

Progresiones

Vamos a revisar dos posibilidades en las Progresiones: Aritmética (PA) y Geométrica (PG).

Una progresión será aritmética cuando haya una diferencia constante e igual entre dos términos consecutivos cualesquiera de la progresión.

Ejemplo

2, 5, 8, 11, 14

Si tomamos dos términos consecutivos cualquiera veremos que siempre existe la misma diferencia entre ellos. En este caso es 3. Este valor se conoce como Razón Aritmética.

La Forma general de una progresión aritmética es: $A_n = A_1 + (n-1)D$

Donde:

A_n Término n-ésimo

A_1 Primer término

n Término "n" de la progresión

D Razón Aritmética (RA) o Diferencia

Para cualquier término "n" la razón aritmética puede hallarse de la siguiente forma:

$$D = (A_n - A_1) / (n-1)$$

Ejemplo

Hallar el octavo término de una progresión aritmética si el tercer término es 8 y el cuarto es 11.

Como tenemos dos términos consecutivos, la RA será la diferencia entre ellos: $11 - 8 = 3$

Reemplazando en la expresión general para: $n=3$, $D=3$, $A_3=8$ tenemos:

$$A_3 = A_1 + (n-1)D, 8 = A_1 + (3-1)(3), A_1 = 2$$

Por tanto, la expresión general queda como sigue: $A_n = 2 + (n-1)D$

$$\text{Para } n=8 \text{ tenemos: } A_8 = 2 + (8-1)(3) = 23$$

Ejemplo

Hallar la suma del quinto y octavo término de una PA cuya razón es 4 y el primer término es 3.

La lógica nos diría que debemos hallar el quinto término, luego el octavo término, y posteriormente sumarlos: $A_5 = 3 + 4(4) = 19$, $A_8 = 3 + 7(4) = 31$, $A_5 + A_8 = 50$

Sin embargo, podemos usar la expresión general y obtenemos: $A_5 + A_8 = A_1 + 4D + A_1 + 7D = 2A_1 + 11D = 2(3) + 11(4) = 50$. Obtenemos la misma solución.

Ejemplo

Hallar la diferencia entre el décimo término y el quinto para una PA cuya razón es 4 y el primer término es 3.

$$\text{Igual que el anterior: } A_{10} = 3 + 9(4) = 39, A_5 = 3 + 4(4) = 19, A_{10} - A_5 = 39 - 19 = 20$$

Sin embargo, también podemos trabajar con la expresión general como sigue: $A_{10} - A_5 = (A_1 + 9D) - (A_1 + 4D) = 5D = 5(4) = 20$.

Ejemplo

Hallar el primer término de una PA cuya razón es 4 si la suma del quinto y octavo término es 50.

$$50 = A_5 + A_8 = A_1 + 4D + A_1 + 7D = 2A_1 + 11D = 2A_1 + 11(4), 2A_1 = 50 - 44, A_1 = 3$$

Una progresión será geométrica cuando haya un cociente constante e igual entre dos términos consecutivos cualesquiera de la progresión. Es decir, siempre obtendremos el mismo resultado al dividir dos números consecutivos de la Progresión.

Ejemplo

2, 6, 18, 54, 162

Si tomamos dos términos consecutivos cualquiera veremos que siempre existe el mismo cociente entre ellos. En este caso es 3. Este valor se conoce como Razón Geométrica.

La Forma general de una progresión geométrica es: $A_n = A_1 R^{n-1}$

Donde:

A_n Término n-ésimo

A_1 Primer término

n Término "n" de la progresión

R Razón Geométrica (RG)

Para cualquier término "n" la razón geométrica puede hallarse de la siguiente forma:

$$R = (A_n / A_1)^{1/(n-1)}$$

Ejemplo

Hallar el quinto término de una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y la RG es 3.

Utilizamos la expresión general y tenemos: $A_5 = 2 (3)^{5-1} = 2(3)^4 = 162$.

Ejemplo

Hallar el cociente entre el quinto término y el tercero de una progresión geométrica si la RG es 3.

La lógica nos dice que deberíamos hallar el quinto término, luego el tercero y posteriormente dividirlos, sin embargo, notamos que nos faltaría conocer el primer término (A_1) para esto.

Utilizamos la expresión general: $A_5 = A_1 R^4$, $A_3 = A_1 R^2$, $A_5 / A_3 = (A_1 R^4) / (A_1 R^2) = R^2 = 3^2 = 9$.

Ejemplo

Hallar la suma del segundo término y el quinto término de una PG cuyo primer término es 2 y la RG es 3.

$$A_2 = 2(3) = 6, A_5 = 2(3)^4 = 162, A_2 + A_5 = 168$$

Podemos usar la expresión general y tenemos: $A_2 + A_5 = A_1 R + A_1 R^4 = A_1 R (1 + R^3) = 2(3)(1+27) = 168$.

Ejemplo

Hallar el primer término de una PG si la razón es 3 y la suma del segundo y quinto término es 168.

$$168 = A_2 + A_5 = A_1 R + A_1 R^4 = A_1 R (1 + R^3) = A_1 (3)(1+27) = 84A_1, A_1 = 168/84 = 2.$$

Suma de términos

Sea la PA: $A_n = A_1 + (n-1)D$. La suma de los n primeros términos es: $S_n = nA_1 + n(n-1)D/2 = (A_1 + A_n)n/2$

Sea la PG: $A_n = A_1 R^{n-1}$. La suma de los n primeros términos es: $S_n = A_1(R^n - 1)/(R - 1) = (R A_n - A_1)/(R - 1)$