Polígonos Regulares

Un polígono regular es aquel que tiene todos sus lados iguales.
Bajo esta premisa pueden cumplirse las siguientes relaciones:

Ángulos
Todos los ángulos interiores del polígono son iguales. La cantidad de ellos es igual a la cantidad de lados del polígono.

$$m\angle A = m\angle B = ...$$

El valor de cualquiera de ellos puede obtenerse de la expresión: 180(n-2)/n

$$m\angle X = \frac{180(n-2)}{n}$$

Donde:
n Cantidad de lados del polígono

Por tanto, la suma de los ángulos interiores será: 180(n-2)

$$\sum m\angle X = 180(n-2)$$

Dimensiones
El perímetro de cualquier figura es igual a la suma de sus lados. En el caso de polígonos regulares todos los lados tienen la misma longitud, por tanto: p=nL

$$p = nL$$

Donde:
p Perímetro
n Cantidad de lados del polígono
L longitud del lado del polígono

Estas figuras pueden ser trazadas dentro de una circunferencia tal que los vértices del polígono estén sobre ella. En ese caso decimos que el polígono está inscrito en la circunferencia (dentro de ella).

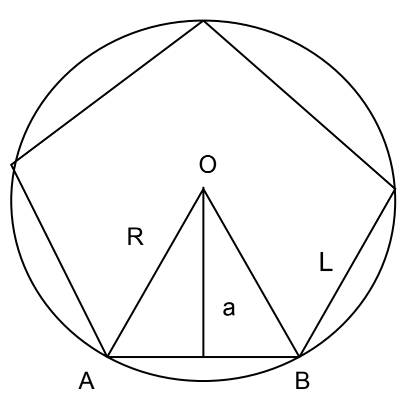

Fig. 1 Polígono de lado L inscrito en una circunferencia de radio R

Notamos que si unimos el centro de la circunferencia con los vértices del polígono obtendremos triángulos isósceles con lados iguales de longitud R idénticos, en cantidad igual a la cantidad de lados. El área del polígono será igual a la suma de las áreas de estos triángulos isósceles.

En un hexágono regular estos triángulos son equiláteros, por tanto el lado del polígono es igual al radio de la circunferencia.

Verificamos también que los ángulos iguales de estos triángulos isósceles son la mitad de los ángulos interiores del polígono.

De lo indicado anteriormente y de la Fig. 1, en el triángulo OAB tenemos: mOAB=90(n-2)/n, OA=R

$$m\angle OAB = m\angle OBC = \frac{90(n-2)}{n}$$
$$OA = OB = R$$

<u>Área</u>
El área (S) de un polígono regular se obtiene: p.a/2

$$S = \frac{perímetro.apotema}{2} = \frac{p.a}{2}$$

El apotema sería la altura relativa a cualquier lado del polígono trazada desde el centro de la circunferencia.

Es posible hallar una relación entre el área (S), radio (R), lado (L) y ángulo (A) del polígono como sigue: a=Rsen(mAOB)

$$a = Rsen(m\angle OAB)$$
$$S = \frac{p.a}{2} = \frac{nLa}{2} = \frac{nLRsen(m\angle OAB)}{2}$$

Donde:
sen(mAOB) es el seno el ángulo AOB.

Otras relaciones importantes

$$L = 2R\cos(m\angle OAB)$$
$$p = nL = 2nR\cos(m\angle OAB)$$
$$S = \frac{p.a}{2} = \frac{[2nR\cos(m\angle OAB)].[Rsen(m\angle OAB)]}{2} = nR^2\cos(m\angle OAB)sen(m\angle OAB)$$
$$= \frac{nR^2 sen(2m\angle OAB)}{2} = \frac{nR^2 sen(m\angle A)}{2}$$

<u>Caso especial</u>
Hexágono regular

Como habíamos mencionado, el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia.
El área S_1 del triángulo OAB sería: $L^2\sqrt{3} / 4 = R^2\sqrt{3} / 4$

$$S_1 = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

El Área del hexágono sería 6 veces el área encontrada, $6(S_1)$.