

Inecuaciones

Son comparaciones algebraicas entre términos. Como regla general deberá resolverse similar a una ecuación, sin embargo los sentidos de igualdad y desigualdad incluyen algunas variantes que aquí veremos.

Procedimiento.

- Llevar la expresión hasta una factorización irreducible.
- Igualar cada uno de los factores a cero. Obtener puntos de referencia (intervalos)
- Escoger un valor entre estos puntos de referencia y establecer el signo del intervalo.
- Escoger aquellos intervalos que cumplan con la desigualdad. Éstos serán la solución.

Ejemplos

$$X - 1 > 0$$

Este caso es directo. Despejamos la variable y obtenemos el intervalo de solución.

$$X > 1$$

$$CS = [1, +\infty[$$

$$X^2 + 2x + 1 > 0$$

$$\text{Factorizamos } (x + 1)^2 > 0$$

Recordemos que todo número elevado al cuadrado es positivo, por tanto la desigualdad se cumplirá excepto en este ejemplo cuando la expresión sea cero, es decir, cuando $x + 1 = 0$, $x = -1$

$$CS = R - \{-1\}$$

$$X^2 - 4x + 3 < 0$$

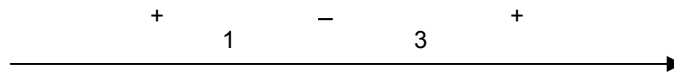
Factorizamos

$$(x - 3)(x - 1) < 0$$

Igualamos los factores a cero

$$X - 3 = 0, x = 3$$

$$X - 1 = 0, x = 1$$



Ubicamos los valores en la recta numérica y tomamos un número en cada intervalo.

Para $x < 1$, tomamos $x=0$. Reemplazamos en la expresión $(0-3)(0-1) = 3 > 0$ entonces colocamos un signo “+” en ese intervalo.

Para $1 < x < 3$, tomamos $x=2$. Reemplazamos en la expresión $(2 - 3)(2 - 1) = -1 < 0$ entonces colocamos un signo “-” en ese intervalo.

Procedemos de igual manera para $x > 3$.

Como tenemos una desigualdad “<” (menor) entonces tomamos los intervalos que tengan el signo “-”. Si la desigualdad fuera “>” (mayor) tomaríamos los intervalos con signo “+”.

$$CS =] -1, 3[$$

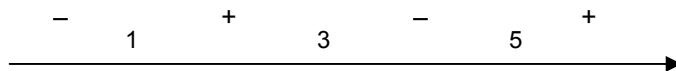
$$(X^2 - 4x + 3)/(x - 5) \geq 0$$

$$\text{Factorizamos: } (x - 3)(x - 1)/(x - 5) \geq 0$$

Igualamos los factores a cero: $x=3, 1, 5$.

Ubicamos los valores en la recta numérica y tomamos un valor para cada intervalo encontrado.

Colocamos el signo al intervalo según corresponda.



Como la desigualdad es “≥” tomaremos los intervalos con signo “+”. Sin embargo, debemos notar que un denominador no puede ser cero,

por tanto, $x=5$ no formaría parte de la solución.

$$CS = [1, 3] \cup]5, +\infty[$$

$(x + 1)^2 > 4$
 $(x + 1)^2 - 4 > 0$
 $(x + 1 + 2)(x + 1 - 2) > 0$
 $(x + 3)(x - 1) > 0$
 Aplicamos el procedimiento de intervalo y obtenemos: $X = -3, x = 1$.
 $CS =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$

$(x + 1)^2 < 4$
 $(x + 1)^2 - 4 < 0$
 $(x + 1 + 2)(x + 1 - 2) < 0$
 $(x + 3)(x - 1) < 0$
 Aplicamos el procedimiento de intervalo y obtenemos: $X = -3, x = 1$.
 $CS =]-3, 1[$

Caso Especial. Valor Absoluto

Se establece que:

$$|X| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ya sea que tengamos ecuaciones o inecuaciones deberemos por tanto efectuar dos desarrollos.

Ejemplo

$$|x - 1| > 0$$

Igual que en segundo ejemplo (arriba), el valor absoluto de cualquier número es siempre positivo excepto en este ejemplo cuando sea igual a cero: $x - 1 = 0, x = 1$.

$$CS = CS = R - \{1\}$$

$$|x - 1| > 3$$

Si $x - 1 \geq 0$ ($x \geq 1$) entonces $x - 1 > 3, x > 4, x \geq 1 \cap x > 4 \rightarrow x > 4$

Si $x - 1 < 0$ ($x < 1$) entonces $-x + 1 > 3, x < -2, x < 1 \cap x < -2 \rightarrow x < -2$

$$CS =]-\infty, -2[\cup]4, +\infty [$$

$$|x - 1| < 3$$

Siguiendo el procedimiento anterior:

Si $x - 1 > 0$ ($x \geq 1$) entonces $x - 1 < 3, x < 4, x \geq 1 \cap x < 4 \rightarrow 1 \leq x < 4$

Si $x - 1 < 0$ ($x < 1$) entonces $-x + 1 < 3, x > -2, x < 1 \cap x > -2 \rightarrow -2 < x < 1$

$$CS =]-2, 1[\cup]1, 4 [=]-2, 4[$$

Comentarios

Podemos efectuar simplificaciones en los procesos anteriores como sigue:

$$X - 1 = 3, x = 4$$

$$X - 1 = -3, x = -2$$

Aplicamos la recomendación de la recta numérica, ubicamos los puntos, establecemos los intervalos, tomamos un valor dentro de ese intervalo y verificamos si se cumple la desigualdad.

Para el ejemplo $|x - 1| > 3$ trabajamos con los intervalos:

$X < -2$, por ejemplo $x = -3, |-3 - 1| = |-4| = 4 > 3 \rightarrow$ cumple

$-2 < x < 4$, por ejemplo $x = 0, |0 - 1| = |-1| = 1 < 3 \rightarrow$ no cumple

$X > 4$, por ejemplo $x = 5, |5 - 1| = |4| = 4 > 3 \rightarrow$ cumple. Y obtenemos el mismo rango solución.

Analizando los ejercicios anteriores podemos llegar a las siguientes simplificaciones:

$ x - 1 > 3 \rightarrow x - 1 < -3 \cup x - 1 > 3$	$ f(x) > k \rightarrow f(x) < -k \cup f(x) > k$
$ x - 1 < 3 \rightarrow -3 < x - 1 < 3$	$ f(x) < k \rightarrow -k < f(x) < k$
$(x + 1)^2 > 4 \rightarrow x + 1 < -2 \cup x + 1 > 2$	$[f(x)]^2 > k \rightarrow f(x) < -\sqrt{k} \cup f(x) > \sqrt{k}$
$(x + 1)^2 < 4 \rightarrow -2 < x + 1 < 2$	$(x + 1)^2 < 4 \rightarrow -\sqrt{k} < f(x) < \sqrt{k}$