Ecuaciones de Grado n

Uno de los temas más apasionantes es quizá la solución de ecuaciones.
De todas ellas, la más estudiada es aquella que corresponde a la de segundo grado.
No abordaremos procedimientos como el de Bisectriz, Newton, Secante u otros similares.
No haremos tampoco un tratado científico, solamente enunciaremos la base matemática correspondiente a ecuaciones con una incógnita (variable) combinada con algunos ejemplos prácticos.

Funciones algebraicas
Los polinomios son un caso simple de funciones algebraicas, que son de la forma:

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

Funciones trascendentales
Son aquellas que no son algebraicas. Comprenden a las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, entre otras.

Desarrollaremos solamente las Funciones Algebraicas.

Habíamos dicho que un polinomio de orden o grado "n" se expresa como:

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

Donde:

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_1, a_0$	Coeficientes
x	Variable
n	Grado del polinomio

La expresión anterior se convertirá en ecuación cuando P(x) = 0.

Resolver una ecuación significa encontrar las soluciones, ceros o raíces que hagan cumplir dicha igualdad.

En líneas generales:

- El polinomio debe estar ordenado en forma decreciente
- Si el coeficiente a_n es diferente a 1, deberemos dividir toda la expresión entre a_n
- El teorema de Bolzano, que establece que si una función continua P(x) toma valores de signo opuesto en los extremos de un intervalo [a,b], entonces, la función admite al menos una raíz en dicho intervalo.
- En el caso en que P(x) sea una función algebraica (polinómica) de grado "n" y coeficientes reales, podemos afirmar que tendrá "n" raíces reales o complejas.
- La propiedad más importante que verifican las raíces racionales de una ecuación algebraica establece que si p/q es una raíz racional de la ecuación de coeficientes enteros, entonces el denominador q divide al coeficientes a_n y el numerador p divide al término independiente a_0.
- Las raíces de un polinomio pueden ser reales o complejas. Si un polinomio tiene coeficientes reales, entonces todas las raíces complejas siempre ocurrirán en pares conjugados complejos (a+bi, a-bi).
- Una vez obtenido un cero o raíz, deberá bajarse el grado del polinomio, factorizando la raíz indicada.
- 0 es raíz de un polinomio si y sólo si el término independiente es cero ($a_0 = 0$)
- 1 es raíz de un polinomio sí y sólo si la suma de los coeficientes es cero.
- -1 es raíz de un polinomio sí y sólo si la suma de los coeficientes de los términos de grado par es igual a la suma de los coeficientes de los términos de grado impar.

Sea $P_n(x)$ un polinomio de grado "n" como el indicado anteriormente, cuyas raíces son: $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$. Existe una relación entre éstas y los coeficientes, dada por:

$a_n = 1$
$a_{n-1} = -(\text{suma de las raíces}) = -(r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n)$
$a_{n-2} = (\text{suma de las raíces multiplicadas de dos en dos}) = r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_2r_3 + \ldots + r_{n-1}r_n$
$a_{n-3} = -(\text{suma de las raíces multiplicadas de tres en tres}) = -(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n)$
.
.
$a_0 = (-1)^n (\text{producto de todas las raíces}) = (-1)^n r_1r_2r_3\ldots r_n$

Ejemplo
Encontrar la relación entre raíces y coeficientes para la ecuación $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

La suma de las raíces será: $-a_1/a_2$
El producto de las raíces será: a_0/a_2

Ejemplo
Encontrar la relación entre raíces y coeficientes para la ecuación $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

La suma de las raíces será: $-a_2/a_3$
La suma de las raíces de 2 en 2 será: a_1/a_3
El producto de las raíces será: $-a_0/a_3$

Ejemplo
Resolver $x^3 + 12x + 16 = 0$

- Como es una ecuación de grado 3, deberemos obtener 3 soluciones.
- Debemos verificar que el polinomio esté ordenado y que $a_n = 1$.
- Recordemos que si p/q es una raíz racional, entonces "p" divide a a_0 y "q" divide a a_n
- Los divisores de 1 son: ±1.
- Los divisores de 16 son: ±16, ±8, ±4, ±2, ±1.
- Por tanto, p/q = ±16, ±8, ±4, ±2, ±1.
- $a_0 \neq 0$, por tanto 0 no es raíz.
- La suma de los coeficientes no es 0, tampoco la suma de los coeficientes de los términos de grado par es igual a la suma de los coeficientes de los términos de grado impar, por tanto ±1 tampoco son soluciones.
- p/q será raíz si es que satisface P(p/q) = 0.
- Por otro lado, el producto de las raíces debe ser $(-1)^3(16)$ = negativo, por tanto, de las tres raíces dos deben tener el mismo signo y la restante debe ser necesariamente negativa. Esto significa que podremos obtener dos raíces positivas y una negativa o, tres raíces negativas.
- p/q= -4 satisface la condición P(p/q) = 0, por tanto (x+4) será un factor de la expresión.
- Bajando el grado de la Función obtenemos: $(x+4)(x^2 - 4x + 4) = 0$
- Factorizando nuevamente, finalmente queda: $(x+4)(x-2)^2 = 0$
- Las raíces son: -4, 2, 2. Complementariamente con esto verificamos que la suma de las raíces es $-a_2/a_3 = 0$.

<u>Comentario</u>
La idea de bajar el grado del polinomio es tratar de llevar la expresión al grado 2. La función cuadrática es bien conocida y puede resolverse fácilmente.

Para ver estos procedimientos, favor revisar Factorización.

Ejemplo
Resolver: $x^3 – 2x^2 – 3x + 10 = 0$

- Como es una ecuación de grado 3, deberemos obtener 3 soluciones.
- Debemos verificar que el polinomio esté ordenado y que $a_n = 1$.
- Recordemos que si p/q es una raíz racional, entonces "p" divide a a_0 y "q" divide a a_n
- Los divisores de 1 son: ±1.
- Los divisores de 10 son: ±10, ±5, ±2, ±1.
- Por tanto, p/q = ±10, ±5, ±2, ±1.
- $a_0 \neq 0$, por tanto 0 no es raíz.
- La suma de los coeficientes no es 0, tampoco la suma de los coeficientes de los términos de grado par es igual a la suma de los coeficientes de los términos de grado impar, por tanto ±1 tampoco son soluciones.
- p/q será raíz si es que satisface P(p/q) = 0.
- Por otro lado, el producto de las raíces debe ser $(-1)^3(10)$ = negativo, por tanto, de las tres raíces dos deben tener el mismo signo y la restante debe ser necesariamente negativa. Esto significa que podremos obtener dos raíces positivas y una negativa o, tres raíces negativas.
- p/q= -2 satisface la condición P(p/q) = 0, por tanto (x+2) será un factor de la expresión.
- Bajando el grado de la Función obtenemos: $(x+2)(x^2 - 4x + 5) = 0$
- Analizando el discriminante del segundo factor encontramos que es negativo ($(-4)^2 -4(1)(5) = -4$), por tanto las soluciones serán imaginarias y conjugadas. No puede haber un número impar de raíces imaginarias.
- Las raíces son: -2, 2+i, 2-i. Complementariamente con esto verificamos que la suma de las raíces es $-a_2/a_3 = 0$.

<u>Cambio de Variable</u>

<u>Polinomios Ciclotónicos.</u>

Son polinomios de la forma $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_nx^n + a_0$

Sea el siguiente cambio de variable: $y = x^n$

La expresión anterior se re-escribiría: $P(y) = a_{2n}y^2 + a_ny + a_0$, convirtiéndola en una expresión de segundo grado, cuya solución es bastante bien conocida.

Ejemplo
Resolver
$x^6 – 16x^3 + 64 = 0$

Sea $y = x^3$, reemplazando obtenemos: $y^2 – 16y + 64 = 0$
Factorizando tenemos: $(y-8)^2 = 0$, y = 8. Sin embargo, $y = x^3$, $8 = x^3$, x = 2

<u>Polinomios Simétricos.</u>

Son aquellos cuyos coeficientes de los términos "equidistantes" de los extremos, son iguales.

Ejemplo
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$
$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$

En todo polinomio simétrico se cumple que:

- No admiten raíz = 0.

- -1 es raíz, si el grado es impar.
- Si admite raíz "r", también la raíz 1/r.
- Si es de grado impar, al dividirlo por (x+1), obtenemos un polinomio simétrico.

Ejemplo
Resolver $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

- El polinomio es simétrico
- El polinomio es de grado 3 (impar), por tanto x = -1 es una raíz y debe haber un total de 3 raíces.
- Factorizando queda $(x+1)(x^2 + x + 1) = 0$
- Analizando el discriminante del segundo factor encontramos que es negativo ((-1)2 – 4(1)(1) = -3), por tanto las soluciones serán imaginarias y conjugadas. No puede haber un número impar de raíces imaginarias.
- Las raíces son: -1, -1/2 + √3/2i, -1/2 – √3/2i.

Ejemplo
Resolver $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$

- El polinomio es simétrico
- El polinomio es de grado 3 (impar), por tanto x = -1 es una raíz y debe haber un total de 3 raíces.
- Factorizando queda $(x+1)(x^2 – 4x + 1) = 0$
- Analizando el discriminante del segundo factor encontramos que es positivo ((-4)2 – 4(1)(1) = 12), por tanto las soluciones reales y diferentes.
- Las raíces son: -1, 2 + √3, 2 – √3.

<u>Raíces de polinomios simétricos de cuarto grado</u>

Sea simétrico el polinomio: $P(x) = a^4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$,
por tanto, $a_4 = a_0 = a$, $a_3 = a_1 = b$, $a_2 = c$

La ecuación será: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$
De acuerdo a las recomendaciones anteriores encontramos que 0 no es una raíz de la ecuación, por tanto, dividimos todos los términos entre x^2 y acomodamos:

$$a(x^2 + 1/x^2) + b(x + 1/x) + c = 0$$

Aplicamos un cambio de variable como sigue: $x + 1/x = y$
Elevamos ambos miembros al cuadrado y acomodando términos tenemos: $x^2 + 1/x^2 = y^2 – 2$.
Reemplazamos en la ecuación anterior, acomodamos términos y obtenemos:

$$ay^2 + by + (c – 2a) = 0$$

Sean las raíces de esta ecuación y_1, y_2. Recordemos además que $y = x + 1/x$.

Sustituyendo y acomodando términos tenemos que: $x^2 – y_{1,2}x + 1 = 0$.

Resolviendo esta expresión obtendremos las 4 raíces buscadas.

Ejemplo
Resolver $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$

Verificamos que es una función simétrica de grado 4.
Identificamos los coeficientes como sigue: a=1, b=2, c=3

Formamos la ecuación cuadrática con cambio de variable: $y^2 + 2y + (3 – 2(1)) = 0$, $y^2 + 2y +1 = 0$
Resolvemos la expresión anterior y encontramos que: $y_{1,2} = -1$
Regresamos a la variable “x” y tenemos: $x^2 –(-1)x + 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$.
Resolviendo encontramos que las raíces son: $-1/2 + \sqrt{3}/2i$, $-1/2 – \sqrt{3}/2i$, $-1/2 + \sqrt{3}/2i$, $-1/2 – \sqrt{3}/2i$.

Debido a que $y_1 = y_2$ es que solamente efectuamos un reemplazo para regresar a la variable “x”. Cada una de estas soluciones darán dos soluciones en “x”, es por ello que se repiten.

Polinomios Hemisimétricos:

Un polinomio es hemisimétrico si los coeficientes de los términos “equidistantes” de los extremos son opuestos.

En todo polinomio simétrico se cumple que:

- No admiten la raíz 0.
- 1 es raíz, si el grado es impar.
- Si admite la raíz “r”, también admite la raíz 1/r.
- Si el grado es impar, al dividirlo por (x-1) obtenemos un polinomio simétrico.

Ejemplo
Resolver $x^3 – 3x^2 + 3x – 1 = 0$

- Es una ecuación de tercer grado, por tanto, una de las raíces es x = 1 y debe haber en total 3 raíces.
- El polinomio es hemisimétrico (los coeficientes de los términos equidistantes son opuestos).
- Factorizando queda: $(x – 1)(x^2 – 2x + 1) = (x – 1)(x – 1)^2 = (x – 1)^3 = 0$, $x_{1,2,3} = 1$