

Factorización

Como su nombre lo dice, factorizar significa convertir una expresión en otra compuesta de factores irreducibles.

Expondremos algunos casos típicos.

Expresiones de primer grado

Son expresiones del tipo $x+1$, $2x-3$, etc. Estas expresiones son irreducibles y por tanto no pueden factorizarse.

Expresiones de segundo grado

Son expresiones del tipo $ax^2 + bx + c$, donde el máximo exponente de la variable es 2. Por lo general, estas expresiones pueden factorizarse de la forma $(x-d)(x-e)$. Cuando se vea el tema de resolución de ecuaciones veremos que “e” y “d” son las soluciones de la ecuación.

Método del Aspa

Es uno de los métodos más populares. El procedimiento es como sigue:

- Ordenar la expresión en orden descendente para el exponente de la variable.
- Verificar que esté completo. Debe tener tres términos con exponentes de las variables 2, 1, 0.
- Buscar dos términos que multiplicados den “ ax^2 ”
- Buscar dos términos que multiplicados den “c”
- Los valores anteriores deben colocarse debajo de la expresión.
- Efectuar una multiplicación cruzada de estos términos tal que al hacer una suma algebraica de sus resultados se obtenga “bx”.
- Escribir los factores de forma horizontal respetando los signos de cada término.

Ejemplo

Sea la expresión: $x^2 - 5x + 6$

- Buscar dos términos que multiplicados den el primer término: x y x
- Buscar dos términos que multiplicados den el último término: 2 y 3 , 6 y 1 , -2 y -3 , -6 y -1

Notar que el signo del último coeficiente es “+”. Debido a que estamos aplicando la regla de los signos en la multiplicación de los números propuestos es que tenemos 4 grupos posibles.

- Efectuar la suma de los productos cruzados:

(x)
 $\begin{array}{r} +x \\ +x \end{array} \begin{array}{r} +2 = 2x \\ +3 = 5x \end{array}$ La suma es $+7x \neq$ al coeficiente del medio (que es $-5x$) por tanto este grupo de números no cumple.

(x)
 $\begin{array}{r} +x \\ +x \end{array} \begin{array}{r} +6 = 6x \\ +1 = x \end{array}$ La suma es $+7x \neq$ al coeficiente del medio (que es $-5x$) por tanto este grupo de números no cumple.

(x)
 $\begin{array}{r} +x \\ +x \end{array} \begin{array}{r} -6 = -6x \\ -1 = -x \end{array}$ La suma es $-7x \neq$ al coeficiente del medio (que es $-5x$) por tanto este grupo de números no cumple.

(x)
 $\begin{array}{r} +x \\ +x \end{array} \begin{array}{r} -2 = -2x \\ -3 = -3x \end{array}$ La suma es $-5x =$ al coeficiente del medio (que es $-5x$) por tanto este grupo de números si cumple.

- Escribir los factores de forma horizontal respetando los signos
(x-2)(x+3)

Caso especial. Trinomio cuadrado perfecto (TCP)

Estas expresiones parten del producto de dos binomios idénticos, que pueden ser:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$$

Escrita de esta forma la expresión ha sido factorizada.

Debemos notar lo siguiente:

- Ambos factores son idénticos (a+b) o (a-b).
- Los sumandos del factor son las raíces cuadradas del primer y tercer término respectivamente. Esto significa también que el primer y último término del polinomio deben ser positivos.
- El término central del polinomio es el doble del producto de los sumandos (entiéndase por sumandos a los términos que intervienen en la suma algebraica).
- El signo que debe ir en los factores es igual al signo del segundo término de la expresión.

Ejemplo

Sea la expresión: $X^2 - 8x + 16$

- Lo primero que debemos hacer es ordenar el polinomio y verificar que esté completo. OK
- Para que sea candidato a TCP debemos verificar que el primer y tercer términos sean positivos y tengan raíz cuadrada. (x, 4). OK
- Debemos verificar que el doble del producto de los valores anteriores nos de el segundo término del polinomio. $2(x)(4)=8x$. OK
- Como se han cumplido todas las condiciones entonces se trata de un TCP y la factorización será $(x-4)(x-4) = (x-4)^2$. Observar que el signo en estas expresiones coincide con el signo del segundo término del polinomio.

Caso Especial. Diferencia de Cuadrados

Son expresiones del tipo $a^2 - b^2$

La factorización es: $(a+b)(a-b)$

Debemos efectuar el siguiente procedimiento:

- La expresión debe tener dos términos, y deben restarse.
- Ambos términos deben tener raíz cuadrada.

Ejemplo

$$X^4 - 16$$

Notamos que hay dos términos, tienen raíz cuadrada (x^2 , 4) y están restandose. OK

La factorización será: $(x^2 + 4)(x^2 - 4)$. Antes de dar por finalizada cualquier factorización deberemos verificar si alguno de los términos encontrados puede factorizarse. En este caso, el segundo término puede factorizarse y cumple con las condiciones de diferencia de cuadrados. Finalmente la factorización es: $(x^2 + 4)(x^2 + 2)(x^2 - 2)$

Nota. Puede factorizarse (de ser necesario) el último término: $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

Método del Discriminante

Es un método poco laborioso (largo en proceso) pero efectivo en la factorización.

Sea la expresión: $ax^2 + bx + c$. La factorización es $(x-x_1)(x-x_2)$, donde:

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión dentro de la raíz se denomina Discriminante.

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

Sea la expresión: $x^2 - 5x + 6$

El discriminante será: $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1$

$$X_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$X_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = 2$$

La factorización será $(x-3)(x-2)$

Observar que en la expresión para obtener x_1 y x_2 se están respetando los signos de los coeficientes del polinomio (b es -5 y no 5).

Un discriminante igual a cero implica que $x_1 = x_2$ por tanto el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto (los factores son iguales).

Un discriminante negativo implica que no hay solución en los números Reales.

Otros casos

Hay expresiones del tipo $x^n \pm y^n$, por ejemplo $x^3 + 1$, $x^5 - y^5$, etc.

Lo primero que debemos verificar es si la expresión puede ser factorizada. Para ello la igualamos a 0 (cero) y resolvemos para una de sus variables. Si esto es posible entonces si se puede factorizar.

Ejemplos

$X^5 - y^5$, $X^5 - y^5 = 0$, $X^5 = y^5$, $x=y$. Si se puede factorizar.

$a^4 + b^4$, $a^4 + b^4 = 0$, $a^4 = -b^4$. No es posible extraer raíz cuarta a un número negativo, por tanto no se puede factorizar.

La factorización de este tipo de expresiones es de la siguiente forma:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Notemos lo siguiente:

- El primer factor tiene la misma operación (suma o resta) de la expresión original.
- Cuando la expresión original es una suma, los signos en el segundo factor son alternados empezando en positivo. Si la expresión original es una resta, los signos en el segundo factor son todos positivos.
- Los exponentes de la primera variable van disminuyendo, mientras que los de la segunda variable van aumentando.

Ejemplos

Sea la expresión $X^5 - Y^5$

Ya hemos verificado que es factorizable, por tanto continuamos con el proceso:

$$(x-y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

Notar que en X el exponente va disminuyendo (4, 3, 2, 1, no hay variable) mientras que en Y va aumentando (no hay variable, 1, 2, 3, 4).

Sea la expresión $a^4 - b^4$

Verificamos si es factorizable igualándolo a 0. Cumple!

$$(a-b)(a^3 - a^2b + a^2b^2 - b^3).$$

Revisamos el segundo factor y vemos que es posible seguir factorizando (factor común).

$$(a-b)[a^2(a-b) + b^2(a-b)] = (a-b)(a-b)(a^2 + b^2).$$

El proceso anterior pudo ser resumido si se utilizaba el procedimiento de diferencia de cuadrados visto anteriormente.

Caso especial. Completar Cuadrados

Supongamos que tenemos la expresión $x^2 - 2x - 3$ pero nos solicitan que factoricemos completando cuadrados. Esto significa que tenemos que modificar el polinomio para que se convierta en un TCP.

Notar que el polinomio anterior pudo haber sido factorizado fácilmente por el Método del Aspa.

Procedimiento

Debemos sumar y restar a la expresión un mismo término y luego agrupar todos los términos convenientemente. El término que se suma o resta debe ser aquel que permita obtener el TCP.

Para determinar el término necesario, debemos obtener la mitad del coeficiente del medio y elevarlo al cuadrado. En nuestro ejemplo, el término del medio es 2, su mitad es 1, elevado al cuadrado da 1. Por tanto debemos sumar y restar 1.

$$x^2 - 2x - 3 + 1 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 3 - 1 = (x^2 - 2x + 1) - 4 = (x-1)^2 - 4$$

Revisando cuidadosamente la expresión encontramos que tiene la forma de diferencia de cuadrados. La factorización será:

$$(x - 1 + 2)(x - 1 - 2) = (x + 1)(x - 3)$$

Miscelánea

La idea de este párrafo es tratar de profundizar en el manejo de las soluciones (factorización) de una expresión de segundo grado.

Sean las soluciones de una expresión: a, b.

La factorización será $(x - a)(x - b)$.

El desarrollo será: $x^2 - (a+b)x + ab$

Cuando las raíces son iguales: $b = a$.

$$x^2 - 2ax + a^2.$$

Cuando las raíces son opuestas: $b = -a$.

$$x^2 - a^2$$

Cuando las raíces son inversas: $b = 1/a$

$$ax^2 - (a^2 + 1)x + a.$$

Cuando una de las raíces es inversa negativa de la otra: $b = -1/a$

$ax^2 - (a^2 - 1)x - a$. El término del medio tiene el mismo signo que la raíz fraccionaria ($1/a$).

Cuando las raíces son imaginarias: $a + bi$, $a - bi$.

$x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$. Si $a = 0 \rightarrow x^2 + b^2$. Si $b = 0 \rightarrow x^2 - 2ax + a^2$

Cuando se puede expresar una raíz en función de otra: $b = ka$

El desarrollo será: $x^2 - a(k+1)x + a^2k$

Ejemplo

$$x^2 + 3x + 5$$

Solamente cumpliría con raíces imaginarias: $-2a = 3 \rightarrow a = -3/2$, $(-3/2)^2 + b^2 = 5$, $b = \sqrt{11}/2$. La factorización es:

$$(x - [-3/2 + i\sqrt{11}/2])(x - [-3/2 - i\sqrt{11}/2])$$

Ejemplo

$$5x^2 - 26x + 5$$

Cumple con la condición de raíces inversas del mismo signo. La factorización será: $(x - 5)(x - 1/5)$

Ejemplo

$$3x^2 - 8x - 3$$

Cumple con la condición de raíces inversas con signos opuestos.

Notar que el término del medio es negativo, y lleva el mismo signo que la raíz fraccionaria. Las raíces son $x = 3$, $x = -1/3$. La factorización es: $(x - 3)(x + 1/3)$.

Ejemplo

$$x^2 - 5x - 14$$

$$14 = 1(2)(7)$$

$$\text{Si } a = 2, k = -14/a^2 = -14/4 \rightarrow -a(k+1) = -2(-10/4) = 5$$

Si $a = 7$, $k = -14/a^2 = -14/49 \rightarrow -a(k+1) = -7(35/49) = -5$ (tiene el mismo coeficiente que el término del medio, por tanto ya no es necesario hacer mayor evaluación) $\rightarrow b = ka = -2$.

La factorización es $(x - 7)(x + 2)$

Ejemplo

$$x^2 + 8x + 15$$

$$15 = 1(3)(5)$$

$$\text{Si } a = 3, k = 15/a^2 = 15/9, -a(k+1) = -3(24/9) = -8$$

$$\text{Si } a = 5, k = 15/a^2 = 15/25, -a(k+1) = -5(40/25) = -8$$

Si $a = -3$, $k = 15/a^2 = 15/9$, $-a(k+1) = 3(24/9) = 8$ (tiene el mismo coeficiente que el término del medio, por tanto ya no es necesario hacer mayor evaluación) $\rightarrow b = ka = -5$

La factorización es $(x + 3)(x + 5)$

Comentario final

Cuando haya trinomios que no puedan factorizarse mediante el método el aspa o tenga configuración diferente al de trinomio cuadrado perfecto, etc. lo más recomendable es factorizarlo por el método del discriminante.

Para otros casos ver también el tema Ecuaciones.