

# TIEMPOS DE PARO

- En general, el tiempo en el cual un Producto Derivado Americano debería de ser ejercido es **aleatorio**; depende de los movimientos en los precios del bien subyacente.

- En el ejemplo 4.2.1 (Put Americano) se vio que si el precio bajaba en el primer periodo, el propietario del Put debía ejercer al tiempo 1.
- En el otro caso, donde el precio crecía en el primer periodo, entonces el propietario no debía ejercer y esperar otro periodo.

- Además en el segundo caso,  $S_1(H)=8$  y el Put está fuera del dinero (out of the money) porque  $K=5$ .
- Si en el segundo periodo vuelve a subir, entonces  $S_2(HH)=16$  y el propietario la dejará expirar sin ejercerla.

- Por otra parte, si en el primer periodo el precio sube y en el segundo periodo baja, entonces  $S_2(HT)=4$ , el Put está dentro del precio (in the money), y el propietario debe ejercer.
- A continuación se describe esta regla que rige el ejercer o no ejercer:

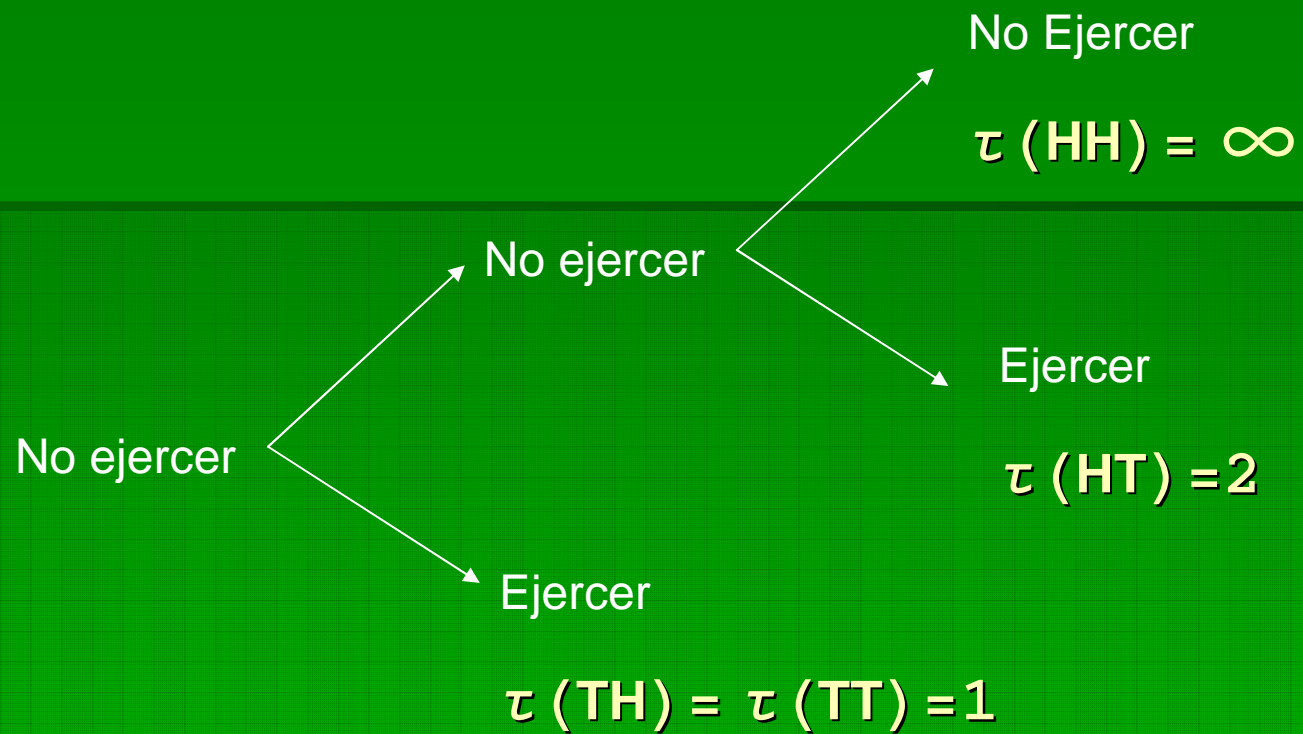
**Sea  $\tau =$  el tiempo que tardamos en ejercer la opción americana**

■ Entonces:  $\tau(HH) = \infty$

$$\tau(HT) = 2$$

$$\tau(TH) = 1$$

$$\tau(TT) = 1$$



REGLA PARA EJERCER EL PUT AMERICANO

- Las trayectorias donde  $\tau$  toma el valor infinito, quieren decir que la opción expirará sin ser ejercida.

- La variable aleatoria  $\tau$  definida sobre

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

toma valores en el conjunto

$$\{0, 1, 2, \infty\}$$

Podemos pensar que  $\tau$  “para” el problema de seguir cubriéndonos, al menos en 3 de los 4 puntos muestrales. Es un caso especial de los tiempos de paro que definimos a continuación:

# Definición 4.3.1 (Tiempos de paro)

- En un modelo Binomial de N periodos, un tiempo de paro es una variable aleatoria  $\tau$  que toma los valores  $0, 1, \dots, N$  ó infinito y satisface la condición de que si

$$\tau(w_1 w_2 \dots w_n w_{n+1} \dots w_N) = n$$

$$\Rightarrow \tau(w_1 w_2 \dots w_n w'_{n+1} \dots w'_N) = n \quad \forall w'_{n+1} \dots w'_N$$

- Cuando tenemos un proceso estocástico y un tiempo de paro, podemos definir un **Proceso de Paro**.
- **Por ejemplo, sea  $Y_n$  el proceso de los precios descontados para el Put Americano del ejemplo 4.2.1**

$$Y_0 = 1.36$$

$$Y_1(H) = 0.32, Y_1(T) = 2.40$$

$$Y_2(HH) = 0, Y_2(HT) = Y_2(TH) = 0.64, Y_2(TT) = 2.56$$

## Sea $\tau$ = el tiempo que tardamos en ejercer la opción americana

- Entonces:  $\tau(HH) = \infty$ ,  $\tau(HT) = 2$   
 $\tau(TH) = 1$ ,  $\tau(TT) = 1$

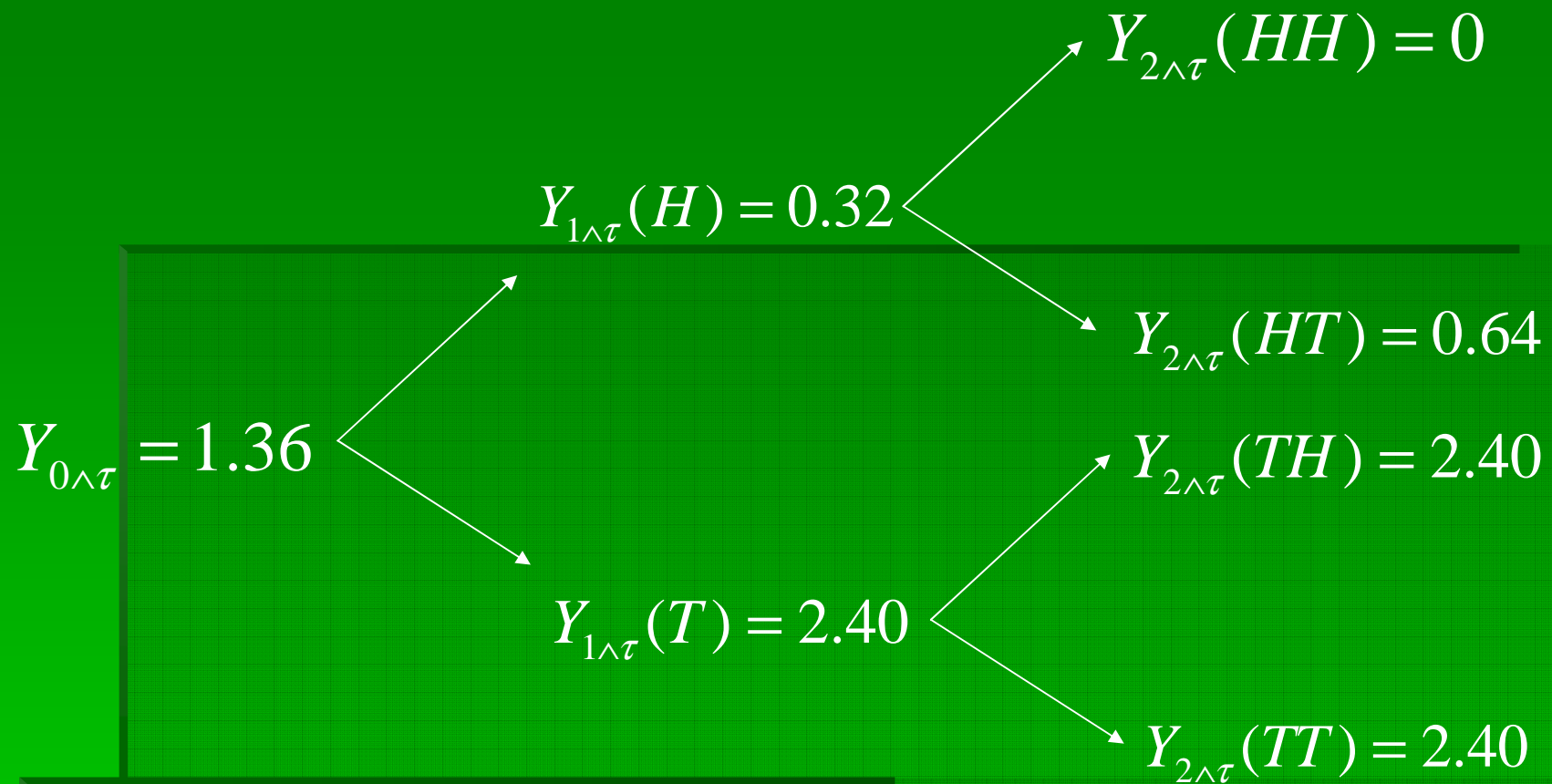
- Definimos el Proceso de Paro  $Y_{n \wedge \tau}$  como:

$$Y_{0 \wedge \tau} = Y_0 = 1.36 \quad (n \wedge \tau = \min\{n, \tau\})$$

$$Y_{1 \wedge \tau} = Y_1$$

$$Y_{2 \wedge \tau}(HH) = Y_2(HH) = 0, \quad Y_{2 \wedge \tau}(HT) = Y_2(HT) = 0.64$$

$$Y_{2 \wedge \tau}(TH) = Y_1(T) = 2.40, \quad Y_{2 \wedge \tau}(TT) = Y_1(TT) = 2.40$$



PROCESO DE PARO

**En este caso el proceso de precios descontados**

$$\{Y_n\}$$

**es una supermartingala pero no martingala y el Proceso de Paro**

$$\{Y_{n \wedge \tau}\}$$

**sí es martingala.**

# En particular:

$$Y_1(T) = 2.40$$

$$E_1(Y_2(T)) = \frac{1}{2}(Y_2(TH) + Y_2(TT)) = \frac{1}{2}(0.64 + 2.56) = 1.60$$

$$\therefore Y_1(T) > E_1(Y_2(T))$$

y

$$Y_{1 \wedge \tau}(T) = 2.40$$

$$E_1(Y_{2 \wedge \tau}(T)) = \frac{1}{2}(Y_{2 \wedge \tau}(TH) + Y_{2 \wedge \tau}(TT)) = \frac{1}{2}(2.40 + 2.40) = 2.40$$

$$\therefore Y_{1 \wedge \tau}(T) = E_1(Y_{2 \wedge \tau}(T))$$

- Bajo las probabilidades de riesgo neutral, en general un Proceso de Precios descontados de un Derivado Americano es una supermartingala.
- Sin embargo, si este proceso es detenido en un tiempo de ejercicio óptimo, se convierte en una martingala.

- Si el propietario de un derivado, permite pasar un tiempo en el cual la desigualdad de supermartingala es estricta, ha fallado en ejercerla de forma óptima.
- Hemos visto un ejemplo donde al parar un proceso que no era martingala, se hace martingala. Si nosotros detenemos un proceso que ya era martingala, obtendremos un proceso que vuelve a ser martingala.

# Teorema 4.3.2

## (Optional sampling-Part I)

- Una martingala detenida en un tiempo de paro, es una martingala.
- Una supermartingala (o submartingala) detenida en un tiempo de paro, es una supermartingala (o submartingala, respectivamente).

# Teorema 4.3.3

## (Optional sampling-Part II)

Sea  $\tau$  un tiempo de paro.

Sea  $X_n, n=0,1,\dots,N$  una submartingala.

$$\Rightarrow E(X_{n \wedge \tau}) \leq E(X_n)$$

Sea  $X_n, n=0,1,\dots,N$  una supermartingala.

$$\Rightarrow E(X_{n \wedge \tau}) \geq E(X_n)$$

Sea  $X_n, n=0,1,\dots,N$  una martingala.

$$\Rightarrow E(X_{n \wedge \tau}) = E(X_n)$$

# Fin

- Para consultar las presentaciones

Derivados Americanos

y

Tiempos de Paro

Así como el archivo xls de árboles del ejemplo entrar a:

[www.geocities.com/riesgoyproba/fm.htm](http://www.geocities.com/riesgoyproba/fm.htm)