

## Ecuaciones de Primer Grado con 2 incógnitas

Este tema corresponde a uno de los principios del álgebra y es uno de los más usados en las matemáticas. Por tanto, su entendimiento, familiarización y dominio es fundamental.

- Una ecuación es una expresión algebraica igualada a otra. Es decir, debe aparecer el signo “=” en la expresión.
- Es de primer grado porque el máximo exponente de las variables es 1.
- Es de dos incógnitas por que hay solamente dos variables en la ecuación.
- El objetivo es hallar el valor de esas variables.

### Condición

Para poder resolver este sistema (hallar el valor de las variables) es necesario que tengamos 2 ecuaciones.

### Métodos

#### **1. Igualación**

Despejamos la misma variable en las dos ecuaciones y luego las igualamos.

$$4x + y = 12 \dots\dots\dots(1)$$

$$2x - y = 18 \dots\dots\dots(2)$$

de la ecuación (1) tenemos:  $y = 12 - 4x \dots\dots\dots(3)$

de la ecuación (2) tenemos:  $y = 2x - 18 \dots\dots\dots(4)$

Igualemos ambas expresiones:  $12 - 4x = 2x - 18$ ,  $6x = 30$ ,  $x = 5$

Reemplazamos en (3) ó (4) y obtenemos:  $y = 12 - 4(5) = 12 - 20 = -8$ .

#### **2. Sustitución**

Despejamos una variable de cualquier ecuación y la sustituimos en la otra ecuación.

$$4x + 3y = 12 \dots\dots\dots(1)$$

$$2x - y = 16 \dots\dots\dots(2)$$

despejamos “y” de la segunda ecuación:  $y = 2x - 16$

reemplazamos este valor en la ecuación (1):  $4x + 3(2x - 16) = 12$ ,  $10x = 60$ ,  $x = 6$ .

Reemplazamos este valor en cualquiera de las 2 ecuaciones y obtenemos:  $2(6) - y = 16$ ,  $y = -4$ .

#### **3. Reducción**

Multiplicamos ambas ecuaciones por factores tal que una de las variables tenga el mismo coeficiente. Luego restamos ambas ecuaciones para reducir aquella que tiene igual coeficiente y hallamos una de las variables.

$$4x + 3y = 12 \dots\dots\dots(1)$$

$$2x - 4y = 17 \dots\dots\dots(2)$$

Multiplicamos la ecuación (1) por 1 y la ecuación (2) por 2. La idea es que los coeficientes de la variable “x” sean iguales:

$$4x + 3y = 12 \dots\dots\dots(3)$$

$$4x - 8y = 34 \dots\dots\dots(2), \text{ ahora restamos ambas ecuaciones } (3) - (4) \text{ y obtenemos:}$$

$$11y = -22, y = -2. \text{ Reemplazamos en (1) ó (2) y obtenemos: } 2x - 4(-2) = 17, x = 9/2.$$

#### **4. Matricial (Cramer)**

Debe efectuarse una operación matricial. Para ello, haremos una teoría previa.

Una matriz es una expresión de la forma:

$$M = \left\langle \begin{array}{c|c} x_1 & y_1 \\ \hline x_2 & y_2 \end{array} \right\rangle \text{ La "solución" de este operador es como sigue: } x_1 y_2 - y_2 x_1$$

Es decir, la diferencia de los productos cruzados.

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 x + y_1 y &= a_1 \\ x_2 x + y_2 y &= a_2 \end{aligned}$$

Definimos:

$$M_d = \left\langle \begin{array}{c|c} x_1 & y_1 \\ \hline x_2 & y_2 \end{array} \right\rangle \quad M_x = \left\langle \begin{array}{c|c} a_1 & y_1 \\ \hline a_2 & y_2 \end{array} \right\rangle \quad M_y = \left\langle \begin{array}{c|c} x_1 & a_1 \\ \hline x_2 & a_2 \end{array} \right\rangle$$

Donde:

$x_1, x_2$  son los coeficientes de la variable  $x$

$y_1, y_2$  son los coeficientes de la variable  $y$

$a_1, a_2$  son los términos independientes (no llevan variable)

Observar que los términos independientes reemplazan a los coeficientes de la variable que deseamos hallar.

Las soluciones serán:

$$x = M_x / M_d, \quad y = M_y / M_d$$

**Nota:** Este procedimiento puede ser usado para tres o más incógnitas.

### Ejemplo

$$4x + y = 12 \dots\dots\dots(1)$$

$$2x - y = 18 \dots\dots\dots(2)$$

Los coeficientes de  $x$  son: 4, 2.

Los coeficientes de  $y$  son: 1, -1

Los términos literales son: 12, 18

$$\text{Por tanto: } M_d = (4)(-1) - (2)(1) = -6, \quad M_x = (12)(-1) - (1)(18) = -30, \quad M_y = (4)(18) - (12)(2) = 48$$

$$\text{Las respuestas serán: } x = M_x / M_d = -30/-6 = 5, \quad y = M_y / M_d = 48/-6 = -8$$

### Ejemplo

$$4x + 3y = 12 \dots\dots\dots(1)$$

$$2x - y = 16 \dots\dots\dots(2)$$

Los coeficientes de  $x$  son: 4, 2.

Los coeficientes de  $y$  son: 3, -1

Los términos literales son: 12, 16

$$\text{Por tanto: } M_d = (4)(-1) - (2)(3) = -10, \quad M_x = (12)(-1) - (3)(16) = -60, \quad M_y = (4)(16) - (12)(2) = 40$$

$$\text{Las respuestas serán: } x = M_x / M_d = -60/-10 = 6, \quad y = M_y / M_d = 40/-10 = -4$$

### Ejemplo

$$4x + 3y = 12 \dots\dots\dots(1)$$

$$2x - 4y = 17 \dots\dots\dots(2)$$

Los coeficientes de x son: 4, 2.

Los coeficientes de y son: 3, -4

Los términos literales son: 12, 17

Por tanto:  $M_d = (4)(-4) - (2)(3) = -22$ ,  $M_x = (12)(-4) - (3)(17) = -99$ ,  $M_y = (4)(17) - (12)(2) = 44$

Las respuestas serán:  $x = M_x / M_d = -99/-22 = 9/2$ ,  $y = M_y / M_d = 44/-22 = -2$

Según hemos visto en los tres últimos ejemplos, coinciden con las respuestas encontradas en los tres primeros.

### 5. Gráfico

Consiste en “graficar” las ecuaciones en un plano. Cada ecuación representa una recta. La intersección de las rectas será la respuesta buscada. Este procedimiento generalmente no da soluciones exactas. Debemos hallar los valores de “y” cuando  $x=0$  y de “x” cuando  $y=0$  en ambas ecuaciones. Unimos esos puntos mediante un segmento y vemos donde se intersectan. Los ejes X e Y deben ser graduados para facilitar la lectura.

### Ejemplo

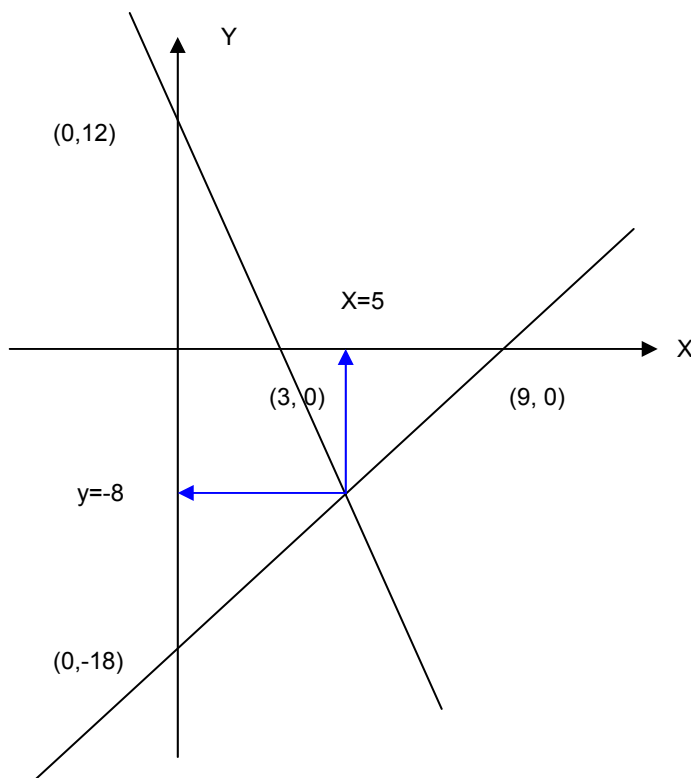
$$4x + y = 12 \dots\dots\dots(1)$$

$$2x - y = 18 \dots\dots\dots(2)$$

Para la ecuación (1):  $x=0 \rightarrow y=12$ ,  $y=0 \rightarrow x=3$ . Los puntos son: (0, 12), (3, 0).

Para la ecuación (2):  $x=0 \rightarrow y=-18$ ,  $y=0 \rightarrow x=9$ . Los puntos son: (0, -18), (9, 0).

Procedemos a la construcción gráfica:



La respuesta es  $x=5$ ,  $y=-8$ .

### Miscelánea

#### **Ejemplo**

Hallar la suma de 2 números sabiendo que su producto es 12 y la suma de sus inversos es  $7/12$ .

Planteamos las ecuaciones:  $xy = 12$ ,  $1/x + 1/y = 7/12$

Trabajando la segunda expresión tenemos:  $(x+y)/(xy) = 7/12$ , pero  $xy=12$ , reemplazando tenemos:  $(x+y)/12 = 7/12$ ,  $x+y = 7$ .

#### **Ejemplo**

Hallar  $a + b$  para que el siguiente sistema de ecuaciones tenga soluciones  $x=5$ ,  $y=-8$

$$ax + y = 12 \dots\dots\dots(1)$$

$$2x - by = 18 \dots\dots\dots(2)$$

Como  $x=5$ ,  $y=-8$  son soluciones, deberán cumplirse las igualdades si los reemplazamos en las ecuaciones:

$$a(5) + (-8) = 12, 5a = 20, a=4$$

$$2(5) - b(-8) = 18, 8b = 8, b=1. \text{ Por tanto, } a+b = 4+1 = 5.$$