Probabilidad 1[1]
Tarea 3 parte dos
Momentos de Variables Aleatorias

Semestre 2009-II

1. Distribución Geométrica. Supongamos que tenemos una sucesión infinita de ensayos independientes Bernoulli, en cada uno de los cuales la probabilidad de éxito es p. Para cada una de estas sucesiones definimos la variable aleatoria X como el número de fracasos antes de obtener el primer éxito. Por ejemplo la probabilidad de que X sea 2 es $(1-p)^2p$ porque tuvimos dos fracasos, cada uno con proba $1-p$ y un éxito con proba p. Decimos entonces que X tiene una distribución geométrica con parámetro p, y escribimos $X \sim Geo(p)$ cuando,

$$P(X=t)=\begin{cases} p(1-p)^t & ,t=0,1,2,... \\ 0 & ,c.o.c. \end{cases}$$

   a) Calcular la $E(X)$.
   b) Calcular la $Var(X)$.
   c) Calcular la fgm $M_X(t)$.
   d) Calcular la mediana y la moda de X.

2. Distribución Binomial Negativa. Si en una sucesión infinita de ensayos Bernoulli la variable aleatoria X cuenta el número de fracasos antes de obtener el r-ésimo éxito, entonces decimos que X tiene una distribución binomial negativa con parámetros r y p, y escribimos $X \sim BinNeg(r,p)$ cuando,

$$P(X=t)=\begin{cases} \binom{r+t-1}{t} p^r(1-p)^t & ,t=0,1,2,... \\ 0 & ,c.o.c. \end{cases}$$

   Aparece el término p^r pues la sucesión de ensayos Bernoulli no concluye sino hasta obtener r éxitos. Podemos tener un número variable de fracasos, de ahí el término $(1-p)^t$, y finalmente el factor $\binom{r+t-1}{t}$ que nos dice las diferentes formas en que los r éxitos pueden aparecer en los $r+t-1$ ensayos realizados antes del último que necesariamente fue un éxito.

   a) Calcular la $E(X)$.
   b) Calcular la $Var(X)$.
   c) Calcular la fgm $M_X(t)$.
   d) Calcular la mediana y la moda de X.

3. Distribución Hipergeométrica. Supongamos que tenemos un conjunto de N objetos de los cuales K son de una primera clase y $N-K$ son de una segunda clase. Supongamos que de este conjunto tomamos una muestra aleatoria de tamaño n, la muestra es sin reemplazo y el orden de los objetos seleccionados no importa. El espacio muestral de este experimento consiste de todas las posibles muestras de tamaño n que se pueden obtener del conjunto mayor de tamaño N. La cardinalidad del espacio muestral es $\binom{N}{n}$. Si para cada muestra definimos la variable aleatoria X como el número de objetos de la primera clase contenidos en la muestra seleccionada, entonces X puede tomar los valores $0,1,2,...,n$, suponiendo $n \leq K$. La probabilidad de que X tome un valor t estaría dada por la fórmula que enunciamos a continuación. Decimos que X tiene una distribución hipergeométrica con parámetros N, K y n, y escribimos $X \sim HiperGeo(N,K,n)$ si:

[1]Profesor David Josafat Santana Cobián

$$P(X=t)=\begin{cases} \dfrac{\begin{pmatrix} K \\ t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-K \\ n-t \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} & ,t=0,1,2,... \\ 0 & ,c.o.c. \end{cases}$$

El término $\begin{pmatrix} K \\ t \end{pmatrix}$ nos dice las diferentes formas en que de los K objetos de la primera clase se pueden escoger t de ellos, y el término $\begin{pmatrix} N-K \\ n-t \end{pmatrix}$ es nuevamente las diferentes formas de escoger $n-t$ objetos de la totalidad de $N-K$ objetos de la segunda clase. Usamos el principio multiplicativo para obtener el número total de muestras diferentes en donde t objetos son de la primera clase y $n-x$ objetos son de la segunda clase.

a) Calcular la $E(X)$.

b) Calcular la $Var(X)$.

c) Calcular la fgm $M_X(t)$.

d) Calcular la mediana y la moda de X.

4. Distribución Gamma. La distribución Exponencial es un caso en particular de otra distribución llamada Gamma que se caracteriza con dos parámetros, $n>0,\lambda>0$, y escribimos $X\sim Gamma(n,\lambda)$, si su función de densidad es:

$$f_X(t)=\tfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t}1_{[0,\infty)}(t)$$

En la expresión anterior aparece el término $\Gamma(n)$. Ésta, es la función gamma que se define como la siguiente integral

$$\Gamma(n)=\textstyle\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du$$

para cualquier número real n tal que esta integral sea convergente. Esta función no es el tipo de funciones a las que estamos acostumbrados en los cursos de matemáticas en donde regularmente se conoce la expresión exacta de una cierta función y se utiliza esta expresión para evaluarla. En este caso, para evaluar la función gamma es necesario substituir el valor de n en el integrando y efectuar la integral infinita. Afortunadamente no evaluaremos esta integral para cualquier valor de n, sólo para algunos pocos valores, principalmente enteros, y nos ayudaremos de las siguientes propiedades:

a) $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$

b) $\Gamma(n+1)=n!$ si n es entero

c) $\Gamma(2)=Gamma(1)=1$

d) $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

El nombre de esta distribución se deriva del hecho de que en su definición aparece la función gamma. Observemos además que la distribución exponencial es un caso particular de la distribución gamma. En efecto, si en la distribución gamma tomamos el parámetro n igual a 1, obtenemos la distribución exponencial con parámetro λ.

a) Calcular la $E(X)$.

b) Calcular la $Var(X)$.

c) Calcular la fgm $M_X(t)$.

d) Calcular la mediana y la moda de X.

5. Distribución Beta. Decimos que la variable aleatoria continua X tiene una distribución beta con parámetros $a > 0$ y $b > 0$, y escribimos $X \sim Beta(a, b)$, cuando su función de densidad es:

$$f_X(t) = \frac{1}{B(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} 1_{(0,1)}(t)$$

El término $B(a, b)$ se conoce como la función beta, y de allí adquiere su nombre esta distribución. La función beta se define como sigue:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

para números reales $a > 0$ y $b > 0$. Esta función está relacionada con la función gamma a través de la identidad:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

   a) Calcular la $E(X)$.
   b) Calcular la $Var(X)$.
   c) Calcular la fgm $M_X(t)$.
   d) Calcular la mediana y la moda de X.

6. Para una v.a. N con soporte $0, 1, 2, ...$, demostrar que

$$E[N] = \sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i)$$

7. Para una v.a. N con soporte $0, 1, 2, ...$, demostrar que

$$\sum_{i=0}^{\infty} iP(N > i) = \frac{1}{2}\left(E[N^2] - E[N]\right)$$

8. Sea X tal que

$$P(X = 1) = p = 1 - P(X = -1)$$

Encontrar $c \neq 1$ tal que $E[c^X] = 1$.

9. Sea X una v.a. que tiene valor esperado μ y varianza σ^2. Encontrar el valor esperado y varianza de

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

10. Sea X una v.a. con parámetros n y p. Demostrar que

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$

11. Sea $X \sim Poi(\lambda)$, demostrar que $P(X = i)$ crece monótonamente y después decrece monótonamente conforme se incrementa i, alcanzando su máximo cuando i es el éntero más grande que no excede λ.
HINT: Considerar $P(X = 1)/P(X = i - 1)$.

12. Sea $X \sim Poi(\lambda)$, demostrar que $P(X \text{ sea par}) = (1/2)[1 + e^{-2\lambda}]$.

13. Sea $X \sim Geo(p)$, demostrar que $P(X = n + k/X > n) = P(X = k)$.

14. Sea $X \sim BinNeg(r, p)$, y sea $Y \sim Bin(n, p)$, demostrar que $P(X > n) = P(Y < r)$.