TÓPICOS DE ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

(*TOPICS OF GEOMETRIC ALGEBRA*)

Ricardo Soares Vieira

ricardosoaresvieira@gmail.com

O presente texto tem por objetivo divulgar e esclarecer conceitos sobre álgebra geométrica. Logo no início do texto, apresentamos alguns personagens novos para a maioria dos estudantes, objetos como bivetores, trivetores etc, com o intuito de tornar mais natural a introdução do conceito de k-vetores. Há também um resumo histórico do desenvolvimento do cálculo vetorial e, em seguida, discutimos os principais tópicos de álgebra geométrica (temas como a soma e o produto geométrico de k-vetores, um formalismo matricial para a álgebra geométrica, dualidade de Hodge, análise de funções vetoriais etc.). Apresentamos quais as relações existentes entre a álgebra de Clifford, os quaternions de Hamilton e a álgebra de Gibbs-Heaviside. Finalmente, como exemplo de aplicação da álgebra geométrica, demonstramos como as equações de Maxwell podem ser reunidas em uma única equação pelo formalismo aqui abordado.

The present text has as objective to divulge and to clear concepts on geometric algebra. Already in the beginning of the text, we introduce some new characters for most of the students, objects like bivectors, trivectors etc., with the intention of turning more natural the introduction of the concept of k-vectors. There is also a historical summary of the vectors calculus development and, soon after, we discuss the principal topics of geometric algebra (themes like the sum and the geometric product of k-vectors, a matrix formalism for the geometric algebra, Hodge's duality, vectors functions analysis, etc.). We present which the existent relationships among the Clifford's algebra, the quaternions Hamilton and the Gibbs-Heaviside's algebra. Finally, as example of a geometric algebra application, we demonstrate as the Maxwell's equations can be resumed to a unique equation by the formalism here approached.

§1. Introdução

Já estamos bem acostumados com o emprego de vetores em física. De fato, a introdução destas entidades matemáticas permitiu uma abordagem mais simples dos fenômenos naturais. O conceito de vetor foi criado justamente para descrever grandezas que possuem propriedades geométricas tais como direção e sentido e que, por este motivo, não podiam ser completamente descritas por meros números.

Várias são as grandezas que só ficam determinadas quando especificamos a sua direção ao longo de uma reta, tais grandezas são ditas vetoriais, e são representadas por vetores. Os vetores podem ser vistos, pelo ponto de vista geométrico, como segmentos de reta orientados, a representação das grandezas vetoriais é feita da seguinte forma: o comprimento do vetor informa a magnitude da grandeza, a direção desta é determinada pela reta-suporte do vetor e o seu sentido por uma flecha colocada em uma das extremidades dele. Estas três propriedades, magnitude, direção e sentido, são suficientes para descrever um vetor em sua totalidade. A velocidade de um corpo, a força que nele atua, o campo elétrico gerado por um elétron etc., são exemplos de grandezas vetoriais.

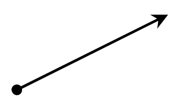

Figura 1: *Um vetor*

Em contrapartida, existem outras grandezas ficam determinadas apenas por uma magnitude, não necessitando de uma direção. Estas grandezas podem ser representadas por números mesmo e são chamadas de escalares. A energia, a carga elétrica, a massa de um corpo são alguns exemplos de escalares...

Agora, o que muitos não sabem (núcleo do assunto aqui abordado), é que certas grandezas ficam mais bem representadas por outros objetos com características geométricas que não os vetores. Por exemplo, grandezas angulares como o momentum angular ou o torque de uma força, ficam mais bem representadas por fragmentos de plano orientados do que por segmentos de reta orientados. Realmente, estas grandezas não atuam ao longo de uma reta, mas sim ao longo de um plano, o qual não pode ser determinado por um vetor a menos que estejamos no espaço tridimensional. Deste modo, para melhor representar tais grandezas, introduzimos um novo objeto vetorial chamado *bivetor*, que nada mais é do que um fragmento de plano orientado: o valor de sua área informa a magnitude da grandeza por ele representada, a direção da grandeza é determinada pela direção do plano-suporte do bivetor, e também admite dois sentidos: horário ou anti-horário. Aliás, até mesmo o ângulo – que geralmente é tratado como um número – fica mais bem representado por um bivetor, já que ele só fica completamente determinado quando lhe fornecemos um valor, um plano na qual ele é descrito e um sentido horário ou anti-horário segundo o qual o medimos – é, pois, claramente uma grandeza bivetorial!

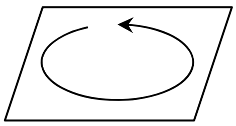

Figura 2: *Um bivetor*

Analogamente, podemos admitir outros objetos geométricos, além destes. Se considerarmos um espaço k-dimensional, poderemos então definir desde escalares até k-vetores, (*e.g.*, trivetores, quadrivetores, pentavetores, etc.), por exemplo, um trivetor estará associado a triedos orientados, já um quadrivetor, por sua vez, estará associado a objetos geométricos quadridimensionais (cuja imagem a nossa pobre cabeça é incapaz de formar, mas é capaz de admitir)...

Seria interessante assumir – o que faremos – que qualquer objeto utilizado para descrever grandezas físicas seja um *objeto vetorial*, pois que esta definição permite incluir os escalares ao conjunto de objetos vetoriais, o qual pode geometricamente ser associado a pontos.

A introdução destes objetos vetoriais – que podem ser vistos como "números dirigidos" ou ainda "números geométricos" – nos permite criar um poderoso formalismo para o estudo dos fenômenos naturais: a Álgebra Geométrica. Veremos agora como estes objetos foram introduzidos no decorrer da história através de uma breve viagem ao tempo pela história do cálculo vetorial.

§2. Um pouco de história.

A história do cálculo vetorial remonta tempos longínquos desde a Grécia Antiga, onde Euclides fundou a sua geometria. Mas foi somente após muito tempo, com René Descartes, que a existência das grandezas vetoriais ficou mais evidente. Descartes deu à geometria de Euclides um formalismo analítico, onde cada ponto do espaço pôde ser representado por um par ordenado de números (cada qual relacionado a um dos eixos de um sistema de coordenadas). Tempos depois, outro grande matemático, Carl F. Gauss, e independentemente dele, Jean R. Argand, estudaram um novo campo da matemática que a princípio não tinha nada a ver com vetores, mas que foram essenciais à sua formulação: os números complexos. Perceberam eles que tais objetos matemáticos podiam ser representados por um par ordenado tal qual utilizado no plano cartesiano: bastava convencionar que um dos eixos do sistema representasse o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e o outro o conjunto $\mathbb{I}$ dos números imaginários (cujos elementos são raízes quadradas de números negativos) que qualquer número complexo poderia ser representado por um ponto neste plano – o chamado plano de Argand-Gauss. Esse trabalho de Gauss e Argand logo cativou a imaginação dos matemáticos da época, talvez fazendo surgir na cabeça deles seguinte pergunta: "Se um número complexo – que é formado por uma parte real e outra imaginária – pode ser associado a um plano, então que outro objeto matemático poderia ser associado ao espaço tridimensional?" Vários matemáticos queimaram seus neurônios a procura desse objeto, e se depararam com diversas dificuldades: uma delas, é que no plano de Gauss-Argand um dos eixos representava o conjunto dos números reais, enquanto o outro o conjunto dos números imaginários; mas como em um sistema tridimensional há três eixos perpendiculares, o misterioso objeto deveria apresentar mais uma outra parte além da parte real e da imaginária, de forma que seria necessário ampliar o conjunto dos números complexos. Numa primeira abordagem, pode parecer óbvio procurar por um número complexo de três partes, cada qual associada a um dos eixos do sistema tridimensional, mas tal idéia revelou-se assaz infrutífera: quando se tentava aplicar as regras da álgebra dos números complexos a estes objetos, apareciam sérias contradições, de forma que não foi possível resolver o problema por este caminho. A solução só foi alcançada por William Rowan Hamilton depois de algum tempo – conta-se que Hamilton alcançou a resposta em um *momento eureca* enquanto caminhava por uma famosa ponte de sua cidade, lá ele não hesitou e, com uma pedra rabiscou na ponte a relação fundamental de sua teoria!

Hamilton percebeu que o erro estava em se tentar associar o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais a um dos eixos, pois era justamente isso o que fazia aparecer as contradições encontradas em outras tentativas. Dever-se-ia, portanto, associar a cada eixo do sistema, conjuntos imaginários $\mathbb{I}$, $\mathbb{J}$ e $\mathbb{K}$, mas que fossem independentes uns dos outros, assim como os números reais são independentes em relação aos imaginários. Adicionando a estes três conjuntos o conjunto dos números reais, Hamilton pôde generalizar a álgebra dos números complexos, que agora continha quatro partes. A este novo objeto complexo, Hamilton chamou de *quaternion.*

Com este formalismo, as regras válidas para os números complexos eram satisfeitas, com a única diferença de que o produto quaterniônico não é uma operação comutativa, contrariamente ao produto de números complexos. Veremos mais adiante uma descrição bem mais completa da formulação dos quaternions.

A importância dos quaternions para o cálculo vetorial provém de suas características, que eram adequadas à descrição de vários fenômenos naturais – o que é, aliás, o principal objetivo do cálculo vetorial. Devido a estas características, várias aplicações dos quaternions se sucederam e vários pesquisadores se interessaram em pesquisar novos objetos matemáticos adequados para o estudo da natureza.

Entre eles, Hermann Günther Grassmann teve importância fundamental. Em 1873, Grassmann publicou um artigo denominado *Die Lineale Ausdehnungslehre* (*Álgebra das Extensões Lineares*), onde propôs que as grandezas físicas fossem representadas por objetos geométricos ao invés de numéricos. Estes objetos seriam como retas orientadas, fragmentos de plano orientados, cubos orientados, etc. Podemos dizer que foi exatamente neste ponto que surgiu o conceito de objetos vetoriais, como os nossos conhecidos vetores, e além: já lá estavam presentes aqueles outros objetos geométricos comentados no *início* do texto, quais sejam 2-vetores, 3-vetores, etc.. Além disso, Grassmann generalizou a geometria de Euclides ao sugerir um tratamento matemático válido para um espaço de qualquer dimensão. O trabalho de Grassmann foi, sem dúvida, excepcional, entretanto, como muitas vezes acontece, o seu trabalho era por demais complexo para a época em que foi publicada, e poucos foram os que a entenderam, além do que, mediante todo o prestígio de Hamilton – já bastante conhecido na época pelas suas pesquisas matemáticas – o seu trabalho acabou quase que esquecido.

Digo quase porque, ao menos uma mente reconheceu a grandeza de seu trabalho e pôde ir além, demonstrando várias semelhanças entre o trabalho de Hamilton com o de Grassmann e formulando uma nova álgebra vetorial, que englobava ambas as formulações de uma forma bem mais simples. O seu nome? William Kingdon Clifford. A álgebra de Clifford foi por ele denominada *Álgebra Geométrica*, mas por mesma infelicidade o seu trabalho tampouco ganhou a devida atenção na época, sobretudo por causa de sua morte prematura. Há hoje em dia fortes evidências de que Grassmann teria chegado a conclusões semelhantes às de Clifford, motivo pelo qual é preferível o nome "Álgebra Geométrica" do que somente "Álgebra de Clifford".

Já em tempos mais recentes, Josiah Willard Gibbs também fez uma análise da álgebra de Grassmann e pôde, assim, simplificá-la de forma considerável. Gibbs apresentou seus estudos sob a forma de notas de aula que utilizava junto a seus alunos. Quase ao mesmo tempo, Oliver Heaviside, chegou a resultados semelhantes ao de Gibbs de forma independente e assim nasceu a chamada álgebra vetorial que conhecemos hoje. Embora não tendo o mesmo rigor das Álgebras de Grassmann, Clifford ou de Hamilton, e até mesmo contendo certos problemas de caráter matemático, esta álgebra é consideravelmente prática para a descrição dos fenômenos naturais.

Em sua álgebra não havia mais bivetores, trivetores etc., apenas escalares e 1-vetores. Vale ressaltar também que, devido à simplicidade da álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside, os quaternions foram pouco a pouco sendo esquecidos e hoje, possivelmente, a grande maioria dos estudantes sequer ouviram falar a palavra "quaternion". Como exemplo de sua praticidade, convém mencionar como ela simplifica as equações de Maxwell, que regem o eletromagnetismo: estas equações consistiam, antes do advento do conceito moderno de vetor, em oito equações escalares, já quando descritas na álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside, estas mesmas equações puderam ser resumidas em apenas quatro! (isso também ocorre no formalismo de Hamilton, que inclusive foi utilizado por Maxwell).

No decorrer do tempo, outros pesquisadores como Levi-Civita, Ricci, Einstein etc., deram as suas contribuições e desenvolveram o conceito de *tensor* – uma evolução do conceito de vetor – formulando assim uma álgebra tensorial. A origem do nome tensor provém dos estudos sobre os fenômenos das tensões, a sua importância, da peculiar propriedade de manter a mesma forma em qualquer sistema de coordenadas – propriedade que foi fundamental no desenvolvimento da teoria da relatividade generalizada de Einstein.

Há pouco tempo atrás este era o cenário do cálculo vetorial: tinha-se por um lado a praticidade da álgebra de Gibbs, por outro, as suas contradições que incomodavam, e os trabalhos de Hamilton, Grassmann e Clifford estavam praticamente esquecidos. Mas, felizmente, há alguns anos atrás algo surpreendente mexeu em todo cenário. O professor David Hestenes tirou da escuridão os trabalhos de Clifford e mostrou como ela simplifica por demais a descrição da natureza e ainda é livre dos problemas em que a álgebra de Gibbs-Heaviside se depara. A partir de então cada vez mais pesquisadores se interessam em seu estudo, inclusive aqui no Brasil (conferir em [1], [2], etc.).

A álgebra geométrica simplifica de forma surpreendente toda a descrição da natureza, ela é adequada para descrever desde tópicos modernos tal qual relatividade restrita [1] (já que esta álgebra admite espaços quadridimensionais) e mecânica quântica [2] (pois a álgebra das matrizes de Pauli e a de Dirac possuem a mesma estrutura da álgebra geométrica, inclusive pode-se neste formalismo introduzir o conceito de *spinor* de uma forma bem mais simples), como também fenômenos clássicos ([3], [4], [5]), como o eletromagnetismo. Para se ter uma idéia de seu poderio, as equações de Maxwell, que eram originalmente oito equações escalares e que puderam ser reduzidas a quatro pela álgebra de Gibbs-Heaviside, agora se tornam apenas uma, eu disse apenas uma equação, na álgebra geométrica! Isto não é realmente fantástico?

A álgebra geométrica pode – e deve – ser utilizada no lugar da álgebra vetorial devido as suas vantagens inegáveis, porém, é necessário salientar os trabalhos de Heaviside-Gibbs não podem ser de forma alguma esquecidos, pois mesmo com as suas incongruências, permitiram a resolução de muitos problemas, além é claro, de fazerem parte da história da física e da matemática. Como já nos dizia Jules Verne, "*A ciência é feita de erros, que por sua vez, nos conduzem à verdade*" e, muitas vezes, é desta forma que evolui a ciência.

Nas páginas seguintes, estudaremos a chamada "Álgebra Geométrica de Clifford", que engloba tanto a álgebra de Grassmann como a álgebra de Hamilton. Comecemos por verificar algumas propriedades comuns a qualquer k-vetor.

§3. Propriedades dos objetos vetoriais

Todo objeto vetorial, para ser completamente especificado, requer quatro propriedades que estão descritas a seguir:

a) grade: *Classifica os objetos vetoriais de acordo com o objeto geométrico (ponto, reta, plano, triedo etc.) a que está associado.* Reiterando o que já foi dito, objetos vetoriais são entidades matemáticas que representam grandezas físicas de forma que toda grandeza física deve ser representada por um objeto vetorial. Aquelas grandezas que não necessitam de orientação devem ser representadas por escalares (que podemos associar a pontos); já grandezas que necessitam de uma orientação ao longo de uma reta devem ser representadas por vetores (semi-retas dirigidas); grandezas angulares por bivetores (fragmentos de plano orientados), e assim por diante, de forma que grandezas k-dimensionais sejam representadas por k-vetores. Assim, dizemos que a grade dos escalares é 0, que a grade dos vetores é 1, que a dos bivetores é 2 e assim por diante, sendo a grade de um k-vetor igual a k.

Poderíamos utilizar o termo "dimensão" ao invés de "grade" para se referir a esta propriedade, mas não vamos fazer isto para evitar confusão com a definição que é dada à dimensão em álgebra linear, e que difere muito da definição de grade apresentada aqui. A terminologia grade é também utilizada por outros autores, de forma que vamos adotá-la.

Para diferenciar os diferentes tipos de objetos vetoriais utilizaremos doravante a seguinte notação: um objeto vetorial será sempre escrito em negrito, com a sua grade especificada pelo número de setas sobrescritas. Assim, escalares serão representados como em $\mathbf{v}$, vetores da forma $\vec{\mathbf{v}}$, bivetores $\vec{\vec{\mathbf{v}}}$ e assim por diante, sendo um vetor de grade k, quando grande, representado por $\overset{k}{\vec{\mathbf{v}}}$ e para um vetor de grade qualquer usaremos a representação $\hat{\mathbf{v}}$.

b) Módulo: *representa a magnitude do objeto vetorial, equivale a medida do comprimento, área, volume, etc. em sua representação geométrica.* O módulo de um k-vetor é um número sempre real e não-negativo que nos fornece a intensidade da grandeza representa por ele quando especificamos uma unidade de medida adequada. Do ponto de vista geométrico, este valor corresponde ao comprimento, área, volume, etc. do objeto vetorial considerado.

O módulo de um vetor $\hat{\mathbf{v}}$ é representado por barras como em $|\hat{\mathbf{v}}|$. A definição matemática desta operação será apresentada no decorrer do texto, pois que os argumentos apresentados até aqui não são suficientes para defini-la...

c) Direção: *corresponde à reta, plano, volume etc. que dá suporte ao k-vetor.* A direção de 1-vetores será a mesma da reta de atuação da grandeza vetorial que ele representa; a direção de um 2-vetor será o plano de atuação da grandeza bivetorial que lhe é associado; e assim por diante, sendo inexistente a direção dos escalares.

d) Sentido: *Define a origem do vetor e o seu destino. Há apenas dois sentidos possíveis para um dado k-vetor.* Para determinar a forma com que uma grandeza atua é necessário dizer de onde ela provém (origem de atuação) e aonde ela atuará (destino de atuação), desta forma, chamamos de sentido de um k-vetor a sua direção quando orientada da origem para o destino. Toda grandeza vetorial possui dois sentidos associados a cada direção, por exemplo, os escalares podem ser positivos ou negativos; os vetores podem apontar para qualquer uma das duas direções possíveis ao longo de sua reta de atuação, um bivetor, pode possuir um sentido horário ou anti-horário, um trivetor tem um dos sentidos definido pela "regra da regra da mão direita" e o outro pela "regra da mão esquerda", que são utilizadas comumente em cursos de eletromagnetismo; e assim por diante.

§4. O sistema de coordenadas vetoriais. Descrição analítica dos objetos vetoriais.

Neste ponto, iniciaremos o estudo analítico dos objetos vetoriais. Isso hoje só é possível porque há muito tempo René Descartes encontrou um modo simples, mas potente, de descrever a geometria de Euclides. Ele formulou o que ficou conhecido como *sistema de coordenadas cartesianas* – que provém de

Renatus Cartesius, forma latina de seu nome – cuja função é a de algebrizar a geometria euclidiana. O sistema de coordenadas cartesianas é simplesmente um sistema de eixos graduados, ortogonais entre si e que se encontram num determinado ponto dito *origem.* Qualquer ponto x do espaço pode então ser representado de forma única por um *conjunto cartesiano* da forma $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, onde cada elemento representa a distância do ponto em relação a cada eixo $X_1, X_2, \ldots X_n$ do sistema, respectivamente.

Posteriormente ao trabalho Descartes, Gauss e Argand utilizaram o sistema de coordenadas cartesianas para representar os números complexos, que na época estavam sendo estudados, mas um grande passo para a álgebra geométrica foi dado por Grassmann que, de forma original, desenvolveu um sistema de coordenadas adequado à descrição de vetores – o chamado sistema vetorial. Grassmann considerou um sistema de eixos perpendiculares tal qual o cartesiano, mas associou a cada eixo um vetor unitário $\vec{\mathbf{e}}_i$ (chamado *versor*), colinear ao respectivo eixo e com origem coincidente com a do sistema, de forma que as coordenadas de um ponto qualquer – que agora recebem o nome de *componentes* – se tornam um vetor. Consequentemente, qualquer ponto do sistema passa a descrever um vetor $\vec{\mathbf{x}} = \langle x_1\vec{\mathbf{e}}_1, x_2\vec{\mathbf{e}}_2, \ldots x_n\vec{\mathbf{e}}_n \rangle$, com origem igual a do sistema e destino no ponto considerado, em virtude dos versores que são associados as suas componentes.

Grosso modo, um versor pode ser pensado como o elemento unitário do conjunto dos vetores, assim como o número 1 é o elemento unitário do conjunto numérico ou o número i para o conjunto dos números imaginários...

O conjunto $\langle \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \ldots \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$ formado pelos versores do sistema, é chamado de *base do sistema*, de forma que, conforme vimos, qualquer vetor pode ser descrito como uma combinação linear da base, isto é, multiplicando cada elemento da base por um coeficiente numérico adequado.

O módulo de um vetor $\vec{\mathbf{v}}$, que corresponde ao valor de seu comprimento, pode ser encontrado diretamente pela geometria utilizando o teorema de Pitágoras, e depende apenas dos coeficientes $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ que o determina. Utilizando um sistema de eixos ortogonais e admitindo uma geometria euclidiana (onde a distância entre dois pontos é independente da localização destes pontos), o módulo de um vetor pode ser encontrado pela versão n-dimensional do teorema de Pitágoras, definido pela fórmula:

$$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + \ldots (v_n)^2}$$

A direção do vetor também pode ser obtida diretamente pelos valores de seus coeficientes, uma vez que cada coeficiente v_i pode ser obtido pela equação $v_i = |\vec{\mathbf{v}}| \cdot \cos \alpha_i$, de onde se encontra o ângulo α_i que o vetor forma com cada eixo do sistema.

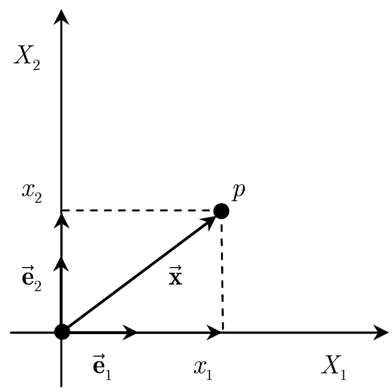

Figura 3: *O sistema de coordenadas vetoriais*

Analogamente, bivetores também podem ser representados por um sistema vetorial. Basta associar biversores da forma $\vec{\vec{\mathbf{e}}}_{ij}$ a cada plano Π_{ij} que se forma entre dois eixos do sistema. Assim, o sistema fica caracterizado também por uma base bivetorial da forma $\langle \vec{\vec{\mathbf{e}}}_{12}, \vec{\vec{\mathbf{e}}}_{13}, \ldots \vec{\vec{\mathbf{e}}}_{1n}, \vec{\vec{\mathbf{e}}}_{23}, \ldots \vec{\vec{\mathbf{e}}}_{mn} \rangle$, cujos elementos esgotam todas as combinações $\vec{\vec{\mathbf{e}}}_{ij}$ possíveis de se formar com os índices. Qualquer bivetor também pode ser descrito por uma combinação linear dos elementos desta base bivetorial, bastando multiplicar cada 2-versor por um coeficiente numérico adequado, logo, também pode ser representado por um conjunto como:

$$\vec{\vec{\mathbf{v}}} = \langle v_{12}\vec{\vec{\mathbf{e}}}_{12}, v_{13}\vec{\vec{\mathbf{e}}}_{13}, \ldots v_{1n}\vec{\vec{\mathbf{e}}}_{1n}, v_{23}\vec{\vec{\mathbf{e}}}_{23}, \ldots v_{mn}\vec{\vec{\mathbf{e}}}_{mn} \rangle$$

Veja que o número de componentes de um bivetor depende da dimensão do sistema considerado:

em um sistema quadridimensional um bivetor terá 6 componentes, já no tridimensional terá 3 e num bidimensional apenas 1 componente. Para o caso especial onde $n=3$, onde podemos formar apenas três planos com os eixos do sistema, um bivetor terá a forma: $\vec{\mathbf{v}} = \left\langle v_{12}\vec{\mathbf{e}}_{12},\ v_{13}\vec{\mathbf{e}}_{13}, v_{23}\vec{\mathbf{e}}_{23} \right\rangle$.

O módulo de um bivetor também pode ser encontrado pelo teorema de Pitágoras aplicado às suas componentes, onde temos:

$$\left|\vec{\mathbf{v}}\right| = \sqrt{\left(v_{12}\right)^2 + \left(v_{13}\right)^2 + \ldots\ \left(v_{1n}\right)^2 + \ldots \left(v_{mn}\right)^2}$$

A sua direção também pode ser determinada através da relação e $v_{ij} = \left|\vec{\mathbf{v}}\right| \cdot \cos\alpha_{ij}$, onde α_{ij} é o ângulo que o bivetor forma como cada plano do sistema.

De um modo geral, um k-vetor qualquer pode ser descrito num sistema vetorial atribuindo ao sistema k-base, que é encontrada por todas as combinações possíveis de se realizar com os eixos do sistema, tomados de k a k. Este número corresponde também ao número de componentes do k-vetor. Apelando para a teoria da análise combinatória, pode-se provar que o número de componentes de um k-vetor, quando descrito em um sistema n-dimensional, é dado pelo número binomial $\begin{bmatrix} n & k \end{bmatrix}$, o qual é definido pela fórmula:

$$\begin{bmatrix} n & k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esta equação mostra que o número de componentes de um k-vetor depende tanto da dimensão do sistema como da grade do k-vetor.

Também podemos representar um k-vetor por um conjunto ou matriz, assim como podemos encontrar o seu módulo ou sua direção de forma análoga aos casos anteriores, *mutatis mutandis*.

Uma última coisa deve ser mencionada: os sistemas vetoriais representam objetos vetoriais com origem coincidente com a do sistema, obviamente, podemos colocá-lo em qualquer outro ponto que ainda teremos o mesmo vetor. Em outras palavras, objetos vetoriais que diferem apenas por sua posição no sistema de coordenadas, sendo os seus atributos (*i.e.*, grade, magnitude, direção e sentido) iguais, devem ser considerados equivalentes e dizemos que eles formam uma "classe de equivalência". No entanto, para fins de cálculos, recomenda-se escrever um k-vetor sempre com sua origem na própria do sistema.

§5. A soma geométrica.

O professor pergunta para seus alunos: "Atenção classe, qual é o valor da soma de 5 bananas, 3 abacaxis e 4 laranjas?" Rapidamente, Zezinho – a quem o professor odiava – responde: "Eu sei professor, eu sei: é uma salada de frutas!".

Como bem percebeu Zezinho, a soma acima não poderia ser efetuada a menos que ele considerasse as bananas, abacaxis e laranjas como objetos pertencentes a uma mesma classe de objetos – no caso, frutas – pois caso ele diferenciasse as bananas dos abacaxis e das laranjas, então só poderia somar bananas com bananas, abacaxis com abacaxis e laranjas com laranjas... O que se quer demonstrar com este exemplo é que a operação matemática adição só pode ser efetuada sobre objetos pertencentes a uma mesma classe de objetos, por exemplo, não podemos efetuar a soma de termos com incógnitas diferentes, de forma a agrupá-los em um único termo, assim como a soma de dois números com expoentes diferentes também não pode ser efetuada de modo a resultar apenas em uma potência, pois, nestes exemplos, as parcelas são de classes diferentes. Podemos escrever tais somas, representá-las por um novo símbolo, mas efetuá-las realmente, tal qual fazemos com duas quantidades semelhantes (*e.g.*, $a + 2a = 3a$), não é possível...

O mesmo pode ser dito sobre a soma de objetos vetoriais: uma soma vetorial só pode ser efetuada se os objetos vetoriais que se somam possuírem grades iguais; podemos escrever uma equação em que figure a soma de, por exemplo, um vetor e um bivetor, porém, tal adição não poderá ser efetuada, de modo que não é possível unificar a expressão a um único termo. Esta é a primeira coisa que devemos ter em mente para realizarmos a soma geométrica de objetos vetoriais.

Mas afinal, como podemos somar estes objetos e qual a finalidade disto? Para responder a esta pergunta, daremos um exemplo simples: Suponha que um corpo se desloque de um ponto A para um ponto B e depois, mudando de direção, se desloque de B até outro ponto C. Como o deslocamento do corpo é dado pela diferença entre a sua posição final e a inicial, pode-se concluir que o deslocamento dele será igual ao segmento de reta $\overrightarrow{AC}$, o qual, sem sombra de dúvida, corresponde à soma dos segmentos de reta $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, já que ao se somar estes dois trajetos, ou seja, percorrer um e depois o outro, o corpo também se encontrará no mesmo ponto destino obtido pelo percurso anterior.

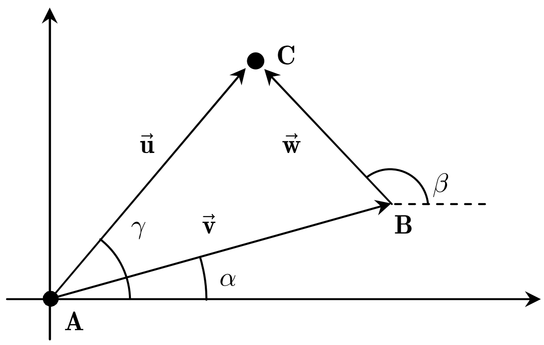

Figura 4: *Uma soma geométrica de vetores*

Entretanto, a soma a que se referimos não é – e nem poderia ser – a soma aritmética dos comprimentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, pois que se assim o fosse, ela não resultaria no segmento $\overrightarrow{AC}$ a menos que esses dois segmentos fossem colineares e de mesmo sentido. Com isso, prova-se que a aritmética não é aplicável a vetores, fato pelo qual foi necessário elaborar uma álgebra geométrica. A saída para tal dilema é encontrada definindo uma adição geométrica, operação aplicável a objetos vetoriais, que leve em consideração as direções, sentidos e magnitudes destes objetos.

Esta operação pode ser inferida diretamente da geometria: analisemos a figura 4 que representa a soma dos dois vetores $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{\mathbf{w}} = \overrightarrow{BC}$, e que resultam no vetor $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{AC}$. Como estes vetores formam um triângulo, o módulo do vetor resultante $\vec{\mathbf{u}}$ pode ser encontrado utilizando a lei dos co-senos:

$$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{|\vec{\mathbf{v}}|^2 + |\vec{\mathbf{w}}|^2 + 2|\vec{\mathbf{w}}||\vec{\mathbf{v}}|\cos(\beta - \alpha)}$$

E a direção do vetor resultante, pode ser determinada pela equação:

$$\tan\gamma = \frac{|\vec{\mathbf{v}}|\operatorname{sen}\alpha + |\vec{\mathbf{w}}|\operatorname{sen}\beta}{|\vec{\mathbf{v}}|\cos\alpha + |\vec{\mathbf{w}}|\cos\beta}$$

Por estas duas equações chegamos a uma definição da soma geométrica de vetores através de conceitos puramente geométricos, pois encontramos com ela a magnitude, direção e sentido do vetor resultante, que basta para determiná-lo.

Há, entretanto, uma forma mais simples de realizar tal operação. Verifica-se que as operações vetoriais se tornam bem mais simples quando são efetuadas sobre as componentes dos vetores. Realmente, podemos perceber por uma análise mais apurada da figura 4 que a soma geométrica é nada mais do que a soma aritmética das componentes dos vetores, pois que, ao somarmos as componentes associadas aos mesmos eixos de cada vetor, encontramos as componentes do vetor resultante, associadas a estes mesmos eixos. Em outras palavras, o vetor resultante de uma soma geométrica pode ser encontrado somando-se as componentes que apresentam mesmo índice nos dois vetores (*i.e.*, componentes homólogas). Sejam então $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ dois vetores. A soma deles resultará num outro vetor $\vec{\mathbf{u}}$ e podemos escrever: $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}$, lembrando apenas de que esta soma é geométrica (informação explicita pela flecha sobrescrita). Pelo que vimos nos capítulos anteriores, os vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ podem ser descritos por conjuntos da forma:

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \left\langle \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots \vec{\mathbf{v}}_n \right\rangle, \qquad \vec{\mathbf{w}} \equiv \left\langle \vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2, \ldots \vec{\mathbf{w}}_n \right\rangle$$

Para somarmos esses dois vetores (ou um número qualquer de vetores), basta efetuar a soma aritmética das componentes homólogas dos vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, ou seja:

$$\vec{\mathbf{u}} = \Big\langle (\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{w}}_1), (\vec{\mathbf{v}}_2 + \vec{\mathbf{w}}_2), \ldots (\vec{\mathbf{v}}_n + \vec{\mathbf{w}}_n) \Big\rangle$$

Pois fazendo $(\vec{\mathbf{w}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i) = \vec{\mathbf{u}}_i$, encontramos o vetor resultante $\vec{\mathbf{u}}$, tal qual tinha sido obtido pelo método puramente geométrico. O vetor $\vec{\mathbf{u}}$ pode então ser escrito da forma $\vec{\mathbf{u}} \equiv \left\langle \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots \vec{\mathbf{u}}_n \right\rangle$. Obviamente, as próprias componentes do vetor determinam sua nova direção e sentido. Fica como um interessante exercício para o leitor a demonstração da equivalência entre o formalismo analítico e o puramente geométrico. A grande vantagem deste formalismo analítico, tão pouco explorado pelos professores do ensino médio, é que através dele obtemos todas as propriedades de um vetor de uma forma direta, não é mais necessário admitir uma equação para a magnitude do vetor resultante e outra para a sua direção e sentido, como o que ocorre quando os vetores são representados por segmentos de retas. A magnitude, direção e sentido do vetor ficam completamente determinados pelos seus coeficientes, já que vetores diferentes apresentam componentes diferentes.

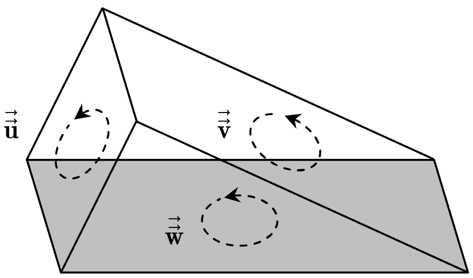

Figura 5: *Soma geométrica de bivetores*

A soma de dois (ou mais) *k*-vetores é definida de forma análoga, somam-se as suas componentes homólogas. Por exemplo, a soma do bivetor $\vec{\vec{\mathbf{v}}} \equiv \left\langle \vec{\vec{\mathbf{v}}}_{12}, \vec{\vec{\mathbf{v}}}_{13}, \ldots \vec{\vec{\mathbf{v}}}_{mn} \right\rangle$ com $\vec{\vec{\mathbf{w}}} \equiv \left\langle \vec{\vec{\mathbf{w}}}_{12}, \vec{\vec{\mathbf{w}}}_{13}, \ldots \vec{\vec{\mathbf{w}}}_{mn} \right\rangle$ resulta em outro bivetor $\vec{\vec{\mathbf{u}}} \equiv \left\langle \vec{\vec{\mathbf{u}}}_{12}, \vec{\vec{\mathbf{u}}}_{13}, \ldots \vec{\vec{\mathbf{u}}}_{mn} \right\rangle$, tal que:

$$\vec{\vec{\mathbf{u}}} \equiv \left\langle \left(\vec{\vec{\mathbf{v}}}_{12} + \vec{\vec{\mathbf{w}}}_{12}\right), \left(\vec{\vec{\mathbf{v}}}_{13} + \vec{\vec{\mathbf{w}}}_{13}\right), \left(\vec{\vec{\mathbf{v}}}_{23} + \vec{\vec{\mathbf{w}}}_{23}\right) \right\rangle .$$

Um fato interessante da soma geométrica é que um *k*-vetor sempre pode ser escrito como a soma de outros dois ou mais *k*-vetores. Em particular, qualquer *k*-vetor pode ser escrito como uma soma de suas componentes, já que elas também são entidades vetoriais. Esta propriedade é importante porque nos permite escrever um vetor por uma expressão algébrica no lugar da matricial. Assim, podemos escrever um vetor pela equação:

$$\vec{\mathbf{v}} = v_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2\vec{\mathbf{e}}_2 + \ldots v_n\vec{\mathbf{e}}_n$$

Onde ocultamos os “brackets” por não serem mais necessários. Um bivetor terá a forma $\vec{\vec{\mathbf{v}}} = v_{12}\vec{\mathbf{e}}_{12} + v_{13}\vec{\mathbf{e}}_{13} + \ldots v_{mn}\vec{\mathbf{e}}_{mn}$, analogamente para *k*-vetores quaisquer. Doravante, os *k*-vetores serão preferencialmente representados por expressões algébricas como estas.

Com estes conceitos, podemos verificar quais propriedades são respeitadas pela soma geométrica. Em primeiro lugar, cabe esclarecer que dois *k*-vetores de mesma grade somente são iguais se, e somente se, as suas magnitudes, direções e sentidos forem iguais, em outras palavras, se as suas componentes forem iguais. E reforçando o que já foi dito, não é importante que as suas origens sejam coincidentes. As propriedades da soma geométrica são as seguintes: é uma operação associativa: $\hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{w}}) = (\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}}) + \hat{\mathbf{w}}$ e comutativa: $\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{u}}$; admite a existência do vetor nulo $\hat{\mathbf{0}}$ tal que $\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{0}} = \hat{\mathbf{u}}$, de onde resulta a existência de um vetor oposto $-\hat{\mathbf{u}}$, associado a qualquer vetor $\hat{\mathbf{u}}$ de forma que $\hat{\mathbf{u}} + (-\hat{\mathbf{u}}) = \hat{\mathbf{0}}$. A existência de um vetor oposto permite definir a diferença geométrica do vetor $\hat{\mathbf{u}}$ pelo vetor $\hat{\mathbf{v}}$ como uma soma entre $\hat{\mathbf{u}}$ e o vetor oposto a $\hat{\mathbf{v}}$, ou seja: $\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{u}} + (-\hat{\mathbf{v}})$. Também é fácil verificar na geometria euclidiana a relação $|\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}}| \leq |\hat{\mathbf{u}}| + |\hat{\mathbf{v}}|$, que é conhecida como desigualdade triangular.

Agora vamos voltar ao assunto comentado no *início* deste capítulo. O que Zezinho nos ensinou também é válido para a soma geométrica no sentido de que só podemos efetuar uma soma geométrica se os vetores-parcelas tiverem a mesma grade. Se somarmos, por exemplo, um vetor com um bivetor, vamos obter um outro objeto vetorial que não será nem um vetor, nem um bivetor – será sim um objeto híbrido o qual chamamos de *multivetor* e o representamos por $\mathcal{M}$. Um multivetor $\mathcal{M}$ não pode ser escrito como um único objeto vetorial, pois cada parcela pertence a uma classe diferente de vetores, logo, um multivetor descrito em um espaço *n*-dimensional, possui a forma geral: $\mathcal{M} = \left\langle \mathbf{v}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\vec{\mathbf{v}}}, \ldots \overset{n}{\vec{\mathbf{v}}} \right\rangle$. Observe que um multivetor possui em geral uma grade mista. Assim como k-vetores podem ser representados por uma equação algébrica, o mesmo pode ser dito dos multivetores. No sistema tridimensional, onde podemos encontrar desde escalares até trivetores, um multivetor será da forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= v_0 + v_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2\vec{\mathbf{e}}_2 + v_3\vec{\mathbf{e}}_3 \\ &\quad + v_{12}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 + v_{13}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3 + v_{23}\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3 + v_{123}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3.\end{aligned}$$

Pode-se facilmente verificar que o número de componentes de um multivetor depende da dimensão n do sistema segundo a equação 2^n. A soma de multivetores é definida de forma semelhante: somam-se os termos respectivos de cada multivetor.

§6. O produto geométrico de Clifford. Como defini-lo a partir da aritmética e da geometria conjuntamente.

No capítulo 4 vimos que o módulo de um vetor pode ser encontrado diretamente a partir da geometria, através, por exemplo, do teorema de Pitágoras se consideramos a geometria euclidiana ortogonal. Mas também podemos definir o módulo de um número real a a partir da aritmética, através da equação $|a| = \sqrt{aa}$, já que uma raiz quadrada, por definição, sempre fornece um número não-negativo...

Ora, como um k-vetor também pode ser escrito por uma expressão algébrica, poderíamos pensar em definir um produto de vetores tal que a expressão $\sqrt{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}}$ permita encontrar o módulo do k-vetor $\hat{\mathbf{v}}$.

Uma vez que o módulo do k-vetor pode ser encontrado a partir da geometria, o produto $\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}$ pode ser determinado. Em resumo, procuramos por um produto com a propriedade de que o quadrado de um k-vetor seja igual ao quadrado de seu módulo.

Como em cada geometria há uma expressão diferente que define o módulo de um k-vetor, decorre as regras para multiplicar k-vetores serão diferentes em cada geometria. Vamos considerar aqui (a menos que se diga explicitamente o contrário) uma geometria euclidiana ortogonal, entretanto, pelo o que será exposto, o leitor não encontrará dificuldades em estender as definições a outras geometrias.

Seja então um vetor $\vec{\mathbf{v}}$, descrito nesta geometria e em um sistema bidimensional para simplificar. Temos: $\vec{\mathbf{v}} = v_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2\vec{\mathbf{e}}_2$. Comecemos por escrever o quadrado do módulo de $\vec{\mathbf{v}}$ pela expressão: $|\vec{\mathbf{v}}|^2 = \vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}}$, que também pode ser escrito da seguinte forma:

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}} = (v_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2\vec{\mathbf{e}}_2)(v_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2\vec{\mathbf{e}}_2) = |\vec{\mathbf{v}}|^2$$

Observe que acabamos de escrever um vetor por uma expressão algébrica, isto nos leva a considerar, *a priori*, que o produto vetorial siga regras semelhantes àquelas que são válidas para as expressões algébricas, em especial a propriedade distributiva. Vamos admitir que pelo menos esta propriedade seja satisfeita (o que pode ser feito livremente como uma hipótese, já que poderemos negá-la futuramente se não obtivermos êxito), de forma que efetuando a distributiva, encontraremos:

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}} = v_1v_1\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2v_2\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_2 + v_1v_2\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 + v_2v_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1 = |\vec{\mathbf{v}}|^2$$

Mas como a partir da geometria euclidiana temos: $|\vec{\mathbf{v}}|^2 = v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2}$, obtemos:

$$v_1v_1\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2v_2\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_2 + v_1v_2\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 + v_2v_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1 = v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2}$$

Observe que é neste ponto que a geometria interfere na definição do produto geométrico. Para garantir a igualdade da equação acima, devemos impor algumas relações entre os versores que figuram em cada termo. São estas relações que determinam o produto geométrico na geometria considerada, veremos agora como determinar tais relações.

Admitindo a relação $\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_2 = 1$, os dois primeiros termos $v_1v_1\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2v_2\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_2$ já fornecem o quadrado do módulo do vetor $\vec{\mathbf{v}}$, logo, isso leva à relação $v_1v_2\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 + v_2v_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1 = 0$. Mas veja que esta soma pode se anular por dois modos distintos: Poderíamos simplesmente considerar que o produto geométrico fosse uma operação comutativa, e admitir as relações $\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1 = 0$, que de fato tornam nula a equação mais acima. Esta hipótese foi admitida por Gibbs e Heaviside, mas infelizmente, o produto vetorial assim definido resulta sempre em uma quantidade escalar e, portanto, leva a uma estrutura pobre, pois nem sempre uma grandeza física que resulte de um produto vetorial se comporta como um escalar. Para contornar o problema, Gibbs tem de admitir um outro tipo de produto vetorial para dar conta destes fatos (vide § 14), logo, não é uma boa escolha.

Uma forma alternativa pode, felizmente, ser admitida abrindo mão da comutatividade do produto geométrico. Podemos colocar em evidência os coeficientes da equação $v_1 v_2 \vec{\mathbf{e}}_1 \vec{\mathbf{e}}_2 + v_2 v_1 \vec{\mathbf{e}}_2 \vec{\mathbf{e}}_1 = 0$, para obter $v_1 v_2 \left(\vec{\mathbf{e}}_1 \vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_2 \vec{\mathbf{e}}_1 \right) = 0$, e então percebemos claramente que basta admitir a relação $\vec{\mathbf{e}}_1 \vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_2 \vec{\mathbf{e}}_1 = 0$, ou seja, que $\left(\vec{\mathbf{e}}_1 \vec{\mathbf{e}}_2 \right) = -\left(\vec{\mathbf{e}}_2 \vec{\mathbf{e}}_1 \right)$, para atingir o objetivo proposto. Tal escolha foi formulada por W. Clifford antes mesmo de Gibbs e Heaviside, e é muito mais rica que a anterior, pois que com ela não é necessário admitir outro produto vetorial para dar conta de todos os casos, conforme veremos.

Vale ressaltar que não há nada nas equações que indique, *a priori*, que o produto de vetores seja uma operação comutativa, admitir isso seria arbitrário e pior, inevitavelmente nos conduziria a contradições em nossas operações.

Generalizando estes argumentos para sistemas n-dimensionais, encontramos, portanto, as seguintes relações que definem o produto geométrico na geometria euclidiana ortogonal. São elas:

$$(a) \qquad \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}} \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}} = 1$$

$$(b) \qquad \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}} \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}} + \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}} \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}} = 0$$

Esta última expressão também pode ser escrita como $\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}} \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}} \right) = -\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}} \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}} \right)$. Substituindo estas relações na equação $\sqrt{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}}}$, obtemos imediatamente o módulo do vetor conforme o esperado (confira!).

No próximo capítulo vamos demonstrar como utilizar estas relações para efetuar o produto geométrico de vetores.

§7. O produto geométrico de vetores e suas propriedades.

Comecemos com o produto geométrico de dois vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, escritos em um sistema bidimensional para simplificar. Temos:

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = \left(v_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + v_2 \vec{\mathbf{e}}_2 \right)\left(w_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + w_2 \vec{\mathbf{e}}_2 \right)$$

Desenvolvendo por distributiva, obtemos:

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = v_1 w_1 \vec{\mathbf{e}}_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + v_2 w_2 \vec{\mathbf{e}}_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + v_1 w_2 \vec{\mathbf{e}}_1 \vec{\mathbf{e}}_2 + v_2 w_1 \vec{\mathbf{e}}_2 \vec{\mathbf{e}}_1$$

Aplicando agora as relações obtidas no capítulo anterior, encontramos diretamente:

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = \left(v_1 w_1 + v_2 w_2 \right) + \left(v_1 w_2 - v_2 w_1 \right) \vec{\mathbf{e}}_1 \vec{\mathbf{e}}_2$$

Onde foi feito uso da propriedade $\vec{\mathbf{e}}_1 \vec{\mathbf{e}}_2 = -\left(\vec{\mathbf{e}}_2 \vec{\mathbf{e}}_1 \right)$ no último termo.

Vamos analisar o resultado obtido: o primeiro termo da equação resultante corresponde a um escalar, pois não contém versores. Este termo é justamente o produto vetorial que tinha sido definido outrora por Gibbs e Heaviside, (ou seja, caso postulássemos arbitrariamente que o produto de vetores fosse uma operação comutativa). Por questões históricas, este termo é comumente chamado de *produto de Gibbs-Heaviside* e é geralmente representado por $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$. Aqui, vamos chamá-lo de *produto interno,* ou às vezes de *contração de* $\vec{\mathbf{w}}$ *por* $\vec{\mathbf{v}}$, uma vez que tal produto diminui a grade dos vetores originais. Para evitar confusões com o produto numérico, vamos representá-lo por $\vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}}$. O seu valor também pode ser determinado através de conceitos puramente geométricos, apenas com os valores dos módulos dos vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ e do ângulo α_{vw} formado entre eles. Por geometria, o produto interno pode ser definido pela equação:

$$\mathbf{v} \vee \mathbf{w} = \left(v_1 w_1 + v_2 w_2 \right) = \left| \vec{\mathbf{v}} \right| \cdot \left| \vec{\mathbf{w}} \right| \cdot \cos \alpha_{\mathrm{vw}}$$

Passamos agora para o segundo termo do produto geométrico, qual seja, $\left(v_1 w_2 - v_2 w_1 \right) \vec{\mathbf{e}}_1 \vec{\mathbf{e}}_2$. Este termo, é equivalente ao que, outrora, tinha sido definido por Grassmann, sendo assim comumente chamado de *produto de Grassmann*; aqui vamos chamá-lo de *produto externo*, ou, esporadicamente, de *expansão de* $\vec{\mathbf{w}}$ *por* $\vec{\mathbf{v}}$. Ele é comumente representado por $\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}$, e será deste modo que vamos representá-lo. O produto externo de dois vetores resulta num bivetor. Facilmente podemos se convencer que o termo $(v_1 w_2 - v_2 w_1)\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2$ trata-se de um bivetor. Por exemplo, se substituíssemos o formalismo analítico por um formalismo puramente geométrico, ou seja, se escrevêssemos $(v_1 w_2 - v_2 w_1)$ através do módulo dos vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ do ângulo α_{vw} formado entre eles, chegaríamos a seguinte relação:

$$\left|\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}\right| = (v_1 w_2 - v_2 w_1) = \left|\vec{\mathbf{v}}\right| \cdot \left|\vec{\mathbf{w}}\right| \cdot \operatorname{sen} \alpha_{\mathrm{vw}}$$

Ora, a equação acima define a área de um paralelogramo de lados $\left|\vec{\mathbf{v}}\right|$ e $\left|\vec{\mathbf{w}}\right|$, e cujo ângulo obtuso é igual a α_{vw}, assim, o produto externo está naturalmente associado a fragmentos de plano e não a segmentos de reta, logo não pode ser um vetor. Também não pode ser um escalar pois os versores $\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2$ lhe garantem características vetoriais, orientando-o segundo o sentido anti-horário, ou horário. Isto tudo nos leva, inevitavelmente, a associar-lhe uma natureza bivetorial.

Observe ainda que o conjunto de versores $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}$ se comporta de forma análoga à base $\vec{\vec{\mathbf{e}}}_{\mathrm{ij}}$ dos bivetores, logo, podemos tomá-los como equivalentes e escrever

$$(\vec{\mathbf{e}}_{12} \equiv \vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2), (\vec{\mathbf{e}}_{13} \equiv \vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3), \ldots (\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{mn}} \equiv \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{m}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{n}})$$

Do que foi dito até aqui, conclui-se o seguinte: o produto geométrico de dois vetores resulta em um multivetor contendo um 0-vetor mais um 2-vetor. Tal produto foi definido por Clifford, (embora haja indícios de que Grassmann tenha chegado a esta relação independentemente, referindo-se ao *produto central* de dois vetores, conforme comentado em [3] e [6]). Podemos mesmo escrever o produto de Clifford como uma soma entre o produto de Gibbs-Heaviside e o de Grassmann, conforme abaixo:

$$\underbrace{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}_{\substack{\text{Produto de} \\ \text{Clifford}}} = \underbrace{\vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}}}_{\substack{\text{Produto de} \\ \text{Gibbs-Heaviside}}} + \underbrace{\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}}_{\substack{\text{Produto de} \\ \text{Grassmann}}}$$

A generalização para um sistema n-dimensional é direta: os produtos interno e externo são definidos neste sistema respectivamente por:

$$\vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots v_{\mathrm{n}} w_{\mathrm{n}}$$

$$\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \sum_{1,2}^{m,n} (v_{\mathrm{i}} w_{\mathrm{j}} - v_{\mathrm{j}} w_{\mathrm{i}})\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}$$

A partir da definição de produto geométrico de vetores, facilmente podemos verificar várias relações, vamos verificar algumas delas:

Os produtos interno e externo podem ser definidos dentro da álgebra geométrica de uma forma bem simples através das relações:

$$\vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{v}}}{2}; \qquad \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{v}}}{2}$$

Prova: considere dois vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$. Realizando o produto de $\vec{\mathbf{v}}$ por $\vec{\mathbf{w}}$, nesta ordem, encontramos $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}$, do mesmo modo, se realizarmos o produto de $\vec{\mathbf{w}}$ por $\vec{\mathbf{v}}$ vamos ter $\vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}} \vee \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$, mas, lembrando que o produto interno é comutativo (pois o seu resultado é um escalar) e o externo anti-comutativo (pois resulta em um bivetor), também podemos escrever $\vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}$ e assim, somando-se os produtos $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}$ e $\vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{v}}$ e dividindo por dois, encontramos as relações apresentadas acima.

O ângulo entre dois vetores também pode ser encontrado através da seguinte fórmula: $\tan\alpha = \dfrac{\left|\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}\right|}{\left|\vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}}\right|}$, onde se supõe $\vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}} \neq 0$, que provém das definições geométricas dos produtos interno e externo. Em especial, quando dois vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ são paralelos, temos $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{v}}$, já que o produto externo de dois vetores paralelos é nulo, de forma a restar apenas o produto interno que é comutativo; já quando eles são ortogonais, temos $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = -\vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{v}}$, pois agora quem se anula é o produto interno, restando apenas o externo que é uma operação anti-comutativa. Também podemos verificar a seguinte relação, que pode ser vista como uma generalização da relação de Cauchy-Schwarz:

$$|\vec{\mathbf{v}}|^2 \cdot |\vec{\mathbf{w}}|^2 = |\vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}}|^2 + |\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}|^2 .$$

Destas propriedades resulta também que o quadrado de um vetor será sempre um número real cujo valor corresponde ao quadrado de seu módulo. Porém, a divisão geométrica de um vetor por outro nem sempre resulta num escalar (a não ser a divisão de um vetor por ele mesmo que, obviamente, resulta no escalar 1), mas de forma geral, esta divisão também resulta em um escalar e um bivetor. Pois, em primeiro lugar, a divisão geométrica não pode ser escrita como $\vec{\mathbf{v}} / \vec{\mathbf{w}}$, já que o produto de Clifford não é, em geral, uma operação comutativa, de forma que temos duas divisões, a saber, uma pela esquerda $\left(\vec{\mathbf{w}}^{-1}\right)\vec{\mathbf{v}}$ e outra pela direita $\vec{\mathbf{v}}\left(\vec{\mathbf{w}}^{-1}\right)$. Para resolvê-las (considerando desde já que $|\vec{\mathbf{w}}| \neq 0$), devemos definir um vetor-inverso $\vec{\mathbf{w}}^{-1}$ tal que sempre se tenha $\vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{w}}^{-1} = \vec{\mathbf{w}}^{-1}\vec{\mathbf{w}} = 1$. Por uma simples análise, podemos concluir que o vetor inverso pode ser obtido pela equação: $\vec{\mathbf{w}}^{-1} = \dfrac{\vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{w}}|^2}$, ou seja, *o inverso de um vetor é o próprio vetor dividido pelo quadrado de seu módulo.* Com estas definições, podemos finalmente escrever:

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}^{-1} = \frac{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{w}}|^2} \qquad \text{e} \qquad \vec{\mathbf{w}}^{-1}\vec{\mathbf{v}} = \frac{\vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{w}}|^2}$$

Outras propriedades do produto geométrico serão discutidas em momentos oportunos.

§8. Generalização para o produto geométrico de *k*-vetores

Conseguimos definir um produto vetorial admitindo que a relação $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}}}$ fornece o módulo de um vetor. Será que esta relação pode ser utilizada para um *k*-vetor qualquer? Para verificar isto, vamos utilizar a equação $\sqrt{\vec{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\vec{\mathbf{v}}}}$ para encontrar o módulo de um bivetor, tomemos como exemplo o mais simples deles, um bivetor forma $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}$. Substituindo nesta equação, teremos:

$$|\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}} = \sqrt{-\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\right)} = \sqrt{-1}$$

Obtemos um número imaginário! Mas o módulo, por definição, deve ser um número real e não-negativo, logo, a expressão $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}}}$ não é geral e deve ser substituída. Esta substituição pode ser feita da seguinte forma: notemos primeiramente que um bivetor não é um objeto real, mas imaginário, pois o quadrado de seus versores resulta em um número negativo. Isto leva a considerar, em principio, que os objetos vetoriais são entidades complexas, no sentido de possuírem propriedades semelhante a dos números complexos. Ora, mas o módulo de um número complexo $z = a + bi$ (onde a e b são números reais e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade dos números imaginários), realmente não é definido pela equação $|z| = \sqrt{zz}$, mas sim por $|z| = \sqrt{zz^*}$, onde $z^* = a - bi$ é chamado complexo-conjugado de z.

Desta forma, devemos definir o módulo de um *k*-vetor pela formula mais geral: $|\hat{\mathbf{v}}| = \sqrt{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}^*}$, onde $\hat{\mathbf{v}}^*$ é o chamado *conjugado* de $\hat{\mathbf{v}}$ e que devemos ainda definir. Por razões que ficarão mais claras no capítulo 11, o *k*-vetor-conjugado $\hat{\mathbf{v}}^*$ pode ser obtido de $\hat{\mathbf{v}}$ invertendo-se a ordem dos versores presentes em cada um de seus termos, assim, o bivetor $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}$ terá como conjugado o bivetor $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}$. Provaremos posteriormente que numa geometria euclidiana (onde vetores e escalares são considerados objetos reais), um *k*-vetor de propriedades reais não altera o seu sinal quando invertemos a ordem de seus versores – dizemos que eles são simétricos – mas, se ele possuir propriedades imaginárias, então o seu sinal se inverte, assim, o produto $\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}^*$, em qualquer caso, será sempre um número real e nos fornecerá o quadrado do módulo de um *k*-vetor.

Feitas estas considerações, podemos verificar como se efetua o produto entre *k*-vetores. Vamos, para fixar as idéias, relembrar a definição geral do produto geométrico de Clifford:

O produto geométrico entre dois k-vetores é uma operação não-comutativa onde cada componente do primeiro k-vetor multiplica todas as componentes do segundo por distributiva, gerando assim um multivetor. As relações entre versores que definem o produto geométrico dependem da geometria em questão e são deduzidas pela condição de que o quadrado de um k-vetor sempre forneça o quadrado de seu módulo.

O que ocorre na prática é o seguinte: ao desenvolver a distributiva, alguns termos podem aparecer com versores repetidos. Admitindo uma geometria euclidiana ortogonal, podemos cancelar estes versores repetidos utilizando a relação $\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_i = 1$, caso eles estejam um do lado do outro. Se eles não estiverem lado a lado, então devemos permutar (*i.e.*, trocar de lugar) dois versores entre si, utilizando para tal a relação $\left(\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_j\right) = -\left(\vec{\mathbf{e}}_j\vec{\mathbf{e}}_i\right)$ a cada permutação, para colocá-los lado a lado e, logo após, cancelá-los pela relação anterior. Por exemplo, no termo $\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_j\vec{\mathbf{e}}_k\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_j$, podemos cancelar de pronto os versores $\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_i$, mas devemos permutar $\vec{\mathbf{e}}_k$ com $\vec{\mathbf{e}}_j$ a fim de se obter $-\left(\vec{\mathbf{e}}_j\vec{\mathbf{e}}_j\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_k\right)$ e cancelar $\vec{\mathbf{e}}_j\vec{\mathbf{e}}_j$, com o que, o termo resultante fica sendo $-\left(\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_k\right)$.

Após estes cancelamentos, cada termo resultante pode ter uma grade diferente (correspondente ao número de versores que restaram), e então podemos agrupá-los em um termo escalar, outro vetorial, outro bivetorial, etc., obtendo assim um multivetor. Portanto, o produto geométrico de *k*-vetores resulta em um multivetor.

É somente no caso do produto geométrico de dois vetores que o multivetor resultante será formado por um escalar e um bivetor. Em qualquer outro caso, encontraremos objetos vetoriais de outras grades, o que não é difícil de entender: considere dois *k*-vetores de grades p e q respectivamente, o produto geométrico deles resultará em um objeto que, a principio, terá $p \cdot q$ componentes, devido à distributiva. Como cada termo é composto pelos versores do primeiro *k*-vetor mais os do segundo, os termos resultantes deverão ter, em uma primeira abordagem, grade igual a $p+q$. Porém, sempre é possível cancelar os versores iguais, conforme demonstrado, o que implica numa redução na grade de alguns termos. Prova-se facilmente que o multivetor resultante possuirá termos cuja grade varia de $p-q$ até $p+q$ e aumentam sempre de duas em duas unidades a partir de $p-q$ (dizemos que o produto geométrico é uma operação graduada em duas unidades), ou seja, as grades possíveis que os termos do multivetor resultante podem apresentar são somente as seguintes:

$$(p-q), (p-q+2), (p-q+4), \ldots, (p+q)$$

A prova é dada a seguir: seja $\left(\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_j \ldots \vec{\mathbf{e}}_p\right)$ os versores presentes nos termos do primeiro *k*-vetor, de grade *p*, e $\left(\vec{\mathbf{e}}_l\vec{\mathbf{e}}_m \ldots \vec{\mathbf{e}}_q\right)$ os versores presentes nos termos do segundo *k*-vetor, de grade q, onde $p > q$. Após a distributiva, todos os termos possuirão versores reunidos na forma $\left(\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_j \ldots \vec{\mathbf{e}}_p\vec{\mathbf{e}}_l\vec{\mathbf{e}}_m \ldots \vec{\mathbf{e}}_q\right)$, neste conjunto, pode acontecer uma das três possibilidades: a) não há versores repetidos, logo a grade do termo fica sendo igual a $p+q$; b) todos os versores provenientes do segundo vetor são iguais aos versores provenientes do primeiro, logo, como os versores iguais se cancelam, teremos um termo com grade igual à $p-q$; c) apenas alguns versores se repetem, logo, para cada par de versores repetidos, a grade do termo resultante fica diminuída de duas unidades a partir de $p+q$. E está provado.

É oportuno comentar também que o produto geométrico de um escalar por um vetor qualquer resulta em outro vetor de mesma grade do anterior, cujos termos – devido à distributiva – ficam todos eles multiplicados por este escalar. Observe que este fato é natural na álgebra geométrica, não necessitando de ser postulado.

Como já foi dito, somente quando os vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ são unidimensionais podemos escrever $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}$, no caso mais geral, os produtos interno e externo fornecem apenas os *k*-vetores de maior e menor grade do multivetor resultante, todavia, podemos definir um produto $\hat{\mathbf{v}} \Downarrow \hat{\mathbf{w}}$ – que chamaremos de *contração* de $\hat{\mathbf{w}}$ por $\hat{\mathbf{v}}$ – como representando a soma de todos os *k*-vetores resultantes do produto geométrico cuja grade seja menor ou igual a do primeiro vetor, e também definir outro produto $\hat{\mathbf{v}} \Uparrow \hat{\mathbf{w}}$ – que chamaremos de *expansão* de $\hat{\mathbf{w}}$ por $\hat{\mathbf{v}}$ – como representando a soma de todos os k-vetores resultantes cuja grade seja maior que a do primeiro vetor, pois assim, podemos escrever o produto geométrico destes k-vetores de uma forma mais familiar: $\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{v}} \Downarrow \hat{\mathbf{w}} + \hat{\mathbf{v}} \Uparrow \hat{\mathbf{w}}$.

A título de exemplo e para esclarecer o que foi dito, será demonstrado o procedimento a ser realizado para se efetuar o produto geométrico entre um vetor e um bivetor, no sistema tridimensional. Esta demonstração servirá de paradigma para outros casos.

Primeiramente, vamos escrever os dois vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\vec{\mathbf{w}}}$ através de suas componentes:

$$\vec{\mathbf{v}} = v_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2\vec{\mathbf{e}}_2 + v_3\vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\vec{\vec{\mathbf{w}}} = w_{12}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 + w_{13}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3 + w_{23}\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3 .$$

E então o produto geométrico de $\vec{\mathbf{v}}$ por $\vec{\vec{\mathbf{w}}}$ se escreve:

$$\left(v_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2\vec{\mathbf{e}}_2 + v_3\vec{\mathbf{e}}_3\right)\left(w_{12}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 + w_{13}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3 + w_{23}\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3\right)$$

Realizando a distributiva, teremos:

$$\begin{aligned} &v_1w_{12}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 + v_1w_{13}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3 + v_1w_{23}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3 \\ &+ v_2w_{12}\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 + v_2w_{13}\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3 + v_2w_{23}\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3 \\ &+ v_3w_{12}\vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 + v_3w_{13}\vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3 + v_3w_{23}\vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3 \end{aligned}$$

Utilizando as relações $\left(\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_j\right) = -\left(\vec{\mathbf{e}}_j\vec{\mathbf{e}}_i\right)$ e $\left(\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_i\right) = 1$ para simplificar cada termo, obtemos:

$$\begin{aligned} &v_1w_{12}\vec{\mathbf{e}}_2 + v_1w_{13}\vec{\mathbf{e}}_3 + v_1w_{23}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3 \\ &- v_2w_{12}\vec{\mathbf{e}}_1 - v_2w_{13}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3 + v_2w_{23}\vec{\mathbf{e}}_3 \\ &+ v_3w_{12}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3 - v_3w_{13}\vec{\mathbf{e}}_1 - v_3w_{23}\vec{\mathbf{e}}_2 \end{aligned}$$

Por fim, agrupando os termos de mesma grade, finalmente encontramos:

$$\begin{aligned} &\left(-v_2w_{12} - v_3w_{13}\right)\vec{\mathbf{e}}_1 + \left(v_1w_{12} - v_3w_{23}\right)\vec{\mathbf{e}}_2 + \left(v_1w_{13} + v_2w_{23}\right)\vec{\mathbf{e}}_3 \\ &+ \left(v_1w_{23} - v_2w_{13} + v_3w_{12}\right)\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3 \end{aligned}$$

Concluímos, por conseguinte, que o produto geométrico entre um vetor e um bivetor resulta no multivetor $\mathcal{M}_{1,3} = a_1\vec{\mathbf{e}}_1 + a_2\vec{\mathbf{e}}_2 + a_3\vec{\mathbf{e}}_3 + a_{123}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3$, onde os coeficientes são dados pela equação mais acima.

A demonstração de outros produtos geométricos fica a cargo do leitor. É evidente também que o produto geométrico de multivetores pode ser efetuado de forma semelhante, uma vez que estes objetos também podem ser escritos por expressões algébricas.

Para finalizar este capítulo, vamos apresentar as propriedades do produto geométrico na geometria euclidiana: o produto geométrico de dois k-vetores é uma operação não-comutativa $\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}} \neq \hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{u}}$, mas porém associativa: $\hat{\mathbf{u}}\left(\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}}\right) = \left(\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}\right)\hat{\mathbf{w}}$; a todo k-vetor $\hat{\mathbf{u}}$ de módulo não-nulo podemos encontrar um k-vetor inverso $\hat{\mathbf{u}}^{-1}$ tal que $\hat{\mathbf{u}}^{-1}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}^{-1} = \mathbf{1}$, e este k-vetor é obtido por $\hat{\mathbf{u}}^{-1} = \hat{\mathbf{u}}^* / \left|\hat{\mathbf{u}}\right|^2$; existe um único elemento neutro para esta operação e corresponde ao escalar $\mathbf{1}$; finalmente, também é válida as propriedades distributivas sobre a adição $\hat{\mathbf{u}}\left(\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{w}}\right) = \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{w}}$ e $\left(\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{w}}\right)\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{u}}$.

§9. Um formalismo matricial para a álgebra geométrica.

Nos capítulos anteriores, a álgebra geométrica foi explorada através de expressões algébricas, onde aprendemos como somar, multiplicar e dividir k-vetores e multivetores. Entretanto, estas operações são por muitas vezes bem trabalhosas e complicadas, sobretudo porque geram expressões com vários termos e com um acúmulo considerável de versores, o que poderia levar o estudante menos atento a possíveis erros de cálculo. Temos aqui uma situação parecida com a que havia no século XIX quando os matemáticos estudavam sistemas lineares de muitas equações, lá também os cálculos eram dificultados pelo grande número de expressões e pelo acúmulo de símbolos repetidos. Felizmente, com o advento do cálculo matricial e da teoria dos determinantes, foi possível representar tais sistemas de uma maneira mais prática e eficiente: utilizando matrizes cujas linhas representavam as equações e cujas colunas representavam as variáveis das equações, sendo os seus elementos os coeficientes que acompanham as variáveis. Essa representação possibilitou trabalhar apenas com os coeficientes das variáveis, simplificando sobremaneira os cálculos.

Isto nos leva a perguntar se não seria possível encontrar uma representação matricial para a álgebra geométrica onde se possa trabalhar apenas com os coeficientes dos multivetores (ou k-vetores), obtendo assim uma maior praticidade e agilidade nos cálculos. Neste capítulo veremos como isso pode ser feito.

O formalismo que será apresentado não acrescenta nada de novo à álgebra geométrica, é apenas uma nova representação, porém mais prática e econômica. Vamos admitir no desenrolar dos argumentos um sistema bidimensional euclidiano, apenas para simplificar. Basicamente, vamos representar multivetores por matrizes-coluna, onde a cada linha da matriz é associada a uma componente do multivetor. Ora, vimos no capítulo 5 que um multivetor pode ser escrito em um sistema bidimensional por uma expressão algébrica da forma $\mathcal{M} = m_0 + m_1\vec{\mathbf{e}}_1 + m_2\vec{\mathbf{e}}_2 + m_{12}\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2$, onde verificamos de imediato que ele possui quatro componentes e, por conseguinte, devemos representá-lo neste formalismo por uma matriz-coluna de quatro linhas, cujos elementos sejam os coeficientes das suas respectivas componentes. Observe também que escalares, vetores, bivetores etc, são "multivetores incompletos", pois estes são obtidos fazendo nulas algumas componentes específicas do multivetor, logo, também podem ser representados pelas mesmas matrizes que utilizamos para representar multivetores, basta tornar nulos alguns de seus elementos. Assim, para o sistema bidimensional, temos:

$$\underset{escalar}{\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} m_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad \underset{vetor}{\vec{\mathbf{m}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad \underset{bivetor}{\vec{\vec{\mathbf{m}}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_{12} \end{Bmatrix}} \quad \underset{multivetor}{\mathcal{M} = \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_{12} \end{Bmatrix}}$$

Podemos verificar agora como as operações da álgebra geométrica podem ser efetuadas neste formalismo.

A soma de dois multivetores $\mathcal{W}$ e $\mathcal{V}$ pode ser encontrada somando-se os elementos situados em linhas iguais, pois que a soma geométrica é definida pela soma das respectivas componentes dos multivetores, logo, temos:

$$\mathcal{W} + \mathcal{V} = \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_0 + v_0 \\ w_1 + v_1 \\ w_2 + v_2 \\ w_{12} + v_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_{12} \end{Bmatrix} = \mathcal{U}$$

Veremos agora como definir o produto de Clifford em termos matriciais – operação bem mais complicada que a anterior. Pela estrutura que foi dada a essas matrizes, é evidente que esta operação não pode ser o produto matricial usual, de fato, tal produto nem é definido para todas as matrizes-coluna, logo, procuramos por um outro produto. Este produto pode ser encontrado, primeiramente, efetuando a distributiva nas componentes dos multivetores e, em seguida, reunindo os termos pertencente a uma mesma componente do multivetor resultante, onde então poderemos representar cada uma destas componentes por uma linha da matriz-coluna resultante. Desta forma, o produto geométrico entre dois multivetores $\mathcal{W}$ e $\mathcal{V}$, descritos num sistema bidimensional, pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_0v_0 + w_1v_1 + w_2v_2 - w_{12}v_{12} \\ w_0v_1 + w_1v_0 - w_2v_{12} + w_{12}v_2 \\ w_0v_2 + w_1v_{12} + w_2v_0 - w_{12}v_1 \\ w_0v_{12} + w_1v_2 - w_2v_1 + w_{12}v_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_{12} \end{Bmatrix}$$

Observe que a primeira linha possui todos os termos escalares do multivetor resultante, enquanto que a segunda e a terceira linha representam as suas componentes vetoriais, e a última linha, as componentes bivetoriais. A ordem com que os elementos de uma mesma linha estão dispostos é arbitrária, contudo, vamos adotar a ordenação acima porque ela parece ser a mais simples e, nesta ordenação, poderemos obter tais termos de uma forma bem simples, considerando cada termo como se fosse um elemento de uma matriz 4×4.

Esta ordenação foi escolhida de forma a apresentar em cada coluna os elementos da primeira matriz, em ordem crescente, sendo eles repetidos em todas as linhas. Assim, para encontrar os termos de uma determinada linha, basta verificar quais elementos de $\mathcal{V}$ (segunda matriz) devem multiplicar os de $\mathcal{W}$ (primeira matriz) para que cada termo pertença àquela linha, uma tarefa simples que pode ser realizada anulando mentalmente os índices repetidos, já que os versores – ocultos nesta representação – estariam na mesma ordem destes índices. O sinal que acompanha estes termos também pode ser encontrado de forma análoga: podemos permutar mentalmente os índices com o objetivo de colocá-los em ordem crescente, lembrando de inverter o seu sinal a cada permutação.

Várias dicas podem ser percebidas se tomarmos a ordenação referida, por exemplo, os elementos de $\mathcal{V}$ que figuram em uma certa linha da matriz resultante são os mesmos que figuram na coluna respectiva a esta linha, e na mesma ordem, (*e.g.*, os elementos (v_2, v_{12}, v_0, v_1) que figuram na terceira linha também aparecem na terceira coluna da matriz resultante e na mesma ordem); temos também que na diagonal principal sempre encontraremos o primeiro elemento da matriz $\mathcal{V}$, enquanto que na diagonal secundária, sempre estará o último elemento de $\mathcal{V}$.

Várias outras curiosidades podem ser encontradas tomando-se esta ordenação, procedimento que nos fornece um modo rápido de se realizar o produto geométrico de dois multivetores. Todas as operações da álgebra geométrica podem ser efetuadas desta forma mais prática, e como exemplo, abaixo realizamos o produto entre dois vetores no sistema bidimensional, onde obtemos diretamente o escalar e o bivetor que compõe o multivetor resultante:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & w_1 v_1 & w_2 v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 v_2 & -w_2 v_1 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{12} \end{Bmatrix}$$

Se tivéssemos considerado um sistema n-dimensional ao invés do utilizado neste exemplo, as matrizes que representam os multivetores seriam maiores, pois que o número de componentes de um multivetor em um sistema n-dimensional, conforme já comentado, é dado por 2^n e conseqüentemente a matriz resultante do produto geométrico teria 4^n termos. Todavia, seria mais difícil ainda realizar estes produtos pelo método algébrico...

O interessante deste formalismo é que ele releva a propriedade de completude da álgebra geométrica. Quando realizamos um produto geométrico entre dois vetores, o resultado não é outro vetor, conforme vimos, é um escalar mais um bivetor; isso poderia levar o leitor a pensar que a álgebra geométrica não é uma "álgebra fechada", no sentido de que é necessário introduzir novos objetos para satisfazer suas propriedades. Porém, isso é naturalmente superado quando se introduz o conjunto $\mathbb{M}$ dos multivetores, onde qualquer k-vetor passa a ser um elemento de certo subconjunto dele. Com esta definição, qualquer operação da álgebra geométrica é efetuada sobre multivetores e o resultado é sempre um outro multivetor, constituindo portanto uma "álgebra fechada" no sentido apresentado mais acima. Isto não fica bem claro na representação algébrica, mas fica completamente evidente nesta representação matricial.

§10. A álgebra geométrica para sistemas vetoriais oblíquos.

Todas as propriedades e exemplos vistos até agora são válidos para uma geometria euclidiana e ortogonal, ou seja, tínhamos considerado que o sistema vetorial empregado possuía eixos ortogonais entre si – este sistema, no presente capítulo, será chamado de *sistema cartesiano*.

Como exemplo de como o produto geométrico depende da geometria utilizada, vamos deduzir as suas relações fundamentais em uma geometria euclidiana mas não ortogonal (*i.e.*, onde graduações dos eixos são constantes mas o ângulo entre eles não é reto), a que chamaremos de *sistema não-cartesiano*. Este tópico é importante porque, em alguns casos, as coisas ficam bem mais simples quando são descritas em um sistema não-cartesiano, isso ocorre, por exemplo, na formulação geométrica da teoria da relatividade, quando se utiliza o formalismo de Minkowski...

Por amor a simplicidade, vamos nos restringir a sistemas bidimensionais, isto não prejudicará em nada o desenrolar dos conceitos, uma vez que a generalização para sistemas n-dimensionais pode ser alcançada sem grandes dificuldades, bastando aplicar as relações que serão demonstradas a cada plano do sistema.

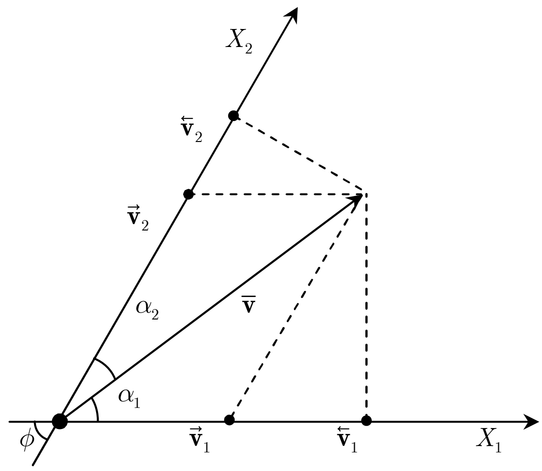

Figura 6: *Sistema de coordenadas não-cartesiano*

Uma interessante propriedade dos sistemas não-cartesianos é a seguinte: um vetor pode ser projetado nos seus eixos de duas formas diferentes: podemos projetá-lo através de retas ortogonais aos eixos – que chamaremos por *componentes ortogonais* e as representaremos por setas sobrescritas apontando para esquerda – bem como podemos projetá-los por retas paralelas aos outros eixos – que as chamaremos de *componentes paralelas* e as representaremos por setas sobrescritas apontando para direita. A figura 6 ilustra bem essa possibilidade.

Observe que as componentes $\vec{\mathbf{v}}_1$ e $\vec{\mathbf{v}}_2$ foram projetadas através de retas paralelas ao outro eixo, enquanto que as componentes $\overleftarrow{\mathbf{v}}_1$ e $\overleftarrow{\mathbf{v}}_2$ são projetadas através retas ortogonais em relação eixo que se projeta. Comumente estas projeções são chamadas de componentes contravariantes e covariantes, respectivamente, mas não adotaremos esta nomenclatura porque, afinal, elas não oferecem nenhuma clareza sobre como estas projeções são obtidas. Observe que num sistema cartesiano estas duas projeções sempre coincidem: a projeção de um vetor é tanto ortogonal aos eixos em que se projeta quanto paralela aos outros eixos...

Analisando a figura 6, facilmente percebemos que as componentes ortogonais do vetor $\overline{\mathbf{v}}$ são obtidas pelas equações:

$$\left|\overleftarrow{\mathbf{v}}_1\right| = \left|\overline{\mathbf{v}}\right|\cos\alpha_1\,; \qquad\qquad \left|\overleftarrow{\mathbf{v}}_2\right| = \left|\overline{\mathbf{v}}\right|\cos\alpha_2\,.$$

Agora, quanto as componentes paralelas, faz-se necessário perceber que elas dependem também do ângulo ϕ entre os eixos do próprio sistema, que o caracteriza como não-cartesiano. Isto é evidente, pois, se cada projeção paralela é obtida por uma reta paralela em relação ao outro eixo, então é obvio que o seu valor dependerá da direção dos eixos do sistema... Conseqüentemente, cada componente paralela dependerá do valor das outras componentes paralelas. Analisando a figura anterior, podemos verificar que as componentes paralelas do vetor $\overline{\mathbf{v}}$ são dadas por:

$$\left|\vec{\mathbf{v}}_1\right| = \left|\overline{\mathbf{v}}\right|\cos\alpha_1 - \left|\vec{\mathbf{v}}_2\right|\cos\phi\;;$$

$$\left|\vec{\mathbf{v}}_2\right| = \left|\overline{\mathbf{v}}\right|\cos\alpha_2 - \left|\vec{\mathbf{v}}_1\right|\cos\phi\;.$$

É fácil perceber que, se o ângulo ϕ fosse reto, teríamos $\cos\phi = 0$, e voltaríamos às equações definidas para os sistemas cartesianos. É oportuno notar também que o primeiro termo desta equação é justamente a componente ortogonal do vetor no próprio eixo. Isso permite transformar componentes ortogonais em paralelas, e *vice-versa*, através das relações:

$$\left|\overleftarrow{\mathbf{v}}_1\right| = \left|\vec{\mathbf{v}}_1\right| + \left|\vec{\mathbf{v}}_2\right|\cos\phi \qquad \left|\overleftarrow{\mathbf{v}}_2\right| = \left|\vec{\mathbf{v}}_2\right| + \left|\vec{\mathbf{v}}_1\right|\cos\phi$$

O módulo de um vetor também pode ser descrito através de suas componentes ortogonais, paralelas ou mistas (*i.e.*, através de uma coordenada paralela e outra ortogonal). Apresentaremos aqui apenas a obtida pelas componentes paralelas, as outras podem ser facilmente encontradas utilizando as reações dadas mais acima. Desta forma temos:

$$\left|\vec{\mathbf{v}}\right| = \sqrt{\left|\vec{\mathbf{v}}_1\right|^2 + \left|\vec{\mathbf{v}}_2\right|^2 + 2\left|\vec{\mathbf{v}}_1\right|\left|\vec{\mathbf{v}}_2\right| \cdot \cos\phi}$$

É fácil verificar também que a soma de dois *k*-vetores num sistema não-cartesiano segue as mesmas regras que são definidas para um sistema cartesiano: somam-se os coeficientes respectivos dos dois *k*-vetores; tanto faz se esta soma se estende sobre as componentes ortogonais, paralelas ou mistas. Esta propriedade também permite escrever um *k*-vetor através das suas componentes paralelas, ortogonais ou mistas...

Para definir um produto geométrico em sistemas não cartesianos devemos levar em consideração o ângulo ϕ do sistema efetuando o produto geométrico dos versores $\vec{\mathbf{e}}_i$ e $\vec{\mathbf{e}}_j$ que definem os seus eixos, o qual, *a priori*, resultará na relação $\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_j = \vec{\mathbf{e}}_i \vee \vec{\mathbf{e}}_j + \vec{\mathbf{e}}_i \wedge \vec{\mathbf{e}}_j$. Esta relação quando descrita em um sistema cartesiano, onde $\vec{\mathbf{e}}_i$ e $\vec{\mathbf{e}}_j$ são ortogonais, resultam imediatamente nas já corriqueiras relações $\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_i = 1$ e $\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_j + \vec{\mathbf{e}}_j\vec{\mathbf{e}}_i = 0$, mas no caso presente isso não ocorre. De fato, como $\vec{\mathbf{e}}_i$ e $\vec{\mathbf{e}}_j$ não são mais ortogonais, o produto $\vec{\mathbf{e}}_i \vee \vec{\mathbf{e}}_j$ não será mais nulo, de forma que teremos as relações:

$$\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_i = \vec{\mathbf{e}}_j\vec{\mathbf{e}}_j = 1 \qquad\qquad \vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_j + \vec{\mathbf{e}}_j\vec{\mathbf{e}}_i = 2\left(\vec{\mathbf{e}}_i \vee \vec{\mathbf{e}}_j\right)$$

É fácil verificar que, se o sistema vetorial fosse ortogonal, voltaríamos às relações anteriores.

Com estas novas relações podemos encontrar o produto de vetores simplesmente efetuando a distributiva e aplicando as regras recém definidas. Sejam $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ dois vetores descritos num sistema bidimensional não-cartesiano. Desenvolvendo o produto geométrico por distributiva, encontramos:

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = \left(v_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2\vec{\mathbf{e}}_2\right)\left(w_1\vec{\mathbf{e}}_1 + w_2\vec{\mathbf{e}}_2\right)$$

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = v_1w_1\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2w_2\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_2 + v_1w_2\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 + v_2w_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1$$

Aplicando a propriedade $\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_i = 1$, temos:

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_1w_2\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 + v_2w_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1$$

E fazendo as substituições seguintes: $\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_1 \vee \vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \vec{\mathbf{e}}_2$ e $\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_2 \vee \vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2 \wedge \vec{\mathbf{e}}_1$, obtemos:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = v_1w_1 + v_2w_2 &+ v_1w_2\left(\vec{\mathbf{e}}_1 \vee \vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \vec{\mathbf{e}}_2\right)\\ &+ v_2w_1\left(\vec{\mathbf{e}}_2 \vee \vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2 \wedge \vec{\mathbf{e}}_1\right)\end{aligned}$$

Aplicando a distributiva nos dois últimos termos , encontramos:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = v_1w_1 + v_2w_2 &+ v_1w_2\left(\vec{\mathbf{e}}_1 \vee \vec{\mathbf{e}}_2\right) + v_2w_1\left(\vec{\mathbf{e}}_2 \vee \vec{\mathbf{e}}_1\right)\\ &+ v_1w_2\left(\vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \vec{\mathbf{e}}_2\right) + v_2w_1\left(\vec{\mathbf{e}}_2 \wedge \vec{\mathbf{e}}_1\right)\end{aligned}$$

Por fim, lembrando da comutatividade do produto de Gibbs-Heaviside e da anti-comutatividade do produto de Grassmann, encontramos finalmente:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = v_1w_1 + v_2w_2 &+ \left(v_1w_2 + v_2w_1\right)\vec{\mathbf{e}}_1 \vee \vec{\mathbf{e}}_2 +\\ &+ \left(v_1w_2 - v_2w_1\right)\vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \vec{\mathbf{e}}_2\end{aligned}$$

Vemos assim que o produto geométrico aplicado a sistemas não euclidianos fica acrescido da quantidade $\left(v_1w_2 + v_2w_1\right)\left(\vec{\mathbf{e}}_1 \vee \vec{\mathbf{e}}_2\right)$.

A generalização deste resultado para um sistema *n*-dimensional se faz simplesmente com:

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = \sum_1^n v_iw_j\left(\vec{\mathbf{e}}_i \vee \vec{\mathbf{e}}_j\right) + \sum_1^n \left(v_iw_j - v_jw_i\right)\vec{\mathbf{e}}_i \wedge \vec{\mathbf{e}}_j$$

Onde agora a somatória se estende a qualquer *i* ou *j*, com $i \le j$, de 1 a *n*.

Podemos chamar a quantidade $\sum_1^n v_iw_j\left(\vec{\mathbf{e}}_i \vee \vec{\mathbf{e}}_j\right)$ de produto interno não-cartesiano, e representá-lo por $\vec{\mathbf{v}} \curlyvee \vec{\mathbf{w}}$. Isto se justifica, pois que é uma quantidade escalar e, se o sistema fosse euclidiano, então ele tornar-se-ia o produto interno usual. Este termo é, portanto, uma generalização do produto interno para sistemas não cartesianos, da mesma forma como a lei dos co-senos é uma generalização do teorema de Pitágoras para triângulos não retângulos. Com esta definição podemos escrever, para o produto geométrico de dois 1-vetores num sistema euclidiano não-cartesiano: $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \curlyvee \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}$.

É interessante notar que mesmo num sistema não-cartesiano, o produto de dois vetores resulta em um multivetor, formado por um escalar mais um bivetor.

§11. Relação entre a álgebra geométrica e a álgebra dos números complexos

Vamos investigar agora as relações existentes entre a álgebra geométrica e a álgebra dos números complexos. Veremos que os objetos vetoriais têm muitas semelhanças com os números complexos...

Podemos classificar um *k*-vetor $\hat{\mathbf{v}}$ em duas classes distintas, de acordo com o resultado do produto $\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}$. Vimos que o quadrado de um *k*-vetor é sempre um escalar, assim, se o produto $\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}$ for um número positivo, então o vetor $\hat{\mathbf{v}}$ é dito *real*, se o resultado for um número negativo, ele é dito *imaginário*. Neste sentido, um multivetor será em geral um objeto *complexo*.

Também podemos verificar qual a classe que um *k*-vetor pertence analisando como se comporta os seus versores quando eles são elevados às potencias 1, 2, 3 e 4. Por exemplo, os versores de um vetor genérico são todos da forma $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}$, elevando-os a estas quatro potências, utilizando a propriedade $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}} = 1$, encontramos:

$$\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\right)^1 = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}} \qquad \left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\right)^3 = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}} = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}$$
$$\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\right)^2 = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}} = 1 \qquad \left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\right)^4 = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}} = 1$$

Observe que os valores alternam-se em $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}$ e 1. Isto é análogo ao que ocorre com o número real -1 (substitua $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}$ por -1 e confira), logo, podemos dizer que vetores se comportam como objetos reais perante a estas operações.

Vamos analisar agora o que ocorre com os bivetores, cujos versores são da forma $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}$. Utilizando a relação $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}} = -\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\right)$ e $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}} = 1$, vamos, novamente, elevá-los a estas quatro potências e analisar o resultado:

$$\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\right)^1 = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}$$
$$\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\right)^2 = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}} = -\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\right) = -1$$
$$\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\right)^3 = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}} = -\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\right) = -\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\right)$$
$$\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\right)^4 = \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}} = \left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\right) = 1$$

Os valores alternam-se agora entre $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}$, -1, $-\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}\right)$ e 1. Ora, isto é análogo ao que ocorre com o número imaginário $i = \sqrt{-1}$ (substitua $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{j}}$ por i e confira), logo, podemos dizer que os bivetores se comportam como objetos imaginários perante estas mesmas operações. Tal resultado indica que a álgebra geométrica constitua uma generalização da álgebra dos números complexos...

O caráter real ou imaginário de um *k*-vetor depende exclusivamente de sua grade. Matematicamente, se k é a sua grade, podemos saber se ele possui características imaginárias ou reais pela equação $(-1)^{k(k-1)/2}$, caso o resultado seja igual a 1, então o *k*-vetor terá características reais e caso o resultado seja igual a -1, o *k*-vetor terá características imaginárias. Considerando que os escalares são sempre objetos reais, temos que vetores também serão, já bivetores e trivetores serão do tipo imaginário, e assim por diante, alternando sempre de duas em duas unidades.

Também podemos saber se um objeto vetorial tem características reais ou imaginárias através da simetria de seus versores: admitindo uma geometria euclidiana, então se o conjunto de versores que caracteriza um *k*-vetor for simétrico, isto é, se tivermos $\left(\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\ldots\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}\right) = \left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}\ldots\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1\right)$, pode-se inferir que ele será do tipo real e se este conjunto for anti-simétrico, ou seja, $\left(\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\ldots\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}\right) = -\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}\ldots\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1\right)$, então ele será do tipo imaginário. Isto pode ser confrontado permutando-se os versores até inverter a sua ordem, lembrando-se de inverter o sinal a cada permutação.

Agora podemos relacionar a operação conjugação geométrica com a simetria do *k*-vetor. O conjugado $\hat{\mathbf{v}}^*$ de um *k*-vetor $\hat{\mathbf{v}}$ é, por definição, o próprio *k*-vetor caso ele seja real e o *k*-vetor oposto caso seja imaginário. Assim, em qualquer caso, o conjugado de um *k*-vetor pode ser encontrado invertendo-se a ordem dos seus índices.

Este conceito de simetria de um *k*-vetor (e também de um sistema vetorial) será amplamente utilizado no próximo capítulo, quando definirmos uma operação chamada "dualidade"...

Vale à pena comentar que o caráter real ou imaginário dos objetos vetoriais implica em diversas propriedades. Para verificar estas propriedades, vamos escrever o produto de Clifford em função dos módulos dos vetores e do ângulo que eles formam entre si. Uma vez que se tem $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}$, onde $\mathbf{v} \vee \mathbf{w} = |\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}| \cdot \cos\vartheta$ e $\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}} = |\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}| \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{w}} \operatorname{sen}\vartheta$, sendo $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{w}}$ versores co-planares a $\vec{\mathbf{v}}$ e a $\vec{\mathbf{w}}$, então podemos escrever o produto de Clifford utilizando estas relações, com o que, obtemos:

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = |\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}|\left(\cos\vartheta + \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{w}} \operatorname{sen}\vartheta\right)$$

Esta relação é bastante prática para realizar a rotação de um vetor em um plano: considere um espaço bidimensional de eixos X_1 e X_2. Seja $\vec{\mathbf{v}}$ um vetor deste espaço e $\vec{\mathbf{v}}\,'$ o vetor que se obtém de $\vec{\mathbf{v}}$ por uma rotação de um ângulo ϑ, e se quer saber quais serão as componentes de $\vec{\mathbf{v}}\,'$ após a rotação. O problema pode ser resolvido de forma simples escrevendo o produto geométrico $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}}\,'$ pela equação: $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}}\,' = |\vec{\mathbf{v}}|^2 \cdot \left(\cos\vartheta + \vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 \operatorname{sen}\vartheta\right)$, onde lembramos que $|\vec{\mathbf{v}}| = |\vec{\mathbf{v}}\,'|$, pois que a rotação preserva o módulo do vetor girado. Dividindo a expressão por $\vec{\mathbf{v}}$ – ou melhor, multiplicando pela esquerda por $\vec{\mathbf{v}}^{-1} = \vec{\mathbf{v}} / |\vec{\mathbf{v}}|^2$ – encontramos:

$$\vec{\mathbf{v}}\,' = \vec{\mathbf{v}}\left(\cos\vartheta + \vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 \operatorname{sen}\vartheta\right)$$

Escrevendo $\vec{\mathbf{v}} = v_1\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2\vec{\mathbf{e}}_2$ e realizando a distributiva, obtemos:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}\,' = &\left(v_1 \cos\vartheta\right)\vec{\mathbf{e}}_1 + \left(v_1 \operatorname{sen}\vartheta\right)\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 + \\ &+ \left(v_2 \cos\vartheta\right)\vec{\mathbf{e}}_2 + \left(v_2 \operatorname{sen}\vartheta\right)\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\end{aligned}$$

Por fim, utilizando as relações $\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_1 = 1$ e $\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1 = -\left(\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\right)$, vem finalmente:

$$\vec{\mathbf{v}}\,' = \left(v_1 \cos\vartheta - v_2 \operatorname{sen}\vartheta\right)\vec{\mathbf{e}}_1 + \left(v_2 \cos\vartheta + v_1 \operatorname{sen}\vartheta\right)\vec{\mathbf{e}}_2$$

Que nos fornece as componentes de $\vec{\mathbf{v}}\,'$ em função de $\vec{\mathbf{v}}$ e θ.

Note que a forma como escrevemos o produto geométrico em $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = |\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}|\left(\cos\vartheta + \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{w}} \operatorname{sen}\vartheta\right)$ é semelhante à forma polar de um número complexo *z*, onde se tem $z = |z|\left(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta\right) = |z|\exp\left(i\vartheta\right)$. A única diferença é que no lugar do número imaginário i temos o biversor $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{w}}$. Todavia, pelo que acabamos de ver $\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{w}}$ também é um objeto imaginário, de forma que a expressão apresentada pode também ser escrita em forma exponencial:

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = |\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}| \cdot \exp\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{w}}\vartheta\right)$$

O produto na ordem inversa pode ser escrito como $\vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}| \cdot \exp\left(\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{w}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\vartheta\right)$. Somando e subtraindo estas duas relações, e em seguida dividindo por dois, encontramos expressões que definem os produtos interno e externo através de exponenciais:

$$\vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}} = |\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}| \cdot \left(\frac{e^{\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{w}}\vartheta} + e^{\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{w}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\vartheta}}{2}\right)$$

$$\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}} = |\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}| \cdot \left(\frac{e^{\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{w}}\vartheta} - e^{\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{w}}\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{v}}\vartheta}}{2}\right)$$

§12. Dualidade

Conforme vimos anteriormente, o número de componentes de um *k*-vetor depende tanto de sua grade quanto da dimensão do sistema vetorial considerado. Se *n* é a dimensão do sistema, então o número *N* de componentes de um *k*-vetor (*i.e.*, de um objeto vetorial de grade *k*), é dado pelo número binomial $N = \begin{bmatrix} n & k \end{bmatrix}$.

Há uma propriedade muito interessante dos números binomiais – e que vai se revelar bem fortuita para o que se segue – que nos diz que o valor do binômio não se altera caso troquemos, na equação acima, *k* por $n-k$. Em linguagem matemática, temos a igualdade:

$$\begin{bmatrix} n & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & n-k \end{bmatrix}$$

Esta identidade, quando interpretada no âmbito da álgebra geométrica, implica na existência de duas classes de *k*-vetores que possuem um mesmo número de componentes, sendo que este número depende apenas da dimensão do sistema empregado. Assim, os *k*-vetores cujas grades são k e $n-k$ possuem o mesmo número de componentes no mesmo sistema de dimensão n.

Quando duas classes de objetos vetoriais possuem o mesmo número de componentes, em determinado sistema vetorial, dizemos que eles constituem um *dual* no sistema considerado. Por exemplo, no sistema tridimensional é possível descrever desde 0-vetores até 3-vetores, o número de componentes de cada uma deles é descrito abaixo:

$$
\begin{aligned}
&\text{0-vetor} \quad \rightarrow \quad N_0 = \begin{bmatrix} n & 0 \end{bmatrix} = 1 \\
&\text{1-vetor} \quad \rightarrow \quad N_1 = \begin{bmatrix} n & 1 \end{bmatrix} = 3 \\
&\text{2-vetor} \quad \rightarrow \quad N_2 = \begin{bmatrix} n & 2 \end{bmatrix} = 3 \\
&\text{3-vetor} \quad \rightarrow \quad N_3 = \begin{bmatrix} n & 3 \end{bmatrix} = 1
\end{aligned}
$$

Observe que escalares e 3-vetores possuem, ambos, apenas uma componente (embora os escalares não sejam dirigidos, podemos pensar em uma componente escalar associando-lhes um 0-versor $\mathbf{e_0}$ tal que todo escalar x possa ser expresso como $x\mathbf{e_0}$), sendo assim, dizemos que, no sistema tridimensional, 3-vetores e 0-vetores formam um dual. Do mesmo modo, 1-vetores e 2-vetores, por apresentarem ambos três componentes, formam outro dual. Entretanto, deve-se alertar que este resultado só é válido no sistema tridimensional. Em qualquer outro sistema, os "pares duais" serão diferentes.

A importância de se definir o conceito de dualidade encontra justificativa no fato de que estas propriedades tornam possível associar a cada *p*-vetor um certo *q*-vetor dual (sendo $q = n - p$), de tal forma que este *q*-vetor represente, talvez de uma forma mais cômoda, a mesma grandeza representada antes pelo *p*-vetor. Observe que isto só é possível porque os vetores-duais têm o mesmo número de componentes.

A operação de se transformar um *k*-vetor no seu dual chama-se *dualidade.* A dualidade foi primeiramente definida por Hodge, que aplicou este conceito à álgebra de Grassmann, mostraremos agora como ela pode ser descrita pela álgebra geométrica.

Comecemos nos perguntando quais as características que o dual deve possuir. Ora, é evidente que o *q*-vetor dual procurado deve ter módulo igual ao do *p*-vetor original, pois, conforme dissemos, ambos devem representar uma mesma grandeza. Resta-nos, portanto, saber qual deve ser a direção e o sentido deste dual. Isto pode ser esclarecido ao perceber que, dado um *p*-vetor $\hat{\mathbf{v}}$, dentre uma infinidade de objetos vetoriais de grade $q = n - p$ que possuem mesmo módulo de $\hat{\mathbf{v}}$, apenas dois deles são ortogonais à $\hat{\mathbf{v}}$. Estes dois *q*-vetores possuem mesma direção mas sentidos opostos. Assim fica evidente que o *p*-vetor original pode ser completamente representado por um destes dois *q*-vetores, bastando apenas escolher qual deles. Esta escolha, porém, é arbitraria, ou seja, depende apenas de uma mera convenção, uma vez que ambos os *q*-vetores conseguem, com igual êxito, representar o *p*-vetor $\hat{\mathbf{v}}$. Veremos daqui a pouco como podemos fazer esta convenção de uma forma bem racional.

A questão se resume agora em dizer como podemos transformar um *p*-vetor no seu dual. Como a operação que procuramos preserva o módulo do vetor original, esta só pode atuar nos versores do *p*-vetor, e não nos seus coeficientes, assim, vamos nos reter apenas a estes versores. É fácil verificar que cada componente do *p*-vetor será formado pela combinação dos versores do sistema, tomados de p a p, logo, o número de versores de cada um de seus termos será justamente igual a sua grade p. Já o conjunto que forma a base do sistema terá todos os n versores existentes neste sistema (este conjunto terá grade n) e justamente por isso, se multiplicarmos geometricamente o *p*-vetor pelos os versores desta base, digamos pela esquerda, então os versores do *p*-vetor se cancelarão com os versores iguais presentes na base, de tal forma que vamos obter um *q*-vetor com $n-p$ versores, e estes versores serão, todos eles, diferentes, em cada termo, dos existentes no *p*-vetor original. O fato de os termos do *q*-vetor resultante possuírem $n-p$ versores faz com que a grade deste *q*-vetor seja $q = n - p$. O fato de estes versores serem todos diferentes dos anteriores faz com que o *q*-vetor seja ortogonal ao *p*-vetor original. Logo, encontramos deste modo o dual do *p*-vetor. O sentido deste dual depende exclusivamente da ordem com que os versores da base do sistema são dispostos na hora de multiplicarem o *p*-vetor. Basta convencionar que estes versores sejam dispostos na ordem crescente dos índices que o sentido do dual fica completamente determinado – esta é uma forma muito natural de escolher um sentido para a dualidade e por isso será utilizada aqui.

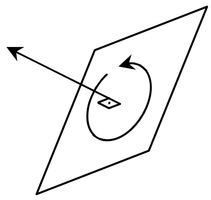

Figura 7: *Um bivetor e seu dual*

Portanto, multiplicando um *p*-vetor (à esquerda) pelo conjunto de versores que formam base do sistema e estando estes versores dispostos na ordem crescente dos índices, encontramos, pois, o seu *q*-vetor dual. Vê-se assim, que o conjunto que multiplica o *p*-vetor é de fato um operador matemático, pois é através dele que efetuamos a operação dualidade. Este operador é comumente chamado de "operador de Hodge" e representado por uma estrela como $\star$. Logo, temos:

$$\star = \left(\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3\ldots\vec{\mathbf{e}}_m\vec{\mathbf{e}}_n\right)$$

O dual de um *p*-vetor $\hat{\mathbf{v}}$ pode então ser encontrado pelo produto geométrico $\star\hat{\mathbf{v}}$, ou seja:

$$\star\hat{\mathbf{v}} = \left(\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3\ldots\vec{\mathbf{e}}_m\vec{\mathbf{e}}_n\right)\hat{\mathbf{v}}$$

Mas, uma vez obtido o *q*-vetor dual, como poderemos retornar ao *p*-vetor original? Numa primeira abordagem, o leitor poderia supor que bastaria multiplicar novamente o *p*-vetor pelo operador de Hodge para recuperarmos o vetor original, mas na verdade, *o dual do dual de um p-vetor nem sempre é o p-vetor original*. Para perceber o porquê disto é preciso esclarecer algumas particularidades da operação dualidade.

Vimos no capítulo 11 que um objeto vetorial pode ter características reais ou imaginárias de acordo com a sua simetria perante uma inversão da ordem de seus versores. Ora, sendo o operador de Hodge um operador vetorial, é evidente que ele será também um operador complexo no sentido de que ele pode possuir características de números reais ou de números imaginários, dependendo da dimensão do sistema considerado. Isto é muito importante, pois se o sistema for "um sistema simétrico", então o produto $\star\star$ será sempre igual a 1, logo, aplicando-o duas vezes sobre um *p*-vetor $\hat{\mathbf{v}}$, encontraremos novamente o *p*-vetor $\hat{\mathbf{v}}$. Porém, se o sistema for "um sistema anti-simétrico", então o produto $\star\star$ será igual a -1, e se o aplicarmos duas vezes sobre um *p*-vetor $\vec{\mathbf{v}}$, não encontraremos mais este mesmo *p*-vetor, mas sim o seu oposto $-\vec{\mathbf{v}}$.

Em virtude deste fato, para recuperarmos com segurança o *p*-vetor original, temos de definir um operador de Hodge inverso $\star^{-1}$, de forma que se tenha sempre $\star\star^{-1} = \star^{-1}\star = 1$ independentemente do sistema considerado. Este operador pode ser definido como o conjugado do operador de Hodge, ou seja, o mesmo conjunto mas com os versores na ordem oposta. Pois assim fazendo, ao inverter a ordem dos versores do operador de Hodge vamos obter o mesmo operador caso o sistema seja simétrico, mas obteremos o operador oposto (*i.e*, multiplicado por -1) caso o sistema seja anti-simétrico, e portanto sempre retornaremos ao *p*-vetor original. Logo, podemos definir o operador de Hodge inverso como:

$$\star^{-1} = \left(\vec{\mathbf{e}}_n\vec{\mathbf{e}}_m\ldots\vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1\right)$$

Assim, quando tivermos um *q*-vetor dual e quisermos retornar ao *p*-vetor original basta multiplicá-lo (à esquerda) pelo operador de Hodge inverso $\star^{-1}$, conforme definido acima, ou seja, se $\hat{\mathbf{w}} = \star\hat{\mathbf{v}}$, então $\hat{\mathbf{v}} = \star^{-1}\hat{\mathbf{w}}$.

A dualidade pode ser também aplicada a multivetores, neste caso, basta encontrar o dual de cada *k*-vetor que o compõe, ou seja:

$\star\mathcal{M} = \star\mathbf{v} + \star\vec{\mathbf{v}} + \star\overset{n}{\vec{\mathbf{v}}}$. Como o produto de dois vetores gera um multivetor, o dual deste produto nos fornece as relação $\star(\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}) = \star(\vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}}) + \star(\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}})$ e também é uma operação associativa: $\star(\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}) = (\star\vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}}(\star\vec{\mathbf{w}})$, propriedade que continua válida quando aplicada sobre os produtos interno e externo separadamente.

Em especial, vamos estudar a dualidade aplicada ao sistema tridimensional, que é um sistema anti-simétrico. Neste sistema é possível descrever desde escalares até trivetores, abaixo estão relacionados os *k*-vetores originais com seus respectivos duais:

$$\star(1) = \vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3 \qquad \star(\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3) = -1$$

$$\star(\vec{\mathbf{e}}_1) = \vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3 \qquad \star(\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3) = -\vec{\mathbf{e}}_1$$

$$\star(\vec{\mathbf{e}}_2) = \vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_1 \qquad \star(\vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_1) = -\vec{\mathbf{e}}_2$$

$$\star(\vec{\mathbf{e}}_3) = \vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 \qquad \star(\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2) = -\vec{\mathbf{e}}_3$$

Onde temos $\star = (\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3)$. O importante de se notar é que, no sistema tridimensional, o dual de um bivetor é um vetor ortogonal ao plano deste bivetor, tal qual está ilustrado na figura 7.

Este resultado é importante porque há grandezas físicas que são naturalmente associadas a vetores, mas, são obtidas por um produto geométrico de outros dois vetores. Como se sabe, este produto gera um bivetor e um escalar, nunca um outro vetor. O aparente problema é solucionado ao perceber que o vetor representativo dessas grandezas é sempre ortogonal aos vetores que se multiplicam, e possuem o mesmo módulo do bivetor que resultaria do produto geométrico dos vetores que o geram, o que permite associá-lo ao dual de um bivetor. Um exemplo clássico onde isso ocorre é a força que atua sobre uma carga elétrica em movimento num campo magnético; demonstra-se experimentalmente que o módulo desta força eletromagnética é dada por $\left|\vec{\mathbf{B}} \wedge q\vec{\mathbf{v}}\right|$ onde $\vec{\mathbf{B}}$ é o vetor campo-magnético, $\vec{\mathbf{v}}$ a velocidade do corpo acelerado e q a sua carga elétrica; também se demonstra que a direção desta força é sempre ortogonal ao plano formado por $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$, mas, sendo a força uma grandeza univetorial, ela não pode ser descrita pelo bivetor resultante de tal produto, todavia pode ser descrito pelo seu dual, pois que tem todas as características necessárias para assim ser representada, logo, podemos definir: $\vec{\mathbf{F}}_{em} = \star\left(\vec{\mathbf{B}} \wedge q\vec{\mathbf{v}}\right)$.

A dualidade unifica várias outras áreas que antes eram tidas como coisas desanexas. Um exemplo será dado no próximo capítulo.

§13. A relação entre os quaternions e a álgebra geométrica.

Vimos no capítulo 11 que os *k*-vetores, de um modo geral, são objetos complexos, e os classificamos em dois tipos: *k*-vetores simétricos – aqueles que possuem propriedades semelhantes às dos números reais – e *k*-vetores anti-simétricos – que possuem propriedades características de números imaginários. Já no capítulo anterior, definimos a operação dualidade, que permite transformar um objeto vetorial de grade p em outro de grade $q = n - p$, em especial, vimos que no sistema tridimensional o dual de um bivetor é um vetor, e *vice-versa*.

Através destes dois conceitos veremos agora como a álgebra dos quaternions, formulada bem antes por Hamilton, pode ser naturalmente englobada pela álgebra geométrica.

Conforme já comentamos, Hamilton partiu dos trabalhos de Argand e Gauss que formularam o plano complexo, onde um dos eixos deste sistema representava o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, enquanto o outro o conjunto $\mathbb{I}$ dos números imaginários.

Após várias tentativas de se generalizar este formalismo para um sistema tridimensional, Hamilton encontrou a solução ao perceber que o erro estava em tentar associar o conjunto $\mathbb{R}$ a um dos eixos. Assim, dever-se-ia associar a cada eixo X_1, X_2, X_3 um conjunto de números imaginários $\mathbb{I}$, $\mathbb{J}$ e $\mathbb{K}$, respectivamente. Incluindo a estes três conjuntos imaginários o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, obtemos o chamado conjunto $\mathbb{Q}$ dos quaternions, que pode ser entendido como uma generalização do conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.

Um quaternion é, portanto, um objeto complexo de quatro componentes, uma real e três imaginárias (sendo que estas três formam a *parte pura* do quaternion). Assim como o elemento $\mathbf{1}$ é o elemento unitário do conjunto dos números reais, podemos considerar que $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sejam elementos unitários de seus respectivos conjuntos, o que permite escrever qualquer quaternion $\mathbf{q}$ por uma combinação linear destes elementos unitários, fazendo:

$$\mathbf{q} = \left\{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}\right\}$$

Onde *a*, *b*, *c* e *d*, são coeficiente reais que diferenciam um quaternion do outro.

Observe que para descrever o sistema tridimensional, tomamos apenas a parte pura dos quaternions, ou seja, cada ponto do sistema fica bem determinado por um quaternion puro $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

Definindo-se uma regra para a soma e o produto de quaternions, Hamilton demonstrou que a sua álgebra atendia a todas as operações matemáticas requeridas pela álgebra dos números complexos. Vamos verificar como estas operações devem ser definidas para satisfazer estas exigências.

A soma de dois quaternions é definida de forma semelhante à soma de dois vetores (igual também à adição de números complexos) e é uma operação associativa e comutativa. Por exemplo, a soma dos dois quaternions $\mathbf{r} = \left\{r_1\mathbf{1} + r_i\mathbf{i} + r_j\mathbf{j} + r_k\mathbf{k}\right\}$ e $\mathbf{s} = \left\{s_1\mathbf{1} + s_i\mathbf{i} + s_j\mathbf{j} + s_k\mathbf{k}\right\}$, resulta em outro quaternion $\mathbf{t}$ tal que:

$$\mathbf{t} = \left\{(r_1 + s_1)\mathbf{1} + (r_i + s_i)\mathbf{i} + (r_j + s_j)\mathbf{j} + (r_k + s_k)\mathbf{k}\right\}$$

O produto de dois quaternions é também efetuado, de certa forma, analogamente ao produto de vetores (e também ao produto de números complexos), ou seja, por distributiva. O interessante aqui é que de dois quaternions não é comutativo. Pode-se definiir o produto de dois quaternions de uma forma bem simples estabelecendo regras para o produto dos números unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Estas regras foram formuladas por Hamilton e são descritas abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = \mathbf{ijk} &= -\mathbf{1} \\ \mathbf{ij} &= -(\mathbf{ji}) = \mathbf{k} \\ \mathbf{jk} &= -(\mathbf{kj}) = \mathbf{i} \\ \mathbf{ki} &= -(\mathbf{ik}) = \mathbf{j} \end{aligned}$$

Sendo também evidente que o produto do número $\mathbf{1}$ por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ou $\mathbf{k}$ resulta nos próprios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ou $\mathbf{k}$. Como exemplo, vamos considerar os dois quaternions puros $\mathbf{r}(Pu) = \left\{r_i\mathbf{i} + r_j\mathbf{j} + r_k\mathbf{k}\right\}$ e $\mathbf{s}(Pu) = \left\{s_i\mathbf{i} + s_j\mathbf{j} + s_k\mathbf{k}\right\}$. Efetuando o produto deles por distributiva e utilizando as regras acima, encontramos:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = &-\left(r_i s_i + r_j s_j + r_k s_k\right)\mathbf{1} \\ &+ \left(r_2 s_3 - r_3 s_2\right)\mathbf{i} + \left(r_3 s_1 - r_1 s_3\right)\mathbf{j} + \left(r_1 s_2 - r_2 s_1\right)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Caso tivéssemos considerado quaternions completos, um termo adicional apareceria em cada componente resultante.

Uma vez definido o produto quaterniônico, definimos o módulo de um quaternion $\mathbf{q}$ pela equação $|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{qq}^*}$, onde $\mathbf{q}^* = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ é o chamado *conjugado* de $\mathbf{q}$. Também podemos definir um quaternion inverso para cada quaternion não nulo através da equação $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* / |\mathbf{q}|^2$, de forma que sempre se tenha $\mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{qq}^{-1} = \mathbf{1}$ – propriedade importantíssima dos quaternions.

Observe agora como são semelhantes o produto de dois quaternion e aquele entre dois vetores: o primeiro termo do quaternion resultante, que constitui a sua parte real, é semelhante ao que se obtém pelo produto interno de dois vetores, com a única diferença no sinal, que é oposto; já o seu segundo membro, correspondente a sua parte pura, é semelhante ao que se obtém por um produto externo entre dois vetores. Observe também que o produto de dois quaternions puros não gera outro quaternion puro, mas sim um "quaternion completo", do mesmo modo que o produto geométrico de dois vetores não resulta somente em outro vetor...

Toda esta semelhança não é fruto de mera coincidência. De fato, as relações entre $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, no que diz respeito ao produto quaterniônico, são as mesmas válidas para o produto geométrico de biversores, pois ambos são anti-comutativos. Assim, numa primeira abordagem, poderíamos supor que os quaternions unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, possam ser representados na álgebra geométrica por bivetores. Isto de fato é verdade, pois substituindo $\mathbf{i}$ pelo biversor $\vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_2$, $\mathbf{j}$ por $\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3$ e $\mathbf{k}$ por $\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1$, encontramos exatamente as mesmas relações existentes entre $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, veja:

$$\mathbf{ijk} = (\vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_2)(\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3)(\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1) = -\mathbf{1}$$
$$\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = (\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_i)(\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_i) = -\mathbf{1}$$

$$\mathbf{ij} = (\vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_2)(\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3) = (\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1) = \mathbf{k}$$
$$\mathbf{ki} = (\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1)(\vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_2) = (\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3) = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{jk} = (\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3)(\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1) = (\vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_2) = \mathbf{i}$$

No entanto, seria mais natural associar os quaternions unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ a versores do sistema tridimensional, pois era este o intuito de Hamilton. Ora, isto pode ser feito de uma forma bem simples através do conceito de dualidade, uma vez que o dual de bivetores são vetores. É fácil verificar as seguintes relações: $\vec{\mathbf{e}}_1 = \bigstar(\vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_2)$, $\vec{\mathbf{e}}_2 = \bigstar(\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_3)$ e $\vec{\mathbf{e}}_3 = \bigstar(\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1)$, ou seja, temos:

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \bigstar\mathbf{i} \qquad \vec{\mathbf{e}}_2 = \bigstar\mathbf{j} \qquad \vec{\mathbf{e}}_3 = \bigstar\mathbf{k}$$

Expressões estas que relacionam os versores $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$ e $\mathbf{e}_3$ com os quaternions unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Portanto, pode-se dizer que a álgebra dos quaternions é totalmente englobada pela álgebra geométrica. Vale ressaltar que o ponto de partida de Clifford na elaboração de sua álgebra foi justamente o trabalho de Hamilton (cuja importância para matemática e física vai muito além dos quaternions). A beleza dos quaternions e sua importância histórica de forma alguma serão esquecidas, porém, é evidente que o formalismo de Clifford é mais adequado ao tratamento vetorial, já que ela não se retém ao sistema tridimensional...

Uma outra aplicação da dualidade, relacionada de forma íntima com os quaternions, é descrita no próximo capítulo.

§14. A álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside.

Nestes últimos capítulos vimos que Hamilton e Grassmann haviam formulado duas álgebras distintas para descrever os fenômenos físicos, abordagens que levaram a elaboração da álgebra geométrica, que de certa forma permitiu unificá-las. Uma outra tentativa de fazer esta unificação foi realizada por Willard Gibbs e Olliver Heaviside. Gibbs havia tido contato com os quaternions de Hamilton e também estudado o trabalho de Grassmann, e soube assim, com uma grande praticidade *sui generis*, simplificar ambos os trabalhos e explicar vários fenômenos naturais de uma forma bem mais simples que os seus antecedentes.

A álgebra de Gibbs-Heaviside é uma álgebra vetorial definida somente no sistema tridimensional; não há mais bivetores, trivetores etc., mas somente vetores e escalares. Nesta álgebra os vetores se somam e se subtraem de forma análoga ao visto até aqui, a diferença está unicamente na definição do produto de vetores – como podemos ver, não havia consenso algum sobre a forma correta de se multiplicar vetores.

Ao invés de admitir apenas um produto vetorial, Gibbs definiu dois produtos vetoriais: o *produto escalar* (ou *interno*) e o *produto vetorial* (ou *cruzado*) de dois vetores. O primeiro deles já fomos apresentados: é o produto interno entre dois vetores definido pela álgebra geométrica. Tal produto, como vimos, resulta em um escalar – daí o nome produto escalar de dois vetores. Já o segundo, é uma simplificação do produto externo definido na álgebra geométrica. A única diferença entre eles é que, ao invés de gerar um bivetor, o produto cruzado de Gibbs gera um outro vetor, ortogonal aos anteriores.

A elaboração deste produto vetorial teve como incentivo certas observações referentes a alguns fenômenos físicos – sobretudo eletromagnéticos – onde uma grandeza vetorial podia ser escrita por um vetor resultante de um produto entre dois outros vetores. A observação destes fenômenos também demonstrava que o módulo do vetor resultante deveria ser igual ao produto dos módulos dos vetores originais multiplicados pelo seno do ângulo entre eles (análogo ao produto de Grassmann), e com direção ortogonal a ambos.

Vamos verificar agora como este produto é definido. No que se segue, o produto cruzado de dois vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ será representado por $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$. A forma mais simples de se definir tal produto está em estabelecer regras para o produto de versores. Uma vez que o vetor resultante é, por definição, ortogonal aos vetores originais, estas relações têm de ser as seguintes:

$$\vec{\mathbf{e}}_1 \times \vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_2 \times \vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{e}}_1 \times \vec{\mathbf{e}}_2 &= \vec{\mathbf{e}}_3 & \qquad \vec{\mathbf{e}}_2 \times \vec{\mathbf{e}}_1 &= -\vec{\mathbf{e}}_3 \\ \vec{\mathbf{e}}_2 \times \vec{\mathbf{e}}_3 &= \vec{\mathbf{e}}_1 & \qquad \vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_2 &= -\vec{\mathbf{e}}_1 \\ \vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_1 &= \vec{\mathbf{e}}_2 & \qquad \vec{\mathbf{e}}_1 \times \vec{\mathbf{e}}_3 &= -\vec{\mathbf{e}}_2 \end{aligned}$$

Observe que esta operação também não é comutativa (aliás, nem associativa). Dados dois vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, descritos em um sistema tridimensional, o produto cruzado $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ pode ser encontrado efetuando a distributiva e, posteriormente, aplicando as regras dadas acima para o produto de versores, de onde resulta o vetor $\vec{\mathbf{u}} \equiv \langle \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3 \rangle$, que tem por componentes:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}}_1 &= (v_2 w_3 - v_3 w_2)\, \vec{\mathbf{e}}_1 \\ \vec{\mathbf{u}}_2 &= (v_3 w_1 - v_1 w_3)\, \vec{\mathbf{e}}_2 \\ \vec{\mathbf{u}}_3 &= (v_1 w_2 - v_2 w_1)\, \vec{\mathbf{e}}_3 \end{aligned}$$

Por uma simples análise vemos que o vetor $\vec{\mathbf{u}}$ é ortogonal ao plano formado por $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, e que o seu módulo é dado por $|\vec{\mathbf{v}}| \cdot |\vec{\mathbf{w}}| \cdot \operatorname{sen} \alpha_{\mathbf{vw}}$, tal qual requer a definição do produto cruzado de dois vetores.

Já vimos que este produto é semelhante ao definido por Grassmann, agora veremos agora o quão ele é semelhante ao produto de quaternions. Note que as relações definidas para o produto cruzado de versores só diferem das relações estabelecidas por Hamilton para os quaternions pelo fato de o produto entre dois quaternion homólogos $\mathbf{ii}$, $\mathbf{jj}$ e $\mathbf{kk}$ ser igual a -1, enquanto que os produtos $\vec{\mathbf{e}}_1 \times \vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2 \times \vec{\mathbf{e}}_2$ e $\vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_3$ são iguais a 0. Esta semelhança nos faz indagar se Gibbs quiçá não tivera a intenção de unificar a álgebra dos quaternions com a de Grassmann...

Porém, como mostraremos agora, esta unificação ocorre apenas em aparência.

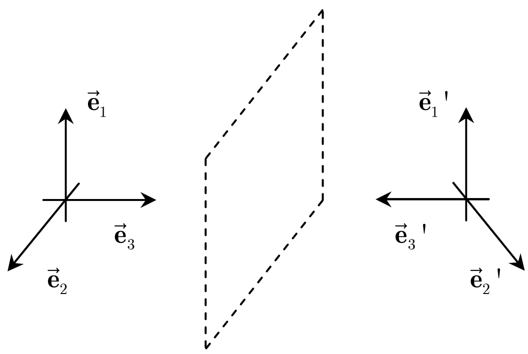

Figura 8: *Reflexão Especular*

O problema na abordagem de Gibbs é que, infelizmente, o produto cruzado apresenta incoerências internas em sua definição. Um dos paradoxos existentes na álgebra de Gibbs está relacionado a uma operação que se chama "reflexão especular": considere um sistema tridimensional cujos eixos são descritos pelos versores $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$ e $\vec{\mathbf{e}}_3$, e seja $\vec{\mathbf{u}}$ um vetor orientado na direção de $\vec{\mathbf{e}}_3$. Se colocarmos um espelho na direção do plano definido pelos versores $\vec{\mathbf{e}}_1$ e $\vec{\mathbf{e}}_2$, a reflexão destes eixos no espelho nos fornecerá um "sistema virtual" cujos eixos serão agora, $\vec{\mathbf{e}}_1\,' = \vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2\,' = \vec{\mathbf{e}}_2$ e $\vec{\mathbf{e}}_3\,' = (-\vec{\mathbf{e}}_3)$. Em virtude deste fato, o vetor $\vec{\mathbf{u}}$ também deve se inverter perante uma reflexão especular: $\vec{\mathbf{u}}\,' = -\vec{\mathbf{u}}$ pois que possui a mesma direção de $\vec{\mathbf{e}}_3$. Mas o problema na formulação de Gibbs é que o vetor resultante do produto $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ não se altera perante uma reflexão especular. De fato, sejam os vetores $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\mathbf{e}}_1$ e $\vec{\mathbf{w}} = w\vec{\mathbf{e}}_2$, de forma que produto cruzado $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ resulte no vetor $\vec{\mathbf{u}} = u\vec{\mathbf{e}}_3$. Ao realizarmos uma reflexão especular, era de se esperar que o vetor $\vec{\mathbf{u}}$ se invertesse, mas isto não ocorre porque a orientação dos versores $\vec{\mathbf{e}}_1$ e $\vec{\mathbf{e}}_2$ não se inverte, de forma que ainda temos: $\vec{\mathbf{v}}\,' \times \vec{\mathbf{w}}\,' = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}}$. A figura 8 ilustra bem este fato.

Por este motivo é necessário distinguir dois tipos de vetores na álgebra de Gibbs: os *vetores axiais*

– aqueles que se invertem perante uma reflexão especular – e os *vetores polares* – que são provenientes de um produto cruzado de vetores axiais e que, portanto, não se invertem perante uma reflexão especular. Esta distinção foi, na minha opinião, uma tentativa desesperada de contornar o problema...

Este paradoxo é completamente superado na álgebra geométrica através da operação dualidade. Na álgebra geométrica o produto cruzado de Gibbs pode ser definido, se me permitem, como o dual do produto de Grassmann, pois com uma simples análise das relações definidas para o produto cruzado de versores e da definição de dualidade, encontramos:

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \star^{-1}(\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}) \qquad \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \star(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$$

A prova destas relações é fácil de ser obtida: considere um sistema tridimensional e seja $\vec{\vec{\mathbf{u}}} = \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}$. Conforme vimos, as componentes de $\vec{\vec{\mathbf{u}}}$ serão dadas por:

$$\begin{aligned}
\vec{\vec{\mathbf{u}}}_{23} &= (v_2 w_3 - v_3 w_2)\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3 \\
\vec{\vec{\mathbf{u}}}_{31} &= (v_3 w_1 - v_1 w_3)\vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_1 \\
\vec{\vec{\mathbf{u}}}_{12} &= (v_1 w_2 - v_2 w_1)\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2
\end{aligned}$$

Assim, aplicando a operação dualidade a cada componente, encontramos diretamente o produto cruzado $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$, cujas componentes serão dadas por:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{u}}_1 &= \star^{-1}\vec{\vec{\mathbf{u}}}_{23} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)\vec{\mathbf{e}}_1 \\
\vec{\mathbf{u}}_2 &= \star^{-1}\vec{\vec{\mathbf{u}}}_{31} = (v_3 w_1 - v_1 w_3)\vec{\mathbf{e}}_2 \\
\vec{\mathbf{u}}_3 &= \star^{-1}\vec{\vec{\mathbf{u}}}_{31} = (v_1 w_2 - v_2 w_1)\vec{\mathbf{e}}_3
\end{aligned}$$

Onde $\star^{-1} = \vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1$. Observe que agora também podemos escrever o produto geométrico de dois vetores pela equação:

$$\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}} + \star(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$$

Agora, vamos provar como o paradoxo da álgebra de Gibbs não existe na álgebra geométrica. Não defrontamos com problemas na álgebra de Clifford porque utilizamos o conceito de dualidade ao definir $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \star^{-1}(\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}})$. Quando isto é feito, ao se realizar uma reflexão especular, o operador $\star^{-1} = \vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_1$ se inverte, de forma que temos, no sistema virtual, $\star' = \star = \vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_3$ e, conseqüentemente, nos conduz à relação $(\vec{\mathbf{v}}' \times \vec{\mathbf{w}}') = -(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$, já que o sistema tridimensional é anti-simétrico, ou seja, o vetor $\vec{\mathbf{u}}$ se inverte perante uma reflexão especular: $\vec{\mathbf{u}}' = -\vec{\mathbf{u}}$, como era de se esperar.

Assim está demonstrado como a álgebra de Gibbs pode ser completamente descrita pela álgebra geométrica, e como ela é livre de contradições internas, além de ser aplicável a sistemas de qualquer dimensão.

§15. Funções escalares de valor vetorial. Derivadas e integrais dessas funções.

Estudaremos agora um ramo importante do conhecimento científico: o estudo das funções e sua análise. Não faremos aqui um estudo completo e rigoroso do assunto, motivo pelo qual optamos por uma abordagem a mais intuitiva possível.

Definimos o conceito de *função* como a operação matemática que estabelece uma relação entre dois conjuntos A e B, de forma que, para cada elemento de B se faça corresponder *um único elemento* em A – diz-se que A é função de B. O conjunto B, do qual os elementos são tomados arbitrariamente, se diz *domínio* da função, e o conjunto A, cujos elementos são determinados pelos elementos de B é a sua *imagem*. Geralmente, uma função é representada da forma $y = f(x)$, onde y representa um elemento do conjunto imagem e x um elemento do conjunto domínio, $f(x)$ é a equação que estabelece a correspondência única entre x e y. Tais conjuntos podem ser de qualquer natureza, mas comumente utilizamos conjuntos numéricos onde as funções são ditas numéricas. Aqui enfocaremos casos onde pelo menos um desses conjuntos é vetorial: são as funções vetoriais.

Começaremos estudando funções cujo domínio é um conjunto escalar e a imagem um conjunto vetorial (*i.e.*, funções escalares de valor vetorial). Funções que associam a cada escalar um único vetor. Tais funções expressam situações onde uma grandeza vetorial depende de uma grandeza escalar, como é o caso da posição de um corpo quando este se movimenta, uma vez que tal posição pode ser obtida por um vetor dependente do tempo.

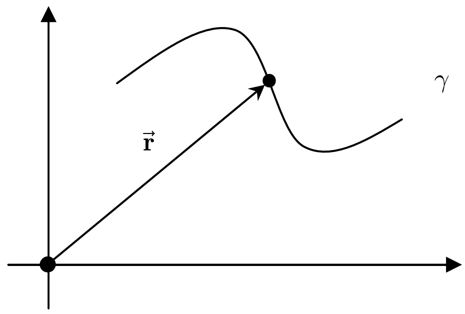

Figura 9: *Curva de uma função de valor vetorial*

Assim como um vetor pode ser decomposto em componentes, uma função vetorial $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{f}}(x)$ também o pode, o que significa que as componentes do vetor também são funções da mesma variável x da função vetorial. Logo, para uma função vetorial (obviamente, pode-se definir funções *k*-vetoriais de uma forma análoga), podemos escrever:

$$\vec{\mathbf{y}}(x) = \vec{\mathbf{y}}_1(x) + \vec{\mathbf{y}}_2(x) + \ldots \vec{\mathbf{y}}_n(x)$$

Também podemos definir o módulo de uma função vetorial como o número real não-negativo que resulta da operação $\left|\vec{\mathbf{y}}(x)\right| = \sqrt{\left(\vec{\mathbf{y}}_1(x)\right)\left(\vec{\mathbf{y}}_1(x)\right)}$, considerando apenas funções reais. Numa geometria euclidiana e utilizando um sistema vetorial ortogonal, também podemos escrever:

$$\left|\vec{\mathbf{y}}(x)\right| = \sqrt{\left|\vec{\mathbf{y}}_1(x)\right|^2 + \left|\vec{\mathbf{y}}_2(x)\right|^2 + \ldots \left|\vec{\mathbf{y}}_n(x)\right|^2}$$

Funções de valor vetorial têm grande importância em geometria analítica, já que uma relação algébrica pode ser representada por uma figura geométrica cujos pontos satisfaçam a relação dada. Ora, se utilizarmos um sistema vetorial em lugar do cartesiano, então cada ponto da curva passa a descrever um vetor e a curva pode assim ser representada por uma função vetorial, bastando apenas definir o parâmetro escalar de que a função depende – este pode ser o ângulo que o vetor faz com um dos eixos do sistema, ou ainda o comprimento da curva a partir de um ponto dela escolhido como origem. Tal possibilidade é representada na figura 9.

Uma função $y = f(x)$ nos informa como os valores de y dependem dos valores de x. Em muitos casos é interessante saber também como y varia conforme variamos o valor de x. Para obter esta relação, suponha que sejam dados dois valores à x, digamos x_a e x_b, com o que, a função apresentará dois respectivos valores $y_a = f(x_a)$ e $y_b = f(x_b)$. Assim, a diferença $\Delta y = f(x_b) - f(x_a)$ representa a variação que a função apresenta quando a variável da qual ela depende varia de $\Delta x = x_b - x_a$. Admita que a função seja contínua (*grosso modo*, isso significa que a valores infinitamente próximos de x correspondem valores infinitamente próximos de y), então pode-se escolher Δx tão pequeno quanto se queira, e assim, para uma variação infinitamente pequena dx, a função também apresentará uma variação infinitamente pequena dy. Assim podemos relacionar as variações infinitesimais dy e dx por uma nova função da forma $dy = g(x)\,dx$, que é chamada de *diferencial da função*. A razão $\dfrac{dy}{dx} = g(x)$ chama-se *derivada da função* $y = f(x)$ e nos fornece a taxa de variação de dy em relação a dx. Geometricamente, a derivada de uma função corresponde ao coeficiente linear das retas tangentes à curva representativa da função, em cada ponto dela.

Para funções vetoriais, pode-se dizer o mesmo, bastando aplicar as considerações feitas acima a cada componente da função, lembrando-se apenas que o seu valor é agora um vetor e não um número. Assim, dada uma função vetorial $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{f}}(x)$, a variação $\Delta\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{f}}(x_b) - \vec{\mathbf{f}}(x_a)$ que ela apresenta quando x varia de $\Delta x = x_b - x_a$ corresponde agora a um vetor de origem no ponto (y_a, x_a) e destino em (y_b, x_b). Se considerarmos uma variação dx infinitamente pequena, então a variação $d\vec{\mathbf{y}}$ sofrida pela função corresponderá a um vetor de magnitude infinitamente pequena e tangente à curva representativa da função em cada ponto dela. É interessante perceber que este vetor depende dos valores de x, o que permite representá-lo por uma função $d\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{g}}(x)\,dx$, a qual também pode ser escrita através de componentes como abaixo:

$$d\vec{\mathbf{y}}(x) = d\vec{\mathbf{y}}_1(x) + d\vec{\mathbf{y}}_2(x) + \dots d\vec{\mathbf{y}}_{\mathrm{n}}(x)$$

A partir do vetor $d\vec{\mathbf{y}}$ podemos encontrar um vetor unitário tangente a cada ponto da curva da função $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{f}}(x)$ dividindo $d\vec{\mathbf{y}}$ pelo módulo da função neste ponto, pois conforme já tínhamos visto, tal divisão sempre resulta em um vetor unitário se o módulo de $d\vec{\mathbf{y}}$ não for nulo.

A razão $\dfrac{d\vec{\mathbf{y}}}{dx} = \vec{\mathbf{g}}(x)$ é a derivada escalar da função vetorial $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{f}}(x)$, geometricamente, a função $\vec{\mathbf{g}}(x)$ fornece vetores tangentes curva da função, em cada ponto dela, cujos módulos são obtidos pela relação $\sqrt{\vec{\mathbf{g}}(x)\vec{\mathbf{g}}(x)}$, já que só estamos considerando funções reais.

As mesmas regras de derivação válidas para funções numéricas são válidas para funções de valor vetorial, as principais são as descritas abaixo:

$$\frac{d}{dx}\vec{\mathbf{c}} = 0\,; \qquad \frac{d}{dx}k\,\vec{\mathbf{v}} = k\frac{d}{dx}\vec{\mathbf{v}}\,;$$

$$\frac{d}{dx}\left(\vec{\mathbf{v}} \pm \vec{\mathbf{w}}\right) = \frac{d}{dx}\vec{\mathbf{v}} \pm \frac{d}{dx}\vec{\mathbf{w}}$$

Nestas equações, $\vec{\mathbf{c}}$ é um vetor constante (tanto em módulo como em direção e sentido); $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ são funções vetoriais da forma $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{f}}(x)$ e k é um escalar.

A regra da derivada de um produto de funções vetoriais merece uma atenção especial. Analogamente à derivação numérica, podemos escrever:

$$\frac{d}{dx}\left(\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}\right) = \vec{\mathbf{v}}\frac{d\vec{\mathbf{w}}}{dx} + \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dx}\vec{\mathbf{w}}$$

Porém, como o produto $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}$ deve ser considerado geométrico, temos de escrever $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}$ e isso implica que a derivada de um produto de vetores corresponderá à soma de uma função escalar (*i.e.*, numérica) com uma função bivetorial, e teremos:

$$\frac{d}{dx}\left(\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}\right) = \frac{d\left(\vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}}\right)}{dx} + \frac{d\left(\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}\right)}{dx}$$

Onde podemos também escrever:

$$\frac{d}{dx}\left(\vec{\mathbf{v}} \vee \vec{\mathbf{w}}\right) = \vec{\mathbf{v}} \vee \frac{d\vec{\mathbf{w}}}{dx} + \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dx} \vee \vec{\mathbf{w}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}\right) = \vec{\mathbf{v}} \wedge \frac{d\vec{\mathbf{w}}}{dx} + \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dx} \wedge \vec{\mathbf{w}}$$

Nestas relações, deve-se ter cuidado com a ordem dos vetores que são derivados, pois o produto geométrico não é comutativo. Pela "regra do produto" vemos que além de funções vetoriais, pode-se definir em geral funções *k*-vetoriais. O leitor que acompanhou o texto até aqui não deve estar surpreso: estas funções apenas representam a dependência de grandezas *k*-vetoriais com escalares, como por exemplo a variação do momentum angular de um corpo rígido no decorrer do tempo...

Dois casos também merecem destaque: a derivada escalar de funções vetoriais cuja direção é sempre constante será sempre uma nova função vetorial cujos vetores têm mesma direção dos anteriores (obviamente porque são vetores tangentes à curva) e, quando a função vetorial possui módulo sempre constante, mas podendo variar de direção, então a sua derivada resultará em uma função cujos vetores serão todos eles ortogonais aos vetores da função original, em cada ponto dela, exemplificando: considere a função que descreve a velocidade de um corpo num movimento circular, função esta que possui módulo constante. Quando derivamos em relação ao tempo, os vetores resultantes da derivada desta função correspondem a vetores que definem a aceleração centrípeta, os quais serão sempre ortogonais aos vetores-velocidade e apontam para o centro do circulo...

Uma vez obtida a derivada de uma função, como retornar à função original? A operação que permite esta façanha chama-se *integral*, esta pode ser entendida da seguinte forma: suponha que $dy = g(x)\,dx$ seja uma função diferencial, e queremos saber qual é a função $y = f(x)$ que a gerou (função que recebe o nome de *primitiva*). Ora, uma vez que

dy corresponde a uma variação infinitamente pequena de $f(x)$, a variação desta função entre dois valores x_a e x_b pode se obtida somando-se todos os dy existentes neste intervalo. Esta soma define o que se chama integral definida, sendo x_a e x_b os seus extremos de integração, e é representada pelo símbolo de integral, dado abaixo:

$$\Delta y = \int_{x_a}^{x_b} g(x)\, dx$$

Uma vez obtida a forma variada da função, a sua forma original pode ser obtida caso se saiba o valor da função para algum valor particular de x. Esta informação adicional é necessária porque os termos constantes presentes na função primitiva $f(x)$ não podem ser recuperados por uma integração, já que a derivada de qualquer constante é sempre igual a zero. Se não tivermos esta informação, a função encontrada pela integral poderá estar diferindo da primitiva por uma constante c, por este motivo, tal integral é dita indefinida e escrevemos: $y = \int g(x)\, dx + c = f(x)$. Uma integral pode ser resolvida desde que se saiba qual a função primitiva cuja derivada resulta na função que se quer integrar, mas, infelizmente, encontrar tal função não algo trivial e às vezes nem é possível...

Para as integrais de funções de valor vetorial, procedemos da mesma forma, lembrando-se apenas que a primitiva resultante será uma função vetorial.

O comprimento de curvas pode ser encontrado de forma bem mais fácil com integrais de funções vetoriais, de fato, se $|d\vec{\mathbf{y}}(x)|$ é o valor absoluto da diferencial $d\vec{\mathbf{y}}(x)$ – que é infinitamente pequeno – e como estes vetores são sempre tangentes à curva em questão, então a soma de todos os $|d\vec{\mathbf{y}}(x)|$ em um dado intervalo nos fornecerá o comprimento da curva neste intervalo, e podemos escrever:

$$C = \int_{x_a}^{x_b} |d\vec{\mathbf{y}}(x)|\, dx$$

Se não tomássemos o módulo na equação acima, encontraríamos o vetor deslocamento $\Delta\vec{\mathbf{y}}$ entre os pontos (y_a, x_a) e (y_b, x_b), ou seja, podemos escrever:

$$\Delta\vec{\mathbf{y}} = \int_{x_a}^{x_b} d\vec{\mathbf{y}}(x)\, dx\,.$$

§16. Campos vetoriais, o operador nabla, a derivada geométrica.

As funções apresentadas no capítulo anterior permitem relacionar entre si apenas duas grandezas. É claro que encontramos na natureza vários exemplos de grandezas dependem de várias outras. A relação enter estas grandezas pode ser feita através de funções de várias variáveis, que diferem das anteriores apenas porque o seu domínio é agora formado por mais de um conjunto, digamos $X_1, X_2, \ldots X_n$, sendo ainda único o conjunto imagem Y. Para cada combinação de elementos $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ dos conjuntos do domínio, corresponde um único elemento y do conjunto imagem. A representação de tais funções é análoga: $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Geometricamente, podemos representar uma função de n variáveis por um sistema cartesiano com n eixos, onde a cada um destes eixos é associado a uma das variáveis. Nesta representação, não há eixo associado à imagem da função, sendo esta obtida pelo valor associado a cada ponto do sistema.

Quando a função depende de várias variáveis, cada variável pode sofrer variações diferentes das outras e de forma independente, mas, uma vez que para cada conjunto de valores $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ a função apresenta um valor bem determinado, a sua forma variada pode ser encontrada pela diferença entre dois conjuntos destes considerados, de forma que temos:

$$\Delta w = f(x_{1b}, x_{2b}, \ldots x_{nb}) - f(x_{1a}, x_{2a}, \ldots x_{na})$$

Entretanto, é muito mais conveniente investigar como a função varia em relação a cada uma das variáveis, quando as demais são mantidas constantes, isto é, saber qual a variação da função devida cada variável independentemente das outras – dizemos que estamos investigando as *variações parciais* da função. Esta relação pode ser facilmente encontrada dando-se uma variação à variável escolhida e mantendo as demais inalteradas, assim, a variação parcial da função em relação à variável x_i , será dada pela relação:

$$\Delta_x w = f\left(x_{1a}, \dots x_{ib}, \dots x_{na}\right) - f\left(x_{1a}, \dots x_{ia}, \dots x_{na}\right)$$

Nesta equação, somente Δx_i é diferente de zero. É evidente que uma função de n variáveis apresentará n variações parciais. Se as variações $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n$ forem consideradas infinitesimais então a função também apresentará uma variação parcial infinitesimal. A razão entre a variação parcial da função pela variação infinitamente pequena de cada variável chama-se *derivada parcial* da função em relação a esta variável. Logicamente para cada variável x_i , a função apresentará uma derivada parcial correspondente, e que é representada pelo símbolo $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$. A derivada parcial nos indica a taxa de variação da função em relação a cada variável, quando as demais são mantidas constantes.

Sabendo como se trabalhar com funções de várias variáveis podemos agora estudar o caso de funções vetoriais com domínio e imagem *k*-vetoriais. Tais funções são chamadas de *campo* e, dependendo se a imagem da função é escalar, vetorial, bivetorial, etc, recebe o nome de campo escalar, campo vetorial, etc. Estudaremos aqui somente funções de domínio vetorial, pois que serve como paradigma para as demais.

Uma vez que os elementos do conjunto domínio destas funções são vetores, e como os vetores podem ser decompostos em componentes, decorre que a função pode ser considerada como uma função das componentes. Logo uma função de domínio vetorial é, em geral, uma função de várias variáveis. A representação geométrica de tais funções pode ser feita utilizando um sistema vetorial no lugar do cartesiano, de forma que a cada eixo do sistema estará associado uma componente dos vetores do domínio e a cada ponto do sistema, associado um *k*-vetor cuja grade depende da natureza da função.

Seja $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right)$ uma função de campo de domínio vetorial e cuja imagem é uma função *k*-vetorial de grade qualquer. Os elementos do domínio desta função são vetores, logo possuem a forma $\vec{\mathbf{x}} = x_1\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\vec{\mathbf{e}}_2 + \dots x_n\vec{\mathbf{e}}_n$ e a função pode ser escrita como:

$$\hat{\mathbf{y}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \hat{\mathbf{f}}_1\left(x_1\vec{\mathbf{e}}_1\right) + \hat{\mathbf{f}}_2\left(x_2\vec{\mathbf{e}}_2\right) + \dots \hat{\mathbf{f}}_2\left(x_n\vec{\mathbf{e}}_n\right)$$

O módulo desta expressão é chamado de *intensidade* do campo no ponto considerado.

O caráter vetorial destas funções também recai sobre as derivadas parciais da função, que se tornam agora componentes de uma nova função vetorial. Esta nova função vetorial proveniente da soma das derivadas parciais vetoriais nos fornece informações importantes sobre o comportamento da função e é chamada de *derivada geométrica* da função e representada por:

$$\vec{\nabla}\hat{\mathbf{y}} = \left(\vec{\mathbf{e}}_1\frac{\partial\hat{\mathbf{y}}}{\partial x_1} + \vec{\mathbf{e}}_2\frac{\partial\hat{\mathbf{y}}}{\partial x_2} + \dots\vec{\mathbf{e}}_n\frac{\partial\hat{\mathbf{y}}}{\partial x_n}\right)$$

O símbolo $\vec{\nabla}$ é a representação da derivada geométrica e chama-se *nabla*. Ele consiste em um operador matemático, pois que sua aplicação fornece a derivada geométrica da função. Tal aplicação deve ser realizada por um produto geométrico entre o nabla e a função a ser derivada. Observe que o nabla tem características vetoriais, embora não seja propriamente um vetor, pois que não possui coeficientes definidos. Pelo que foi dito, o nabla é definido como:

$$\vec{\nabla} = \left(\vec{\mathbf{e}}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{\mathbf{e}}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots\vec{\mathbf{e}}_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

O operador nabla pode ser aplicado a funções vetoriais ou escalares. Em cada caso, a função resultante será diferente, podendo ser uma função escalar, univetorial, bivetorial etc. Estudaremos agora os casos mais importantes.

§16.1. Derivada geométrica de uma função escalar. Gradiente.

Quando aplicamos o operador nabla a uma função-de-campo escalar da forma $\varphi = f\left(\vec{\mathbf{x}}\right)$, obtemos um campo vetorial denominado *Gradiente de* φ e o representamos por $\operatorname{grad}\varphi$. O campo resultante é vetorial já que o produto de um vetor por um escalar é sempre um vetor. Matematicamente, o gradiente é assim definido:

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\vec{\mathbf{e}}_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \vec{\mathbf{e}}_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \ldots + \vec{\mathbf{e}}_n \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$$

A sua interpretação física é simples: o gradiente nos fornece a máxima taxa de variação da função em cada ponto dela. Em cada ponto do sistema o vetor gradiente aponta para a direção onde o campo apresenta a maior taxa de variação e o seu módulo dá a magnitude desta taxa. Costuma-se chamar de *linhas-de-campo* as curvas tangentes aos vetores que formam o gradiente e as linhas ortogonais a elas, onde a intensidade do campo é a mesma, são comumente chamadas de *níveis-de-campo.*

Em muitas ocasiões desejamos saber qual a taxa de variação da função em uma outra direção qualquer, digamos aquela definida pelo vetor $d\vec{\mathbf{r}}$. Esta taxa recebe o nome de *derivada direcional*, e é sempre menor que a definida pelo gradiente. Ela pode ser encontrada projetando os vetores do gradiente na direção do vetor $d\vec{\mathbf{r}}$, logo é definida por $\frac{d\varphi}{d\vec{\mathbf{r}}} = \left(\vec{\nabla}\varphi\right)\cos\alpha$, onde α é o ângulo entre $d\vec{\mathbf{r}}$ e o vetor-gradiente em cada ponto do sistema. Assim, temos:

$$\frac{d\varphi}{d\vec{\mathbf{r}}} = \left(\vec{\mathbf{e}}_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \vec{\mathbf{e}}_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots \vec{\mathbf{e}}_n \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\cos\alpha_n\right)$$

Observe que, se $d\vec{\mathbf{r}}$ for ortogonal ao gradiente, a derivada direcional será nula, o que significa que o campo se mantém constante nesta direção, comprovando que os níveis-de-campo são ortogonais aos vetores do gradiente...

§16.2. Derivada geométrica de uma função univetorial. Divergência e Rotacional.

Considere agora um campo univetorial, que representaremos por $\vec{\psi}$. Uma vez que este campo é vetorial, podemos decompô-lo em componentes escrevendo: $\vec{\psi} \equiv \psi_1\vec{\mathbf{e}}_1 + \psi_2\vec{\mathbf{e}}_2 \ldots + \psi_n\vec{\mathbf{e}}_n$. Quando aplicamos o nabla a este campo, estamos realizamos um produto geométrico entre duas entidades vetoriais, logo podemos escrever:

$$\vec{\nabla}\vec{\psi} = \vec{\nabla} \vee \vec{\psi} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}\,.$$

A parcela $\vec{\nabla} \vee \vec{\psi}$ consiste em um campo escalar que denominamos *divergência de* $\vec{\psi}$ e indicamos por $\operatorname{div}\vec{\psi}$. A divergência é definida pelo produto escalar indicado, que corresponde a:

$$\operatorname{div}\vec{\psi} = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \ldots \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\right)$$

Cada parcela desta equação nos fornece o valor numérico da taxa de variação de cada componente da função em relação à direção desta componente (*i.e.*, a taxa com que ψ_i varia em relação à x_i). O nome "divergência" deve-se ao fato de que, se esta quantidade for nula, então as os vetores que formam o campo não divergem nem convergem para um ponto – suas direções são paralelas; se o seu valor for positivo, então os vetores do campo divergem a partir de um ponto que é chamado de *fonte*; por fim, se a divergência for negativa então os vetores do campo convergem para um ponto que é chamado de *sorvedouro.* No sistema tridimensional, a divergência fornece a densidade do fluxo de vetores que atravessam um elemento de área do sistema.

Já a parcela $\vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}$ trata-se de um campo bivetorial chamado *rotacional de* $\vec{\psi}$ e que representado por $\operatorname{rot}\vec{\psi}$. O rotacional é definido matematicamente pelo produto externo mencionado:

$$\operatorname{rot}\vec{\psi} = \sum\left(\frac{\partial\vec{\psi}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial\vec{\psi}_i}{\partial x_j}\right)\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_j$$

Onde a somatória estende-se a todas as combinações de classe par entre *i* e *j*, de 1 à *n.* Cada parcela desta equação nos fornece a taxa de variação de cada componente da função em relação às outras componentes (*i.e.*, a taxa com que ψ_j varia em relação a x_i, e orientado pelo biversor $\mathbf{\vec{e}}_i\mathbf{\vec{e}}_j$). No sistema tridimensional, o rotacional fornece a densidade de circulação dos vetores que contornam um elemento de área do sistema.

Grosso modo o rotacional pode ser sempre associado a uma propriedade rotativa do campo. Uma forma de verificar visualmente o rotacional de um campo é fazendo a seguinte experiência imaginária: coloca-se um "cata-vento" no ponto desejado e procura-se observar se ele gira ou não devido a um suposto torque exercido pelos vetores do campo (como se eles representassem a força exercida por um hipotético vento), se não girar, então o rotacional do campo é nulo e ele é dito *irrotacional*.

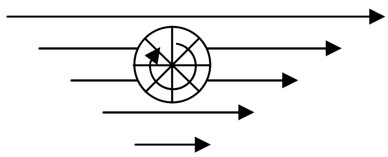

Figura 10: *Testando o rotacional de um campo*

No sistema tridimensional o rotacional possui a forma mais simples:

$$\operatorname{rot}\vec{\psi} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial\vec{\psi}_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\vec{\psi}_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{\vec{e}}_1\mathbf{\vec{e}}_2 + \left(\dfrac{\partial\vec{\psi}_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial\vec{\psi}_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{\vec{e}}_2\mathbf{\vec{e}}_3 + \\ \left(\dfrac{\partial\vec{\psi}_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial\vec{\psi}_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{\vec{e}}_3\mathbf{\vec{e}}_1 \end{array} \right\}$$

Se neste sistema tridimensional, utilizarmos a operação dualidade, através da relação $\star^{-1}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{\psi}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{\psi}$, vamos encontrar um campo vetorial, cujos vetores serão todos ortogonais aos bivetores do campo original. Efetuando a dualidade em cada componente da equação acima, encontramos que este rotacional-dual é definido por:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\psi} = \left(\frac{\partial\vec{\psi}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\vec{\psi}_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{\vec{e}}_3 + \left(\frac{\partial\vec{\psi}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\vec{\psi}_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{\vec{e}}_1 + \left(\frac{\partial\vec{\psi}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial\vec{\psi}_1}{\partial x_3}\right)\mathbf{\vec{e}}_2$$

O produto $\vec{\nabla}\times\vec{\psi}$ é comumente empregado no lugar de $\vec{\nabla}\wedge\vec{\psi}$, devido principalmente a divulgação do trabalho de Gibbs-Heaviside, porém, o rotacional vetorial só pode ser definido no sistema tridimensional, uma vez que ele faz uso do produto cruzado, motivo pelo qual se deve dar preferência ao rotacional bivetorial. Para se passar do rotacional vetorial para o rotacional bivetorial, basta utilizar a relação inversa: $\vec{\nabla}\wedge\vec{\psi} = \star\left(\vec{\nabla}\times\vec{\psi}\right)$.

§16.3. Derivadas geométricas de ordens mais altas. Laplaciano.

Quando aplicamos o nabla a uma função de campo $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}})$, em geral, o resultado é uma outra função $\hat{\mathbf{y}}' = \hat{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}})$. Por este motivo, podemos, em geral, aplicar novamente o nabla a esta função. Demonstraremos que o resultado será um campo *k*-vetorial de mesma grade que o original.

Seja então dado um campo escalar φ. Aplicando o nabla a este campo encontraremos o gradiente φ dado por $\vec{\nabla}\varphi$, mas, se aplicarmos novamente o nabla a este campo, ou seja, se fizermos $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\varphi\right) = \vec{\nabla}^2\varphi$, o que encontraremos? Em princípio, ao fazer a distributiva, vamos encontrar um objeto cujos termos serão da forma $\mathbf{\vec{e}}_i\mathbf{\vec{e}}_j\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}$, com *i* igual ou diferente de *j*, mas é fácil verificar que as derivadas mistas se anulam duas a duas, pois que se tem $\mathbf{\vec{e}}_i\mathbf{\vec{e}}_j\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} + \mathbf{\vec{e}}_j\mathbf{\vec{e}}_i\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i} = 0$, ou seja, a parte bivetorial deste produto é sempre nula, logo, resta-nos apenas a parte escalar dada por $\mathbf{\vec{e}}_i\mathbf{\vec{e}}_i\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_i} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^{\,2}}$. Assim, tal operação gera um outro campo escalar. Isto é evidente, pois o quadrado de um objeto vetorial é sempre um escalar, e como φ é um campo também escalar decorre imediatamente que $\vec{\nabla}^2\varphi$ será escalar.

Podemos mesmo considerar $\vec{\nabla}^2$ como um novo operador geométrico, tal qual o nabla, mas agora de segunda ordem. Pelo o que foi dito, este novo operador pode ser definido pelo produto geométrico $\vec{\nabla}\vec{\nabla}$, o qual fornece:

$$\vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} + \dots \frac{\partial^2}{\partial x_n{}^2}\right)$$

O campo escalar $\vec{\nabla}^2\varphi$ é comumente chamado de *laplaciano* de φ em homenagem a Laplace. Se φ é um campo escalar, então o laplaciano de φ é definido como:

$$\operatorname{lap}\varphi \equiv \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2{}^2} + \dots \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n{}^2}\right)$$

O laplaciano é então a derivada geométrica segunda da função de campo. Também podemos defini-lo como a divergência do gradiente de φ, pois o rotacional do gradiente (que seria a soma das derivadas mistas) é sempre nulo, de forma que o laplaciano corresponde exatamente à divergência do gradiente de φ. Assim, podemos escrever também:

$$\operatorname{lap}\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi).$$

O laplaciano de um campo escalar nos fornece informações valiosas à cerca das "saliências" do campo em torno de seus pontos. Enquanto o gradiente permite saber para onde a função de campo cresce ou decresce, em cada ponto do sistema, o laplaciano nos permite saber onde a função de campo será estacionária, ou seja, onde o campo apresentará um máximo, mínimo ou ponto de inflexão. Sem a introdução do laplaciano, alguns problemas físicos se tornam muito difíceis, senão impossíveis, de se solucionar – aliás, mesmo com ele, a solução procurada não é trivial e geralmente requer certas condições de contorno. Por ter estas propriedades, sua aplicação é vasta no campo da física.

Observe que, se a função considerada não for escalar, mas sim *k*-vetorial, então a aplicação do operador $\vec{\nabla}^2$ resultará em outra função *k*-vetorial, uma vez que este operador é escalar.

Podemos definir outros operadores através de potencias do nabla, como $\vec{\nabla}^3$ etc., mas os apresentados aqui são suficientes para o contexto.

§17. Integrais sobre campos vetoriais.

No capítulo 15 estudamos integrais cuja variável de integração era de natureza numérica – que doravante serão chamadas de integrais escalares. E conforme vimos, a integração é a operação inversa da diferenciação, de forma que, se uma função $y = f(x)$ possui uma derivada $y' = g(x)$, então a integral $\int g(x)\,dx$ nos fornece a função primitiva $f(x)$ a menos de uma constante arbitrária. A integração permite também encontrar a variação que a função primitiva sofre quando a variável da qual ela depende varia de x_a para x_b através da chamada integral definida, dada abaixo:

$$\Delta y = \int_{x_a}^{x_b} g(x)\,dx = f(x_b) - f(x_a)$$

Neste capítulo estudaremos como se efetua integrais cuja variável de integração é um vetor da forma $\vec{x} = x_1\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\vec{\mathbf{e}}_2 + \dots x_n\vec{\mathbf{e}}_n$. Tais integrais serão chamadas de *integrais geométricas* e possuem a seguinte forma geral: $\hat{\mathbf{y}}(\vec{\mathbf{x}}) = \int \hat{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}})\,d\vec{\mathbf{x}}$, onde $d\vec{x} = dx_1\vec{\mathbf{e}}_1 + dx_2\vec{\mathbf{e}}_2 + \dots dx_n\vec{\mathbf{e}}_n$ é o vetor diferencial da variável $\vec{x}$, sendo ainda $\hat{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}})$ e $\hat{\mathbf{y}}(\vec{\mathbf{x}})$ funções *k*-vetoriais de uma variável vetorial.

Como $\vec{x}$ é uma variável, as suas componentes podem assumir qualquer valor pertencente ao domínio da função, o que implica que integrais geométricas atuam em geral sobre um campo vetorial.

Se uma integral escalar fica completamente definida ao se fornecer dois extremos de integração, o mesmo não pode ser dito das integrais geométricas. De fato, uma integral pode ser pensada como uma soma de diferenciais, e quando especificamos os dois extremos de integração de uma integral numérica, os valores entre estes extremos ficam bem determinados, de forma que a soma é única. Já no caso geométrico, especificar dois extremos de integração não basta. Isso fica claro notando que os extremos de integração podem ser representados por dois pontos de um sistema *n*-dimensional, e é vidente que existem infinitas trajetórias ligando estes dois pontos, de forma que a integral pode somar através de qualquer um destes caminhos e, para cada um desses caminhos de integração, resultar num valor diferente.

Assim, é necessário especificar uma trajetória de integração para tornar uma integral geométrica definida – por este motivo as integrais geométricas são comumente chamadas também de *integrais-de-linha*. Isto pode ser feito especificando uma curva $\gamma(\vec{\mathbf{x}})$ no sistema representativo da função a ser integrada. A função $\hat{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}})$ passa a depender de $\gamma(\vec{\mathbf{x}})$, de forma que podemos escrever $\hat{\mathbf{g}}(\gamma(\vec{\mathbf{x}}))$, e a variável de integração passa a ser escrita como $d\vec{\mathbf{x}} = d\gamma(\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{e}}_\gamma$, onde $\vec{\mathbf{e}}_\gamma$ são versores tangentes à curva, em cada ponto dela. Isto conduz a escrever uma integral geométrica como:

$$\hat{\mathbf{y}}(\vec{\mathbf{x}}) = \int \hat{\mathbf{g}}(\gamma(\vec{\mathbf{x}}))\, d\gamma \vec{\mathbf{e}}_\gamma$$

Na prática, as funções $\hat{\mathbf{g}}(\gamma(\vec{\mathbf{x}}))$ e $d\vec{\gamma}(\vec{\mathbf{x}})$ são parametrizadas em relação a uma outra variável t, escalar, de forma a tornar a integral geométrica em uma integral numérica de uma função vetorial, a qual pode ser resolvida mais facilmente pela equação: $\vec{\mathbf{e}}_\gamma \int \hat{\mathbf{g}}(\gamma(t))\vec{\gamma}\,'dt$, onde $\vec{\gamma}\,'$ é a derivada da curva em relação à t.

Em geral, uma integral geométrica pode ser separada em componentes, cada qual relacionada com as respectivas componentes da variável de integração, ou seja, podemos fazer:

$$\int \hat{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}})\, d\vec{\mathbf{x}} = \int g(\vec{\mathbf{x}})\, dx_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + \ldots \int g(\vec{\mathbf{x}})\, dx_n \vec{\mathbf{e}}_n$$

O resultado desta integral indefinida é uma outra função vetorial da forma $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{c}}$ cuja grade depende da natureza da função integranda e onde $\hat{\mathbf{c}}$ é um *k*-vetor constante. Deve-se salientar também que o produto presente em $\hat{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}})d\vec{\mathbf{x}}$ deve ser considerado geométrico, onde serão válidas todas as propriedades aplicadas ao produto de *k*-vetores.

Se a função a ser integrada é escalar, a integração pode ser realizada da mesma forma que calculamos integrais numéricas, com a única diferença que o resultado final será uma função univetorial. Neste caso especial, uma integral definida pode ser calculada pela diferença $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}_b) - \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}_a)$, ou seja, ela não depende da trajetória de integração mas apenas dos seus extremos, isso porque não estamos fazendo nada mais do que efetuar uma diferença vetorial entre os vetores associados aos pontos $\vec{\mathbf{x}}_b$ e $\vec{\mathbf{x}}_a$, porém, esta propriedade não é válida em outros casos...

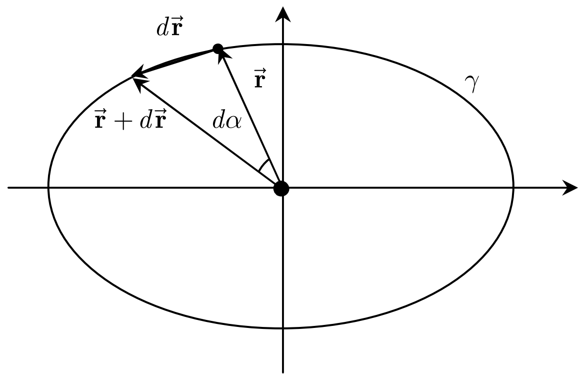

Figura 11: *Cálculo de áreas por integrais geométricas*

Vamos estudar agora integrais geométricas de funções vetoriais. Neste caso, pode-se provar que a integral não dependerá de um caminho de integração se, e somente se, o rotacional da função a ser integrada for nulo. Em todos os outros casos, caminhos diferentes conduzirão a resultados diferentes. A prova é simples: quando integrarmos a função $\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}})$, em geral encontramos uma função $\hat{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}})$ multivetorial, que representa a soma de um campo escalar com um bivetorial; porém, se o rotacional da função $\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}})$ for nulo, isto significa que $\hat{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}})$ será o gradiente de $\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}})$, e assim, a função primitiva que resulta da integração será escalar, conseqüentemente a integral fica definida apenas pelos extremos de integração, pois estaremos efetuando nada mais, nada menos, do que a diferença entre dois números...

Observe também que, por haver um produto geométrico entre $\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}})$ e $d\vec{\mathbf{x}}$, estas integrais, ela deve ser decomposta em duas parcelas, a saber:

$$\int \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}})\, d\vec{\mathbf{x}} = \int \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}) \vee d\vec{\mathbf{x}} + \int \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}) \wedge d\vec{\mathbf{x}}$$

A parcela $\int \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}) \vee d\vec{\mathbf{x}}$ fornece uma função escalar. Quando definida esta integral fornece a soma das projeções (na direção da curva) de todos os vetores presentes nesta trajetória. Se a função $\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}})$ é tal que associa vetores unitários e tangentes à curva

$\gamma(\vec{\mathbf{x}})$, então esta integral permite encontrar o comprimento da curva $\gamma(\vec{\mathbf{x}})$ considerada.

Já a parcela $\int \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}) \wedge d\vec{\mathbf{x}}$ fornece uma função bivetorial. Esta pode ser utilizada para calcular áreas de curvas que não formem laços, conforme a elipse ilustrada na figura 11. Utilizando um sistema de coordenadas vetorial, podemos descrever a curva γ por uma função de valor vetorial $\vec{\mathbf{r}}(\gamma)$, que associa um vetor $\vec{\mathbf{r}}$ a cada ponto da curva. Deste modo, a dois pontos visinhos da curva estarão associados dois vetores: $\vec{\mathbf{r}}$ e $\vec{\mathbf{r}} + d\vec{\mathbf{r}}$, de modo que o produto externo entre estes vetores nos fornece o bivetor $d\vec{\vec{A}}$ cujo módulo será igual ao dobro do elemento de área delimitada por estes vetores. Pode-se fazer uso da propriedade distributiva do produto externo, em conjunto com a propriedade $\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{r}} = 0$, para provar que $\vec{\mathbf{r}} \wedge \left(\vec{\mathbf{r}} + d\vec{\mathbf{r}}\right) = \vec{\mathbf{r}} \wedge d\vec{\mathbf{r}}$ e, por fim, parametrizando curva γ através do ângulo α que o raio-vetor forma com um dos eixos do sistema, a sua área pode ser calculada pela integral:

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_a^b \vec{\mathbf{r}} \wedge d\vec{\mathbf{r}}\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \vec{\mathbf{r}}(\gamma(\alpha)) \wedge \vec{\mathbf{r}}\,'(\alpha)\, d\alpha\right|$$

No caso da elipse que apresentamos na figura, tem-se a equação vetorial $\vec{\mathbf{r}} = (a\cos\alpha)\vec{\mathbf{e}}_1 + (b\,\mathrm{sen}\,\alpha)\vec{\mathbf{e}}_2$, onde a e b são os semi-eixos da elipse. Derivando esta função em relação à α, encontramos $\vec{\mathbf{r}}\,' = (-a\,\mathrm{sen}\,\alpha)\vec{\mathbf{e}}_1 + (b\cos\alpha)\vec{\mathbf{e}}_2$; realizando o produto externo $\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{r}}\,'$ e lembrando da identidade trigonométrica $\mathrm{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, obtemos $\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{r}}\,' = (ab)\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2$, com o que, a integral se escreve: $A = \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} (ab)\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2 d\alpha\right|$, mas como ab é constante e $\left|\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\right| = 1$, obtemos a fórmula $A = \pi ab$, que nos fornece a área de uma elipse em termos dos seus semi-eixos.

Nas integrais discutidas aqui consideramos uma variável de integração vetorial, obviamente, podemos admitir integrais com variáveis de integração bivetoriais, trivetoriais etc., o que não é necessário apresentar. Outros pontos importantes da análise destas integrais (como os teoremas de Green e de Stokes), podem ser consultadas em livros de cálculo vetorial avançado.

§18. A Equação de Maxwell

Para encerrar, gostaria de apresentar uma aplicação da álgebra geométrica que utiliza quase todos os tópicos apresentados aqui e que demonstra bem o seu poderio e praticidade: a unificação das equações de J. C. Maxwell (que descrevem as leis do eletromagnetismo clássico) em uma única equação.

Originalmente, Maxwell escrevera suas equações sem utilizar o conceito de vetor, consistiam em oito equações, quatro descrevendo o campo elétrico, e outras quatro, o campo magnético. Para cada conjunto de quatro equações, uma delas aplicava-se a campos estacionários (correspondiam às leis de Gauss para os fluxos elétrico e magnético), as outras três descreviam, para cada eixo do sistema, as induções elétrica (lei de Faraday-Lenz) e magnética (lei de Ampère-Maxwell), que se devem respectivamente a uma variação do fluxo magnético e a uma variação do fluxo elétrico mais o movimento de cargas elétricas.

Com o advento da álgebra vetorial desenvolvida por Gibbs e Heaviside, onde se introduziu o operador nabla, estas oito equações puderam ser escritas, resumidamente, em quatro equações, grupo que consiste na forma mais conhecida das equações de Maxwell. São elas:

$$\vec{\nabla} \vee \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \vee \vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{j}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \tag{4}$$

Onde $\vec{\mathbf{E}}$ é o campo elétrico, $\vec{\mathbf{B}}$ o campo magnético, ρ a densidade de carga elétrica, $\vec{\mathbf{j}}$ a densidade de corrente elétrica real e c é a velocidade da luz no vácuo.

Esta façanha – unificar as equações de Maxwell – pode ser realizada basicamente pelas seguintes operações: substituir o produto cruzado pelo produto externo (o que permite somar as equações elétricas e magnéticas expressando-as como um produto geométrico); substituir o vetor campo magnético pelo seu dual bivetorial (o que permite definir o multivetor campo eletromagnético); e escrever o nabla em um sistema quadridimensional. Vamos seguir estes passos.

Comecemos por substituir o produto cruzado presente nas equações (3) e (4) pelo produto externo de Grassmann, utilizando para tal a relação $\vec{\nabla} \times \vec{\psi} = \star^{-1}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}\right)$, com o que encontraremos:

$$\star^{-1}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad (3')$$

$$\star^{-1}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{B}}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{j}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \qquad (4')$$

Prosseguimos com a substituição $\vec{\mathbf{B}} = \star^{-1}\vec{\vec{\mathbf{M}}}$, ou seja, expressando o campo magnético pelo dual de um bivetor, de onde as equações acima se tornam:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\vec{\mathbf{M}}}}{\partial t} \qquad (3'')$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\vec{\mathbf{M}}} = -\frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{j}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \qquad (4'')$$

Onde utilizamos as propriedades: $\star\star^{-1} = 1$ e $\star^{-1}\star^{-1} = -\mathbf{1}$, já que o sistema tridimensional é anti-simétrico. Obviamente também teremos $\vec{\nabla} \vee \vec{\vec{\mathbf{M}}} = 0$.

Com estas substituições, podemos somar as equações elétricas e magnéticas, respectivamente, expressando-as como um produto geométrico como abaixo:

$$\vec{\nabla}\vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\vec{\mathbf{M}}}}{\partial t} \qquad (A)$$

$$\vec{\nabla}\vec{\vec{\mathbf{M}}} = -\frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{j}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \qquad (B)$$

E somando estas equações, atingimos o objetivo proposto:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\vec{\mathbf{M}}}\right) = \frac{4\pi}{c}\left(\rho c - \vec{\mathbf{j}}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\vec{\mathbf{M}}}\right)$$

Esta equação ainda pode ser mais simplificada fazendo a substituição $ct = x_4$, e passando a derivada temporal para o outro lado da equação, o que permite definir o nabla a quatro dimensões, como:

$$\vec{\nabla}_4 = \left(\vec{\mathbf{e}}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{\mathbf{e}}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{\mathbf{e}}_3\frac{\partial}{\partial x_3} + \vec{\mathbf{e}}_4\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$

Por fim, definindo o chamado *multivetor de Faraday*, (ou *multivetor campo-eletromagnético*) através de $\mathcal{F} = \left(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\vec{\mathbf{M}}}\right)$, bem como o *multivetor densidade de carga-corrente* $\mathcal{J} = \left(\rho c - \vec{\mathbf{j}}\right)$, a equação de Maxwell adquire a singela forma:

$$\vec{\nabla}_4\mathcal{F} = \frac{4\pi}{c}\mathcal{J}$$

Vale ressaltar que a equação obtida aqui se torna idêntica a que seria obtida pela teoria da relatividade especial ao considerarmos um espaço pseudo-euclidiano à quatro dimensões (cuja única diferença para o espaço euclidiano reside no fato de que a quarta dimensão, associada ao tempo, é matematicamente imaginária, de forma que temos as relações $\vec{\mathbf{e}}_i\vec{\mathbf{e}}_j + \vec{\mathbf{e}}_j\vec{\mathbf{e}}_i = 0$, $\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_2\vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_3\vec{\mathbf{e}}_3 = 1$, mas $\vec{\mathbf{e}}_4\vec{\mathbf{e}}_4 = -1$ no lugar das relações anteriores). Maiores detalhes podem ser conferidos em [1].

No caso de vácuo, onde supomos não haver densidades ou deslocamentos de cargas elétricas ou magnéticas, temos simplesmente:

$$\vec{\nabla}_4\mathcal{F} = 0$$

Aplicando o nabla mais uma vez a esta última equação, obtemos diretamente a equação de onda eletromagnética:

$$\vec{\nabla}_4^{\,2}\mathcal{F} = 0$$

Onde $\vec{\nabla}_4^{\,2}$ é o operador laplaciano a quatro dimensões, descrito na geometria pseudo-euclidiana de

Minkowski (comumente chamado de *operador d'Alembertiano*, em homenagem a J. R. d'Alembert). Operador que tem a forma:

$$\vec{\nabla}_4{}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$$

Separando a derivada temporal da espacial, encontramos, efetivamente, uma equação de onda diferencial no campo $\mathcal{F}$ e que se propaga com a velocidade c:

$$\vec{\nabla}_4{}^2 \mathcal{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x_3{}^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2}$$

Verifica-se desta forma como as equações de Maxwell – e, conseqüentemente, toda a teoria eletromagnética – toma um significado simples e claro dentro do formalismo da álgebra geométrica.

A simplificação obtida aqui pelo emprego da álgebra geométrica não se restringe apenas ao eletromagnetismo: ocorre em todos os ramos da física, como pode ser conferido em [4] e [5], motivo pelo qual devemos estudá-la, divulgá-la e aplicá-la cada vez mais. Este foi o objetivo principal deste artigo.

Dedicatória e agradecimentos

O autor dedica este trabalho à memória de seu pai, Sr. Ari Vieira, grande responsável pela sua escolha profissional. E também agradece a José Victor de Oliveira Neto – bem como aos demais participantes da *Ciencialist* [7] – pelo grande incentivo e valiosos esclarecimentos prestados concernente à análise de campos vetoriais.

Referências

[1] J. Vaz, Jr., *A álgebra geométrica do espaço-tempo e a teoria da relatividade*, Revista Brasileira de Ensino de Física, 22, 234 (1997).

[2] J. Vaz, Jr., *A álgebra geométrica do espaço euclideano e a teoria de Pauli*, Revista Brasileira de Ensino de Física, 19, 234 (2000).

[3] Chris J. L. Doran, *Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics*, Tese de Doutorado, Universidade de Cambridge, (1994).

[4] Chris Doran and Anthony Lasenby, *Geometric Algebra for Physicists* (Cambridge Univ. Press, 2003).

[5] D. Hestenes, *New Fundations for Classical Mechanics*, Kluwer (1989).

[6] D. Hestenes, *A unified language for mathematics and physics*, in *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics,* (J. S. R. Chisholm e A. K. Commons Editors, D. Reidel, 1986).

[7] Grupo de discussão sobre ciência, acesso pelo sítio http://br.groups.yahoo.com/group/ciencialist.