de un punto (O) a una recta corresponde a la longitud del segmento perpendicular a la recta dada que pasa por el punto indicado. Como vemos, no es necesario encontrar el punto en la recta (A).



Ejemplo
Hallar la distancia del punto (2,1) a la recta y = 2x + 5

Primero debemos poner la recta en la forma establecida:
$-2x + y - 5 = 0$
Utilizamos la fórmula: $|(-2)(2)+(1)-5| / [(-2)^2 + (1)^2]^{1/2} =$
$|-4+1-5| / 5^{1/2} = 8/\sqrt{5}$

Nota: la recta pudo haberse escrito como: $2x - y + 5 = 0$. El resultado es el mismo.

Ejemplo
Hallar la longitud de las 3 alturas de un triángulo sabiendo que sus vértices tienen las siguientes coordenadas: A(0,0) B(3,0) C(0,4)

Para el vértice A, tenemos que el lado opuesto es BC, la ecuación de la recta que lo contiene es:
$y = (-4/3)(x-3)$
La expresión de la recta es: $4x+3y-12 = 0$
Reemplazando tenemos: $|(4)(0)+(3)(0)-12| / [(4)^2 + (3)^2]^{1/2} = |-12| / \sqrt{(25)} = 12/5$

Graficando los puntos vemos que el triángulo ABC es rectángulo, recto en A, para los vértices B y C solamente tenemos que hallar la longitud de los catetos, que serán 3 y 4 respectivamente.

Ejemplo
Hallar el punto equidistante a otros tres dados, A(4,0), B(0,4), C(6,6)

El punto buscado será el centro de una circunferencia que pasa por los tres puntos, aplicaremos la definición de mediatriz para hallar el punto dado:
Punto medio de AB: $[(4+0)/2, (0+4)/2] = (2,2)$
Punto medio de BC: $[(0+6)/2, (4+6)/2] = (3,5)$
Punto medio de AC: $[(4+6)/2, (0+6)/2] = (5,3)$
Pendiente de AB: $(4-0)/(0-4) = -1$.Pendiente de la perpendicular a AB: 1
Pendiente de BC: $(6-4)/(6-0) = 1/3$. Pendiente de la perpendicular a BC: -3
Pendiente de AC: $(6-0)/(6-4) = 3$. Pendiente de la perpendicular a AC: -1/3
La ecuación de la perpendicular a AB: $y - 2 = 1(x-2)$, $y = x$
La ecuación de la perpendicular a BC: $y - 5 = -3(x-3)$, $y = -3x + 14$
La ecuación de la perpendicular a AC: $y - 3 = (-1/3)(x-5)$, $y = -x/3 + 14/3$
De las 2 primeras ecuaciones tenemos: $x = -3x + 14$, $x = 7/2$, $Y = 7/2$

Este ejercicio pudo resolverse aplicando distancia entre dos puntos: Sea el punto buscado D(x,y)
$dDA = [(x-4)^2 + (y-0)^2]^{1/2}$, $dDB = [(x-0)^2 + (y-4)^2]^{1/2}$, $dDC = [(x-6)^2 + (y-6)^2]^{1/2}$, dDA = dDB = dDC, pero la solución es más compleja.

<u>Ángulo entre dos rectas</u>

Recordemos que la pendiente de una recta es la inclinación de la misma, y es igual a la tangente del ángulo que abarca respecto al eje X.

$$m = tg\alpha$$

Sean α y β los ángulos de dos rectas cualesquiera respecto al eje X. El ángulo comprendido entre ellas será $\alpha - \beta$.

Por tanto: $tg(\alpha - \beta) = tg\Omega = (tg\alpha - tg\beta)/(1 + tg\alpha\, tg\beta) = (m_1 - m_2)/(1 + m_1 m_2)$
El ángulo buscado se encontrará hallando el arco tangente del valor anterior (Ω = arctg)
Debe observarse que cuando se intersectan dos rectas se forman dos ángulos suplementarios.

Ejemplo
Hallar el ángulo comprendido entre las rectas $y = x$, $y = 2x + 3$

$m_1 = 1$, $m_2 = 2$
$tg\Omega = (1 - 2)/(1 + 1(2)) = -1/3$, $\Omega = arctg(-1/3) = 18{,}43º$. El otro ángulo será $180º - 18{,}43º = 161{,}57º$

Ejemplo
Hallar la ecuación de la recta que pase por (1, 2) y forme un ángulo de 37º con la recta $y = x + 5$

$\Omega = 37º$, $tg(37) = ¾$. $m_2 = 1$. Reemplazando tenemos: $tg(37) = ¾ = (m_1 - 1)/(1 + m_1(1))$
Despejando tenemos: $m_1 = 7$. La ecuación de la recta será: $y - 2 = 7(x - 1)$, $y = 7x - 5$.

Ejemplo
Construir un triángulo que cumpla con las siguientes condiciones:
Vértice A: punto medio de (3, 5) (-1, -3)
Vértice B: pertenece a la recta $3y = -4x + 27$, tal que AB es perpendicular a la recta.
El lado AC forma un ángulo de 53º con CB.

Punto medio entre (3, 5) y (-1, -3): $A=[(3-1)/2, (5-3)/2] = (1, 1)$
Pendiente de la recta = -4/3. Pendiente de la perpendicular = 3/4, ecuación de la recta perpendicular: $y-1=(3/4)(x-1)$, $4y - 4 = 3x - 3$, $4y = 3x + 1$.

Trabajando con las dos rectas tenemos: $3(3x+1)/4 = -4x + 27$, $9x + 3 = -16x + 108$,
$25x = 105$, $x = 21/5$, $y=(21/5(3) + 1)/4 = 17/5$. El punto B es (21/5, 17/5).

Ángulo entre 2 rectas: $tg\,\Omega = (m_1 - m_2)/(1 + m_1m_2)$, $tg53 = (m_1+ 4/3)/(1-4m_1/3)$,
$4/3 = (m_1 + 4/3)/(1 - 4m_1/3)$, $4 - 16m_1/3 = 3m_1 + 4$, $m_1 = 0$, el ángulo es 0º ó 180º.

Notar que podemos sumar o restar 53º al ángulo formado por la recta $3y = -4x + 27$, sin embargo se ha optado elegir sumarlo porque correspondería con la ubicación del punto A, es decir el ángulo que forma AC es mayor que el ángulo de BC, por ello hemos elegido $m_2= -4/3$.

La ecuación de la recta que pasa por AC es $y - 1 = 0(x - 1)$, $y = 1$.
Lo reemplazamos en la ecuación de la recta que pasa por BC y tenemos, $3(1) = -4x + 27$, $x = 6$.
Las coordenadas del punto C son (6, 1).