Probabilidad 1[1]
Tarea examen 3 individual
Momentos de Variables Aleatorias
Fecha de entrega:Martes 2 de junio.

Semestre 2009-II

1. Considerar la siguiente función $f(x) = Kx^2 1_{(-K,K)}(x)$.
   a) Encuentra la constante K tal que la anterior sea una función de densidad para una v.a. X continua.
   b) Calcula la esperanza de X.
   c) Calcula la esperanza de X^2.
   d) Calcula la esperanza de e^X.
2. Calcula la esperanza de X con la función de densidad dada en cada inciso.
   a) $f_1(x) = e^{-x} 1_{(0,\infty)}(x)$
   b) $f_2(x) = 2e^{-2x} 1_{(0,\infty)}(x)$
   c) $f(x) = (\theta + 1)f_1(x) - (\theta)f_2(x), 0 < \theta < 1$
3. El experimento de lanzar 2 bolas en cuatro cajas es tal que cada bola tiene igual probabilidad de caer en alguna de ellas. Sea X el número de bolas en la primera caja
   a) ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad de X?
   b) Calcular la esperanza.

   Resuelva el ejercicio considerando que las bolas son distinguibles.
4. Una urna (1) contiene 5 bolas blancas y 6 bolas negras, otra urna (2) contiene 8 bolas blancas y 10 bolas negras. Dos bolas son aleatoriamente seleccionadas de la urna (1) y son puestas en la urna (2). Determine la función de distribución acumulativa de X, donde X mide el número de bolas blancas en la muestra seleccionada de la urna (1), y la función de distribución acumulativa de Y, donde Y es el número de bolas blancas en la urna (2) terminado el experimento.
   a) Calcular la esperanza de X y de Y.
   b) Calcular la esperanza de $e^{tX}, t \in R$
5. Una moneda equilibrada es lanzada hasta que aparece cara. Sea X el número de lanzamientos requeridos.
   a) Encontrar la función de probabilidad de X.
   b) Calcular la esperanza de X.
   c) Calcular la varianza de X.
   d) Calcular la función generadora de momentos de X.
6. Sea X una v.a. continua con función de densidad dada por:

   $$f_X(t) = |1 - t| \, 1_{[0,2]}(t)$$

   Encontrar la media y varianza de X.
7. Sea X una v.a. con media μ y varianza σ^2. Demostrar que $E\left[(X-b)^2\right]$, como una función de b, es minimizada cuando b=μ.

[1]Profesor David Josafat Santana Cobián

8. Distribución Geométrica. Supongamos que tenemos una sucesión infinita de ensayos independientes Bernoulli, en cada uno de los cuales la probabilidad de éxito es p. Para cada una de estas sucesiones definimos la variable aleatoria X como el número de fracasos antes de obtener el primer éxito. Por ejemplo la probabilidad de que X sea 2 es $(1-p)^2p$ porque tuvimos dos fracasos, cada uno con proba $1-p$ y un éxito con proba p. Decimos entonces que X tiene una distribución geométrica con parámetro p, y escribimos $X \sim Geo(p)$ cuando,

$$P(X=t) = \begin{cases} p(1-p)^t & ,t=0,1,2,... \\ 0 & ,c.o.c. \end{cases}$$

   a) Calcular la $E(X)$.
   b) Calcular la $Var(X)$.
   c) Calcular la fgm $M_X(t)$.
   d) Calcular la mediana y la moda de X.

9. Distribución Binomial Negativa. Si en una sucesión infinita de ensayos Bernoulli la variable aleatoria X cuenta el número de fracasos antes de obtener el r-ésimo éxito, entonces decimos que X tiene una distribución binomial negativa con parámetros r y p, y escribimos $X \sim BinNeg(r,p)$ cuando,

$$P(X=t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} r+t-1 \\ t \end{pmatrix} p^r(1-p)^t & ,t=0,1,2,... \\ 0 & ,c.o.c. \end{cases}$$

   Aparece el término p^r pues la sucesión de ensayos Bernoulli no concluye sino hasta obtener r éxitos. Podemos tener un número variable de fracasos, de ahí el término $(1-p)^t$, y finalmente el factor $\begin{pmatrix} r+t-1 \\ t \end{pmatrix}$ que nos dice las diferentes formas en que los r éxitos pueden aparecer en los $r+t-1$ ensayos realizados antes del último que necesariamente fue un éxito.

   a) Calcular la $E(X)$.
   b) Calcular la $Var(X)$.
   c) Calcular la fgm $M_X(t)$.
   d) Calcular la mediana y la moda de X.

10. Distribución Gamma. La distribución Exponencial es un caso en particular de otra distribución llamada Gamma que se caracteriza con dos parámetros, $n > 0, \lambda > 0$, y escribimos $X \sim Gamma(n, \lambda)$, si su función de densidad es:

$$f_X(t) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} 1_{[0,\infty)}(t)$$

   En la expresión anterior aparece el término $\Gamma(n)$. Ésta, es la función gamma que se define como la siguiente integral

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du$$

   para cualquier número real n tal que esta integral sea convergente. Esta función no es el tipo de funciones a las que estamos acostumbrados en los cursos de matemáticas en donde regularmente se conoce la expresión exacta de una cierta función y se utiliza esta expresión para evaluarla. En este caso, para evaluar la función gamma es necesario substituir el valor de n en el integrando y efectuar la integral infinita. Afortunadamente no evaluaremos esta integral para cualquier valor de n, sólo para algunos pocos valores, principalmente enteros, y nos ayudaremos de las siguientes propiedades:

a) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$
b) $\Gamma(n+1) = n!$ si n es entero
c) $\Gamma(2) = Gamma(1) = 1$
d) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

El nombre de esta distribución se deriva del hecho de que en su definición aparece la función gamma. Observemos además que la distribución exponencial es un caso particular de la distribución gamma. En efecto, si en la distribución gamma tomamos el parámetro n igual a 1, obtenemos la distribución exponencial con parámetro λ.

a) Calcular la $E(X)$.
b) Calcular la $Var(X)$.
c) Calcular la fgm $M_X(t)$.
d) Calcular la mediana y la moda de X.

11. Sea X tal que

$$P(X=1) = p = 1 - P(X=-1)$$

Encontrar $c \neq 1$ tal que $E[c^X] = 1$.

12. Sea X una v.a. que tiene valor esperado μ y varianza σ^2. Encontrar el valor esperado y varianza de

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$