

Productos Derivados Americanos

Introducción

- Los contratos de opciones **Europeas** especifican una fecha de maduración (expiration date) y si la opción será ejercida completamente.
- Estas opciones se pueden ejercer sólo en la fecha de maduración.

- Si el propietario de una opción, además de poder ejercerla en la fecha de maduración, la puede ejercer en cualquier momento anterior, la opción se llama **Americana.**

- Debido a la alternativa adicional de poder ejercer la opción antes de la fecha de maduración, la opción Americana vale al menos tanto como la Europea.
- En algunos casos, como en las opciones Call, el ejercer la opción antes de la fecha de maduración no conviene; así una opción Call Americana vale lo mismo que una Call Europea.

- En cambio en opciones Put Americanas la posible diferencia en el beneficio que da el ejercer antes de la fecha de maduración puede ser importante. Por lo tanto el valor de un Put Americano es mayor que el de un Put Europeo, salvo casos particulares.

- Una opción intermedia entre las Europeas y las Americanas es la **Bermuda**. Esta opción permite ejercerla antes de la fecha de maduración, pero sólo en un número finito de fechas preestablecidas en el contrato de la opción.

- Como una opción Americana puede ser ejercida en cualquier tiempo n antes de su maduración, su valor al tiempo n no puede ser menor que el payoff en ese tiempo.
- El payoff al tiempo n es llamado el **valor intrínseco** de la opción.

- Contrario a las opciones Europeas, donde el proceso del precio descontado es una martingala*(Teo. 2.4.7), en las Americanas el proceso de precio descontado bajo la medida de riesgo neutral, es una supermartingala**.

$$*M_n = E_n(M_{n+1}) , \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$**M_n \geq E_n(M_{n+1}) , \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

- El poseedor de la opción podría no ejercerla en el tiempo óptimo, entonces la opción tiende a perder valor, lo que implica la supermartingala.
- Durante un intervalo de tiempo donde no es óptimo ejercer, el proceso de precios se comporta como martingala.

- Para poner precio a una opción Americana, igual que con la opción Europea, tenemos que imaginar vender la opción a cambio de un capital inicial y usar éste para cubrir nuestra posición.
- En este caso, necesitamos estar listos para cumplir con nuestra obligación en cualquier momento antes de la fecha de maduración, ya que no sabemos cuando será ejercida.

Derivados Americanos independientes de la trayectoria.

- Recordemos el algoritmo para ponerle precio a los derivados Europeos cuando el payoff es independiente de la trayectoria.

- En un modelo binomial de **N** periodos, con **u** y **d** como factores de incremento y decremento, y **r** la tasa de interés que cumplen con la condición **$0 < d < 1 + r < u$** , consideremos un producto derivado con un **payoff** de $g(S_N)$ al tiempo N para alguna función g, entonces:

$$i)V_N(s) = \max\{g(s), 0\}$$

$$ii)V_n(s) = \frac{1}{1+r}[\bar{p}V_{n+1}(us) + \bar{q}V_{n+1}(ds)] ; \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$con \quad \bar{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \quad y \quad \bar{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$$

- Y como se vio en 1.2.17 del capítulo 1, el portafolio que replica la opción y cubre una short position es dada por:

$$\Delta_n = \frac{v_{n+1}(uS_n) - v_{n+1}(dS_n)}{(u - d)S_n} ; n = 0, 1, \dots, N$$

- Ahora consideremos un derivado Americano, otra vez con un payoff especificado por una función g . En cualquier periodo $n \leq N$, el poseedor del derivado puede ejercerlo y recibir el pago $g(S_n)$, sólo dependiente de n y no de la trayectoria.

- Así el portafolio que cubre una short position debería valer X_n que satisfaga:
 $X_n \geq g(S_n); n=0,1,\dots,N$.
- El valor del producto derivado en cada tiempo n , es al menos el valor intrínseco $g(S_n)$, y el valor del portafolio que replica el derivado en ese tiempo, debe ser igual al valor del derivado $v(S_n)$.

- Esto sugiere que para ponerle precio al derivado, debemos reemplazar el algoritmo del derivado Europeo por el siguiente “algoritmo Americano”:

$$i) V_N(s) = \max\{g(s), 0\}$$

$$ii) V_n(s) = \max \left\{ g(s), \frac{1}{1+r} [\bar{p} V_{n+1}(us) + \bar{q} V_{n+1}(ds)] \right\},$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1 \quad y \quad \bar{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \quad y \quad \bar{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$$

Ejemplo:

- Put Americano.
- $S_0=4$ Precio de la acción actual
- $K=5$ Strike Price
- $N=2$ Periodos
- $r=1/4$ Tasa interés libre de riesgo
- $u=2, d=1/u$ Factores de incremento o decremento del precio
- $g(s)=K-s$ Payoff (valor intrínseco)

- Resultados:
- $S_0=4$, $S_1(H)=8$, $S_1(T)=2$
- $S_2(HH)=16$, $S_2(HT)=S_2(TH)=4$, $S_2(TT)=1$
- **$v_0(4)=1.36$** , $v_1(8)=0.4$, $v_1(2)=3$
- $v_2(16)=0$, $v_2(4)=1$, $v_2(1)=4$
- Ahora queremos replicar la opción.
Comenzamos con $X_0=1.36$ como nuestro capital inicial.

- Supongamos que sube el precio el primer periodo, entonces necesitamos que:

$$v_1(S_1(H)) = S_1(H)\Delta_0 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0)$$

Despejando

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \frac{v_1(S_1(H)) - (1+r)(X_0)}{S_1(H) - (1+r)(S_0)} \\ &= \frac{0.4 - 1.25(1.36)}{8 - 1.25(4)} = -0.43\end{aligned}$$

- Por otro lado, si en el primer periodo el precio bajó, entonces:

$$v_1(S_1(T)) = S_1(T)\Delta_0 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0)$$

Despejando

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \frac{v_1(S_1(T)) - (1+r)(X_0)}{S_1(T) - (1+r)(S_0)} \\ &= \frac{3 - 1.25(1.36)}{2 - 1.25(4)} = -0.43\end{aligned}$$

- Además se obtiene el mismo resultado usando la siguiente fórmula:

$$\Delta_n = \frac{v_{n+1}(uS_n) - v_{n+1}(dS_n)}{(u - d)S_n} ; n = 0, 1, \dots, N$$

$$\Delta_0 = \frac{v_1(S_1(H)) - v_1(S_1(T))}{(u - d)(S_0)}$$

$$= \frac{0.4 - 3}{(2 - 1/2)(4)} = -0.43$$

- En cualquiera de los 2 casos (H o T), si comenzamos con un capital inicial $X_0=1.36$ y tomamos la posición de -0.43 acciones, entonces

$$X_1=v_1(S_1)$$

No importando si subió o bajó el precio.

- Supongamos que el precio en el primer periodo bajó, y podría ser que el poseedor de la opción la ejerza, en ese caso hay que entregarle el valor de $v_1(2)=3$ que tenemos debido a que nos cubrimos ante ese posible reclamo, y ya no serán necesarias coberturas adicionales. Sin embargo, si el poseedor de la opción no la ejerce, la opción sigue viva y debemos continuar cubriéndonos.

- Ahora, suponiendo que el precio baja el primer periodo y no se ejerce la opción, entonces el portafolio valdrá $X_1(T)=v_1(S_1(T))=v_1(2)=3$.
- El precio sube o baja al siguiente periodo a 4 ó a 1 respectivamente. Para cubrirnos debemos tener al tiempo 1 un portafolio valuado en $(1/1.25)(.5 v_2(4)+.5 v_2(1))=2$ (Teo 2.4.7, Fórmula del precio con riesgo neutral), pero tenemos un portafolio valuado en 3, por lo que podemos usar \$1 y continuar cubriéndonos con \$2.
- Ahora, consumimos \$1 y cambiamos nuestra posición a $\Delta_1(T)$ acciones.

- Supongamos que sube el precio el segundo periodo, entonces necesitamos que:

$$v_2(S_2(TH)) = S_2(TH)\Delta_1(T) + (1+r)(X_1 - \Delta_1(T)S_1(T))$$

Despejando

$$\begin{aligned}\Delta_1(T) &= \frac{v_2(S_2(TH)) - (1+r)(X_1)}{S_2(TH) - (1+r)(S_1(T))} \\ &= \frac{1 - 1.25(2)}{4 - 1.25(2)} = -1\end{aligned}$$

- Supongamos que baja el precio el segundo periodo, entonces necesitamos que:

$$v_2(S_2(TT)) = S_2(TT)\Delta_1(T) + (1+r)(X_1 - \Delta_1(T)S_1(T))$$

Despejando

$$\begin{aligned}\Delta_1(T) &= \frac{v_2(S_2(TT)) - (1+r)(X_1)}{S_2(TT) - (1+r)(S_1(T))} \\ &= \frac{4 - 1.25(2)}{1 - 1.25(2)} = -1\end{aligned}$$

- Además se obtiene el mismo resultado usando la siguiente fórmula:

$$\Delta_n = \frac{v_{n+1}(uS_n) - v_{n+1}(dS_n)}{(u - d)S_n} ; n = 0, 1, \dots, N$$

$$\Delta_1(T) = \frac{v_2(S_2(TH)) - v_2(S_2(TT))}{(u - d)(S_1(T))}$$

$$= \frac{1 - 4}{(2 - 1/2)(2)} = -1$$

- En cualquiera de los 2 casos (TH o TT), si comenzamos con un capital inicial $X_1=2$ y tomamos la posición de -1 acciones, entonces:

$$X_2 = v_2(S_2)$$

No importando si subió o bajó el precio en el segundo periodo.

- Finalmente supongamos el caso donde en el primer periodo la acción sube de precios y la opción no es ejercida.
- Al tiempo 1 tendremos un portafolio valuado en $X_1(H)=0.4$.
- El cálculo es similar al anterior:

$$v_2(S_2(HH)) = S_2(HH)\Delta_1(H) + (1+r)(X_1 - \Delta_1(H)S_1(H))$$

Despejando

$$\begin{aligned}\Delta_1(H) &= \frac{v_2(S_2(HH)) - (1+r)(X_1)}{S_2(HH) - (1+r)(S_1(H))} \\ &= \frac{0 - 1.25(0.4)}{16 - 1.25(8)} = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$v_2(S_2(HT)) = S_2(HT)\Delta_1(H) + (1+r)(X_1 - \Delta_1(H)S_1(H))$$

Despejando

$$\begin{aligned}\Delta_1(H) &= \frac{v_2(S_2(HT)) - (1+r)(X_1)}{S_2(HT) - (1+r)(S_1(H))} \\ &= \frac{1 - 1.25(0.4)}{4 - 1.25(8)} = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$\Delta_n = \frac{v_{n+1}(uS_n) - v_{n+1}(dS_n)}{(u-d)S_n} ; \quad n = 0, 1, \dots, N$$

$$\begin{aligned}\Delta_1(H) &= \frac{v_2(S_2(HH)) - v_2(S_2(HT))}{(u-d)(S_1(H))} \\ &= \frac{0 - 1}{(2 - 1/2)(8)} = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

- En cualquiera de los 2 casos (HH o HT), si comenzamos con un capital inicial $X_1=0.4$ y tomamos la posición de $-1/12$ acciones, entonces:

$$X_2 = v_2(S_2)$$

No importando si subió o bajó el precio en el segundo periodo.

Teo. 4.2.2. Replicación de un Derivado Americano

- Considerar un Modelo Binomial de N periodos con $0 < d < 1+r < u$ y

$$\bar{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \quad y \quad \bar{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$$

Sea $g(s)$ una función de payoff dada, y definamos recursivamente hacia atrás la sucesión de funciones $v_0(s), v_1(s), v_2(s), \dots, v_N(s)$ con el algoritmo Americano

- Ahora definamos:

$$\Delta_n = \frac{v_{n+1}(uS_n) - v_{n+1}(dS_n)}{(u - d)S_n},$$

$$C_n = v_n(S_n) - \frac{1}{1+r} [\bar{p}v_{n+1}(uS_n) + \bar{q}v_{n+1}(dS_n)]$$

Donde el rango de n está entre 0 y N-1.

Si establecemos $X_0 = v_0(S_0)$ y definimos recursivamente hacia delante los valores del portafolio $X_1, X_2, \dots, X_N$ por:

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - C_n - \Delta_n S_n)$$

$$\Rightarrow X_n(w_1 \dots w_n) = v_n(S_n(w_1 \dots w_n)) \quad \forall n \text{ y } \forall w_1 \dots w_n$$