PROBABILIDAD Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS.

Proceso de Poisson: Problemas y cuestiones.

1. Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 2$ que describe el número de urgencias que se registran en el Hospital 25 de abril en el intervalo de tiempo $(0, t]$.

   a) Obtener la probabilidad de que:

      1) Se registren menos de dos urgencias en dos horas.

      2) Se haya contabilizado una urgencia al cabo de una hora y tres urgencias al cabo de dos horas desde el inicio del proceso.

      3) Se registren un mínimo de 5 urgencias al cabo de dos horas si se sabe que ya se habían registrado 3 urgencias una hora antes.

   b) Calcula la función de probabilidad de $N(t)$ si suponemos que la tasa de llegadas λ de dicho proceso es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 2.

2. El tiempo de vida de una componente electrónica del sistema de emergencia de un submarino es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 0.5 años. Cuando se produce la rotura de la componente que está en funcionamiento se reemplaza inmediatamente por una nueva de las mismas características. Calcula el número mínimo de componentes que debe llevar el submarino en el almacén si para un viaje de un año de duración se necesita asegurar una probabilidad menor que 0.02 de que el sistema de emergencia sea inoperante debido a la falta de componentes electrónicas de estas características.

3. El número de clientes que entra en un supermercado se produce según un proceso de Poisson de parámetro 5 por minuto. Si el supermercado abre sus puertas a las 9 a.m. y no hay ningún cliente en la puerta esperando su apertura,

   a) ¿Cual es la probabilidad de que a las 9.30 a.m. hayan entrado 150 personas en el supermercado?

   b) Si a las 10 a.m. han entrado 300 personas en el supermercado, ¿cual es la probabilidad de que las 50 primeras hayan llegado entre las 9 a.m. y las 9.10 a.m.?.

   c) Si una persona llega a las 10 a.m., ¿con qué probabilidad llegará el siguiente cliente antes de cinco minutos?.

   d) Si cada persona que llega el supermercado puede entrar al mismo con probabilidad 0.6 o bien pasar de largo con probabilidad 0.4, ¿cual sería el número medio de personas que han entrado en el supermercado a las 10 a.m.?

4. Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson de parámetro λ. Calcula el coeficiente de correlación entre $N(t)$ y $N(s)$ con $t > 0$ y $s > 0$.

5. Supongamos (con mucha imaginación) que las llegadas de los estudiantes a la parada del autobús Valencia - Campus de Burjassot se producen según un proceso de Poisson de parámetro λ=120 por hora y que $N(t = 0) = 0$. Sea T la variable aleatoria que describe el tiempo en minutos que tardará en

pasar el primer autobús. Suponiendo que T es independiente del proceso de llegadas a la parada y que su distribución es Uniforme en el intervalo (0,10) minutos, calcula:

a) $P[N(T) = 0]$

b) $E[N(T)]$

c) Sabemos que el autobús ha pasado por la parada y ha recogido a todos los estudiantes en algún instante de tiempo del intervalo $(0, 10]$, ¿cual es la probabilidad de que en el instante de tiempo t=10 minutos no haya ningún estudiante en la parada? (Nota: Si en el intervalo $(0, t]$ se ha registrado en suceso, su tiempo de ocurrencia es uniforme en dicho intervalo).

6. Sean $\{N_1(t), t > 0\}$ y $\{N_2(t), t > 0\}$ dos procesos de Poisson independientes de parámetro $\lambda > 0$ y $\mu > 0$ respectivamente. Calcula:

   a) Probabilidad de que $N_1(t) = 1$ antes de que $N_2(t) = 1$, $t > 0$.

   b) Probabilidad de que $N_1(t) = 2$ antes de que $N_2(t) = 2$, $t > 0$.

7. El comportamiento de un sistema mecánico depende de k posibles condiciones ambientales incompatibles E_i, $i = 1, \ldots, k$ que pueden producirse con probabilidades a_i, $i = 1, \ldots, k$, respectivamente, con $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 1$. En la situación ambiental E_i se producen situaciones definidas como críticas según un proceso de Poisson de parámetro λ_i, que a su vez pueden producir, cada una de ellas de forma independiente, un fallo total del sistema con probabilidad p_i. Obtener la probabilidad de que se produzca un fallo total del sistema en un intervalo de tiempo de longitud t.

8. Sea $\{N_1(t), t > 0\}$ y $\{N_2(t), t > 0\}$ dos procesos de Poisson independientes de parámetro $\lambda > 0$ y $\mu > 0$ respectivamente. Obtener la probabilidad de que se registren k ocurrencias del primer proceso en el intervalo de tiempo transcurrido entre dos ocurrencias consecutivas del segundo.

9. Consideremos n procesos de Poisson independientes $\{N_i(t), t > 0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ de parámetro λ. Obtén la distribución del tiempo transcurrido hasta que se registren al menos dos sucesos en cada proceso.

10. La empresa de mensajería Gavilán atiende únicamente dos tipos de encargos, los de tipo A y los de tipo B. Sea $N_A(t)$ $[N_B(t)]$ el número de encargos de tipo A [tipo B] que recibe la empresa en el intervalo $(0, t]$. El proceso $\{N_A(t), t > 0\}$ es un proceso de Poisson de parámetro λ siendo λ a su vez una variable aleatoria con distribución exponencial de media 4 mensajes por unidad de tiempo. El proceso $\{N_A(t), t > 0\}$ es un proceso de Poisson de media 4 mensajes por unidad de tiempo. Ambos procesos son independientes.

    a) Probabilidad de que en el intervalo $(0, t]$ no se reciban mensajes de ningún tipo.

    b) Sea $N(t)$ la variable que describe el número total de encargos que recibe la empresa en $(0, t]$ ¿Es $\{N(t), t > 0\}$ un proceso de Poisson?.

    c) Sea T la variable aleatoria que describe el tiempo que transcurre desde que la empresa inicia su funcionamiento hasta que recibe su primer encargo. Obtén su distribución.