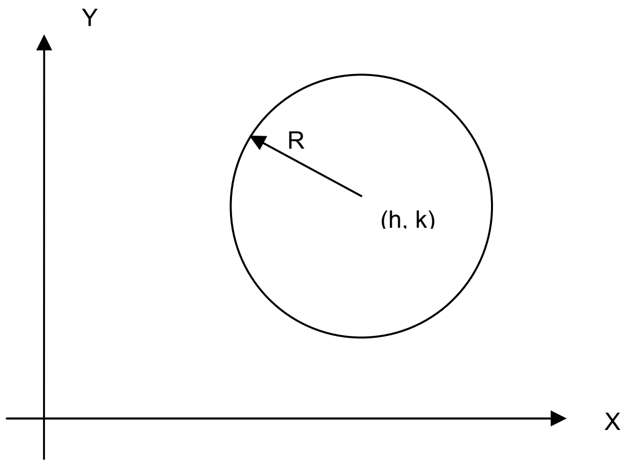
Circunferencia

Es el conjunto de puntos que equidistan de otro llamado Centro. El segmento que une cualquiera de estos puntos con el Centro se denomina Radio.



La circunferencia puede expresarse mediante la siguiente ecuación:

$$(x – h)^2 + (y – k)^2 = R^2$$

donde (h, k) es el centro de la circunferencia y R es el valor del radio.

Ejemplo
Halar la ecuación de la circunferencia que tenga centro en (0, 3) y radio 4.

$(x – 0)^2 + (y – 3)^2 = 4^2$
$x^2 + (y – 3)^2 = 16$

Eventualmente podemos tener expresiones desarrolladas y es necesario transformarlas para obtener la ecuación anterior. Para ello deberemos utilizar el método de completar cuadrados.

Ejemplo
Hallar el centro y radio de la circunferencia: $x^2 – 4x + y^2 – 6y + 9 = 0$
$x^2 – 4x + 4 – 4 + y^2 – 6y + 9 – 9 + 9 = 0$
$(x^2 – 4x + 4) – 4 + (y^2 – 6y + 9) – 9 + 9 = 0$
$(x – 2)^2 + (y – 3)^2 = 4$. Por tanto, el centro es (2, 3) y el radio es 2.

También es posible intersectar la circunferencia con una recta. Hay tres posibilidades:

- La recta corta a la circunferencia en dos puntos
- La recta corta a la circunferencia en un punto (la recta es tangente a la circunferencia)
- La recta no corta a la circunferencia.

Lo anterior puede resumirse en colocar la ecuación de la circunferencia en función de una de sus variables. Por tanto tendremos una ecuación de segundo grado con una incógnita.

Esa ecuación puede resolverse por el método del discriminante. Bastará analizar el discriminante para determinar:

- Si el discriminante es mayor que cero → la recta corta en dos puntos a la circunferencia
- Si el discriminante es cero → la recta es tangente a la circunferencia
- Si el discriminante es menor que cero → la recta no corta a la circunferencia.

Ejemplos
Hallar la intersección de la circunferencia $x^2 + (y – 3)^2 = 16$ con la recta $y = 2x + 3$

Ponemos la ecuación de la circunferencia en función de una variable: $x^2 + (2x + 3 – 3)^2 = 16$
$X^2 + 4x^2 – 16 = 0$
$5x^2 – 16 = 0$
$x_1 = 4/\sqrt{5}$, $x_2 = - 4/\sqrt{5}$. Por tanto $y_1 = 8/\sqrt{5}$, $y_2 = - 8/\sqrt{5}$.

Analizamos el discriminante: $b^2 – 4ac = 0 – 4(5)(-16) = 320 > 0$, por tanto confirmamos que hay dos puntos de corte.

Hallar la tangente a la circunferencia $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ que pase por el punto (4, 6)

El centro de la circunferencia es (0, 3). Debemos verificar ahora si el punto dado pertenece a la circunferencia o no.
Verificando: $4^2 + (6 - 3)^2 = 25$. Cumple!

En ejercicios de este tipo debemos recordar que cualquier tangente a la circunferencia es perpendicular al radio. Por tanto el producto de dichas pendientes es -1.
Siendo que la ecuación de la recta es $y - y_0 = m(x - x_0)$, deberemos halar solamente la pendiente porque ya tenemos el punto de paso.

Pendiente del radio: $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = (6 - 3)/(4 - 0) = ¾$
Por tanto la pendiente de la recta tangente será: - 4/3
La recta buscada tendrá la ecuación: $y - 6 = -(4/3)(x - 4)$.

Hallar la tangente a la circunferencia $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ que pase por el punto (0, 10)

El centro de la circunferencia es (0, 3). Debemos verificar ahora si el punto dado pertenece a la circunferencia o no.
Verificando: $0^2 + (10 - 3)^2 = 49 \neq 25$. No cumple! Por tanto el punto está fuera de la circunferencia.
La recta tendrá la ecuación: $y - 10 = m(x - 0)$, $y = mx + 10$. Hallaremos ahora la pendiente.
Reemplazamos en la ecuación de la circunferencia: $x^2 + (mx + 10 - 3)^2 = 25$
Simplificando tenemos: $(m^2+1)x^2 + 14mx + 24 = 0$
Como la recta es tangente, el discriminante debe ser cero: $b^2 - 4ac = (14m)^2 - 4(m^2+1)(24) = 0$
Reduciendo términos tenemos: $100m^2 - 96 = 0$.
Resolviendo tenemos: $m_1 = (2/5)\sqrt{6}$, $m_2 = - (2/5)\sqrt{6}$.

Comentario
Si en el ejercicio anterior no podíamos obtener "m", significaba que el punto no pertenecía a la circunferencia pero además estaba dentro del círculo (punto interior) por tanto no será posible encontrar una recta tangente.

Hallar un punto que pertenezca a la circunferencia $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ y sea diametralmente opuesto a (4, 6).

Si el punto buscado es diametralmente opuesto a otro dado significa que el punto dado, el centro y el punto buscado se encuentran en línea, en el diámetro. Por tanto, el centro de la circunferencia será el centro de dicho segmento.

Hacer un análisis previo puede ahorrar mucho trabajo. Lo usual quizá hubiera sido aplicar la definición de distancia entre el punto buscado – centro y entre centro – punto dado para luego igualar esas expresiones y finalmente reducirlas con la ecuación de la circunferencia. Ahora lo que haremos es aplicar la definición de punto medio de un segmento.

$(h, k) = [(x_0 + x_1)/2 , (y_0 + y_1)/2]$
Reemplazando obtenemos:
$0 = (4 + x_1)/2$, $x_1 = -4$
$3 = (6 + y_1)/2$, $y_1 = 0$. Por tanto el punto diametralmente opuesto será (-4, 0).