Segundo examen parcial de Probabilidad I[1]

Instrucciones. Los ejercicios 1,2,7 y 8 son obligatorios. De los ejercicios $3,...,6$ sólo hacer 2; i.e. en total sólo haz 6 ejercicios. Este es un examen de desarrollo, por lo tanto deben aparecer todos los pasos que lo llevan a su respuesta. Trabaje de manera clara y ordenada.

1. Sea la función $F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1-(1+t)e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$

   (a) [**4 Punto**] Muestre que $F_X(t)$ es una función de distribución acumulativa.

   (b) [**4 Puntos**] Exprese $F_X(t)$ en términos de funciones indicadoras.

   (c) [**4 Puntos**] Determine $f_X(t)$.

   (d) [**4 Puntos**] Calcule $P(-2 < X \leq 3)$ y $P(X \geq 3)$.

   (e) [**4 Puntos**] Diga si $f_X(1) = P(X = 1)$ y explique su respuesta.

2. Cinco pelotas numeradas con 1,2,3,4 y 5 se encuentran en una urna. Se extraen dos pelotas al azar de la urna. Sea X el mayor de los números seleccionados.

   (a) [**4 Punto**] Muestre que X es una variable aleatoria.

   (b) [**8 Puntos**] Determine la $f_X(t)$.

   (c) [**8 Puntos**] Determine la $F_X(t)$.

3. [**20 Puntos**] Sea X una v.a. con función de densidad $f_X(t) = |1-t|\, 1_{[0,2]}(t)$. Determine la $F_X(t)$ y grafique a ambas, $f_X(t)$ y $F_X(t)$.

4. Sea $f_X(x) = \frac{1}{2}\left[\theta 1_{(0,1)}(x) + 1_{[1,2]}(x) + (1-\theta)\, 1_{(2,3)}(x)\right]$ donde θ es una constante que satisface $0 \leq \theta \leq 1$.

   (a) [**5 Puntos**] Compruebe que $f_X(x)$ es una función de densidad

   (b) [**10 Puntos**] Encuentre la función de distribución acumulativa de X

   (c) [**5 Puntos**] Graficar $F_X(x)$ con $\theta = \frac{1}{2}$.

5. [**20 Puntos**] Si la función de distribución de X está dada por:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \leq t < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq t < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \leq t < \frac{7}{2} \\ 1 & t \geq \frac{7}{2} \end{cases}$$

   reescribir en términos de funciones indicadoras y calcular la función de probabilidad.

6. Un sistema de construcción contra cohetes está construido con n unidades de radar que funcionan independientemente, cada una con probabilidad de 0.9 de detectar un cohete que ingresa en la zona que cubren todas las unidades.

   (a) [**4 Puntos**] Si $n = 5$ y un cohete entra en la zona, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro unidades detecten el cohete?

   (b) [**6 Puntos**] Si $n = 5$ y un cohete entra en la zona, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una unidad detecte el cohete?

[1]Profesor David Josafat Santana Cobián

(c) **[10 Puntos]** ¿Cuál debe de ser el valor de n para que la probabilidad de detectar el cohete al entrar en la zona, sea de 0.999?

7. **[20 Puntos]** De los elementos metálicos producidos por una máquina el 5% son defectuosos y el 95% restantes son buenos. ¿Cuántos elementos debe de producir la máquina para que la probabilidad de que haya al menos un defectuoso sea igual o mayor a 0.5?

8. El tiempo en horas requerido para reparar una máquina se distribuye exp(2), esto es,

$$f_X(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}1_{[0,\infty)}(t)$$

   (a) **[10 Puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de reparación exceda dos horas?

   (b) **[10 Puntos]** ¿Cuál es la probabilidad condicional de que el tiempo de reparación se lleve al menos 10 horas dado que esta reparación excede 9 horas?

¡¡Buena Suerte!!