3. DETERMINISMO CAÓTICO.

3.1. INTRODUCCIÓN.

Un análisis de tipo estadístico/econométrico aplicado debe comenzar con el planteamiento de un modelo que permita explicar el fenómeno estudiado. Nuestro análisis se centra en el mercado del Futuro sobre el Bono Nocional a 10 años cuyas características describimos en el capítulo anterior. En el introducíamos el modelo [3.1.1] como posible generador de la evolución de nuestro activo.

$$
\begin{aligned}
dr_t &= a_r(r_t, s_t, L_t)\cdot dt + b_r(r_t, s_t, L_t)\cdot dW_{r,t} \\
ds_t &= a_s(r_t, s_t, L_t)\cdot dt + b_s(r_t, s_t, L_t)\cdot dW_{s,t} \\
dL_t &= a_L(r_t, s_t, L_t)\cdot dt + b_L(r_t, s_t, L_t)\cdot dW_{L,t}
\end{aligned}
\qquad [3.1.1]
$$

Donde, recordemos, r_t es la rentabilidad; s_t es el riesgo; y l_t es la liquidez del contrato de Futuro sobre el Bono Nocional a 10 años. Este modelo esta formado por un sistema de ecuaciones con dos características definitorias: a) al aparecer diferenciales, estaremos ante un sistema dinámico continuo; y, b) el hecho de incluir dW va a significar que el modelo que habíamos propuesto es un sistema estocástico. Al incluir variables aleatorias en el sistema lo que tratamos de hacer es recoger los comportamientos irregulares de las variables y que no conocemos su causa. De igual forma podíamos haber propuesto un sistema como el [3.1.2].

$$\begin{aligned} dr_t &= \alpha_r(r_t, s_t, L_t)\cdot dt \\ ds_t &= \alpha_s(r_t, s_t, L_t)\cdot dt \\ dL_t &= \alpha_L(r_t, s_t, L_t)\cdot dt \end{aligned} \qquad [3.1.2]$$

El sistema [3.1.2] es un sistema determinista en el que no hay ninguna variable aleatoria. Cualquier tipo de comportamiento irregular que observáramos en las variables ya no podría recogerse en la parte aleatoria, sino que tendría que venir reflejado en la parte determinista.

La teoría del caos señala que un sistema dinámico continuo con tres variables como el [3.1.2] puede tener un comportamiento tan irregular como el [3.1.1] sin necesidad de acudir a ningún tipo de variable aleatoria. El único requisito es que alguna de las funciones $\alpha(r_t, s_t, L_t)$ tenga componentes no lineales.

En el presente capítulo vamos a explicar en qué consiste el determinismo caótico, qué condiciones deben cumplirse para que un sistema dinámico refleje un comportamiento caótico, y por último, cómo pueden obtenerse series temporales a partir de un sistema dinámico caótico como el que proponemos en el sistema [3.1.2].

El enfoque que vamos a seguir consiste en presentar modelos teóricos capaces de explicar el comportamiento de los datos de precios de los Futuros sobre el Bono Nocional a 10 años, que es nuestra variable objetivo. Con posterioridad nos plantearemos la bondad de los mismos para captar la evolución que muestran los datos.

3.2. SISTEMAS DINÁMICOS.

El mercado de derivados MEFF Renta Fija es un mercado en el que tanto oferentes como demandantes están en condiciones de igualdad, siendo su número lo suficientemente grande como para considerarlo un mercado de competencia perfecta.

La determinación del precio en un mercado de competencia perfecta se realiza a través de un sistema de ecuaciones como el [3.2.1]. En él se refleja la oferta y la demanda de un producto en función del precio. En este sistema, la solución se encuentra igualando oferta y demanda para obtener el precio al que se comprarán o venderán los Futuros. Este sistema, tal como lo hemos planteado, es independiente del momento de tiempo en el que nos encontremos. Una vez que se determinan quienes demandan y quienes ofrecen el bien (en nuestro caso el Futuro), el precio queda fijado, produciéndose todas las compraventas a ese precio de *equilibrio*.

$$\left.\begin{aligned} x^D &= a_0 - a_1 \cdot P \\ x^S &= b_0 + b_1 \cdot P \\ x^D &= x^S \end{aligned}\right\} \qquad [3.2.1]$$

El sistema representado por las ecuaciones de [3.2.1] y por la figura 3.2.1, es un *sistema estático*. En él las variables no dependen del tiempo. En estos modelos suponemos que estamos en equilibrio, esto es, el mercado ha asignado el precio de intercambio y a este precio se hacen todas las operaciones. Los cambios en los precios sólo pueden entenderse a través de cambios en la oferta y la demanda.

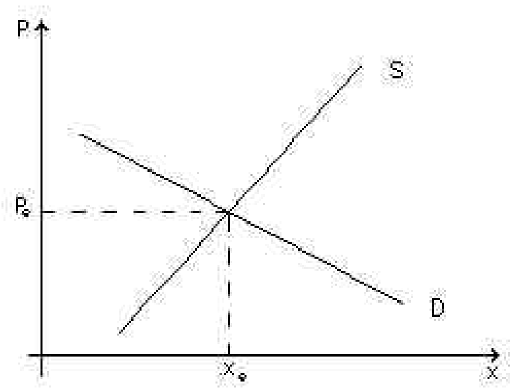

Figura 3.2.1: Solución al sistema de ecuaciones [3.2.1]. x_e y P_e señalan el equilibrio en este mercado.

Este modelo resulta poco realista, pues presupone la determinación instantánea del precio al que se equilibra el mercado. Si intentamos introducir en el modelo, el mecanismo que lleva al mercado a lograr el precio de equilibrio, tendremos que incorporar el factor tiempo como se hace, por ejemplo, en el sistema [3.2.2].

$$\left.\begin{array}{l} x_t^D = a_0 - a_1 P_t \\ x_t^S = b_0 + b_1 P_{t-1} \end{array}\right\} \qquad [3.2.2]$$

Hemos transformado el sistema estático [3.2.1] en uno en el que la oferta no se ajusta instantáneamente. Este es el clásico modelo de la telaraña en el que se considera que hace falta un período de tiempo para completar el proceso productivo. Para expresarlo matemáticamente, ha bastado con indicar que la oferta tarda un período de tiempo en responder al precio del mercado.

Un *sistema dinámico* es aquel sistema en el que las variables son funciones del tiempo. Se expresan matemáticamente en forma de sistemas de ecuaciones diferenciales o en diferencias finitas, según consideremos el tiempo como una variable continua o discreta, respectivamente.

Un sistema dinámico se estudia en su *espacio de fase*, el cual es un espacio vectorial en el que cada vector representa la descripción instantánea del sistema dinámico en ese momento. Cada componente de ese vector es una de las variables que determinan el estado en que se encuentra el sistema. El sistema representado en las ecuaciones [3.2.2] queda descrito por x_t^D, x_t^S, P_t y P_{t-1}, que constituirían el espacio de fases del sistema[1]. En un mercado financiero el vector estará formado por todas las variables que influyen en el mercado, como por ejemplo: el precio, el volumen negociado, o las mejores ofertas (*bid-ask*, *spread*).

La evolución del sistema a lo largo del tiempo se expresa como el movimiento, dentro del espacio de fase, del vector que describe dicho sistema. A este movimiento se le denomina *órbita*. La solución de estos sistemas no es un vector concreto, sino una órbita, o lo que es lo mismo, el conjunto de vectores en los que se concreta el sistema a lo largo del tiempo. De esta forma, la evolución del mercado (precio, volumen,...) a lo

[1] x_t^D, x_t^S, P_t y P_{t-1} forman un vector de $\Re^4$.

largo del tiempo nos irá generando una órbita que describe lo que le ha sucedido al mercado de Futuro sobre el Bono Nocional a 10 años.

Los sistemas dinámicos pueden clasificarse en función del comportamiento de sus órbitas. Vamos a llamar U al subconjunto de $\hat{A}^n$ en el que se mueve el sistema. Si U se contrae con el paso del tiempo, estamos ante un sistema *disipativo.* Si se expande, el sistema será *expansivo.* Y por último, si U se mantiene a lo largo del tiempo, el sistema será *conservativo.*

En el modelo de la telaraña determinado por [3.2.2], la evolución de los precios y las cantidades ofrecidas y demandadas a lo largo del tiempo nos determinan una órbita en el espacio de fases. Estudiando las órbitas que surgen de distintos estados iniciales podremos conocer si el sistema es disipativo, expansivo o conservativo. En algunos casos[2], las órbitas tenderán a aproximarse a un estado de equilibrio, que se corresponde con la solución que dábamos al sistema estático [3.2.1]. En la figura 3.2.2 se observa la evolución de una de estas órbitas. El sistema será estable o, como nosotros lo hemos llamado, disipativo, pues tiende al equilibrio.

[2] Si $a_1>b_1$ el sistema [3.2.2] es disipativo.
$a_1<b_1$ el sistema es expansivo.
$a_1=b_1$ el sistema es conservativo.

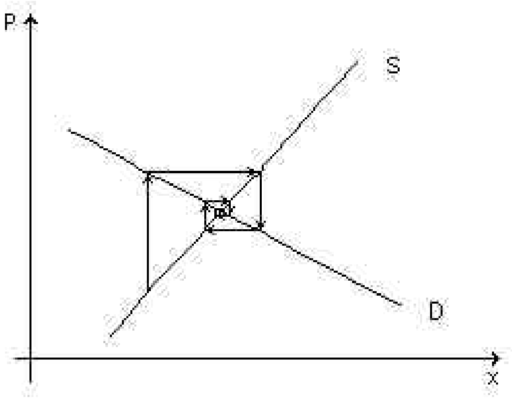

Figura 3.2.2: Ajuste en el mercado de competencia perfecta descrito en [3.2.2]. Las flechas describen la órbita.

Llamaremos *atractor* a un subconjunto *A* hacia el que *U* tiende a contraerse en el tiempo. Podemos definir el atractor como un subconjunto de *U* consistente en los puntos alrededor de los cuales las órbitas se acumulan. Las órbitas que entran en un atractor ya no escapan, sino que permanecen dentro de él[3] [3.2.3]. El concepto de atractor va asociado a los sistemas disipativos, que son los únicos en los que *U* se contrae con el paso del tiempo. En el modelo [3.2.2] el atractor lo constituía el estado de equilibrio, pues a los precio y cantidad de equilibrio son a los que tiende el mercado, y una vez alcanzados no tiende a separarse de ellos.

$$f^{t}(A)=A \qquad [3.2.3]$$

Sin embargo, este equilibrio no es el único matemáticamente posible. Los atractores pueden ser de cuatro tipos[4]: fijos, periódicos, cuasi-periódicos y aperiódicos.

[3] Con $f^{t}(A)$ indicamos la t-esima iteración de la función $f(x)$ en A. Así, por ejemplo, $f^{2}(x)=f(f(x))$ ó $f^{3}(x)=f(f(f(x)))$.
[4] Seguimos aquí a J.P. Eckmann y D. Ruelle, 1985.

Atractor Fijo: Formado por un único punto, P, de tal forma que cualquier vector $\bar{x}$ tenderá a él:

$$\lim_{t\to\infty} f^{t}(\bar{x}) = P \qquad [3.2.4]$$

Los sistemas se estabilizan en un estado que es descrito por ese punto P. Ese es el caso que tenemos en la figura 3.2.2. En un mercado financiero supondría que el mercado busca el precio de equilibrio y que los cambios en la evolución del mercado, una vez alcanzado dicho equilibrio, solo pueden ser debidos a cambios en la estructura del sistema. La hipótesis de Mercado Eficiente de Fama supone la consideración de un sistema de este tipo en el que el equilibrio se alcanza de forma instantánea, y en el que los cambios en los precios sólo pueden ser considerados como cambios en el sistema.

Hay que destacar que <u>los sistemas que estén constituidos por ecuaciones lineales sólo van a presentar atractores fijos</u>.

Atractor Periódico: El atractor no es un punto, sino el conjunto definido en [3.2.5] por los puntos que visita un vector $\bar{x}$ antes de volver sobre sí mismo.

$$A=\{f^{t}(\bar{x}): 0 £ t £ T\} \qquad [3.2.5]$$

El conjunto A forma una órbita periódica de período T, esto es, un conjunto de puntos tal que cumple [3.2.6].

$$f^{T}(\bar{x})=\bar{x}\,,\ f^{t}(\bar{x})\neq\bar{x}\quad \forall t\,/\,0<t<T \qquad [3.2.6]$$

Un mercado que tuviera atractores de este tipo tendría una serie de precios que se repetirían de forma cíclica.

Atractor Quasi-Periódico: El atractor es otro conjunto, en este caso,

$$A=\{x(t)=\Psi(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_k(t))$$

$$\varphi_i(t)=\varphi_i(0)+\omega_i t \quad (mod\ 2\pi)\ \ i=1\ldots k\} \qquad [3.2.7]$$

Surge de la unión de distintos ciclos periódicos φ_i, con distinta periodicidad, que generan un movimiento que se denomina quasiperiódico. Si sólo hubiera un argumento, sólo habría un período, y la órbita sería periódica. Dos ciclos de períodos dos y tres, generan un ciclo de período seis, pero la unión de dos ciclos con periodicidad en un caso racional y en el otro irracional, por ejemplo, no será periódico, por que la órbita nunca volverá a pasar dos veces por el mismo punto. El atractor será una superficie que se denomina *toro*.

Un mercado con este tipo de atractor nos reflejaría una estructura compleja en la que se acumularían ciclos de distintas periodicidades.

Atractor Aperiódico: también llamado *atractor extraño*[5]. Un atractor extraño es aquél en el que las órbitas no pueden describirse ni como periódicas ni como cuasi-periódicas.

Un mercado que tuviera un atractor extraño, presentaría un comportamiento sin una pauta reconocible, y podría parecer que los precios se mueven de forma errática. Esta descripción de un mercado encaja bastante bien con lo que conocemos de los mercados financieros.

Los sistemas lineales sólo admiten atractores fijos. Al eliminar no linealidades de los modelos con los que representamos los mercados, nos estamos forzando a considerar sistemas con atractores fijos. Esto supone una simplificación que obliga a buscar explicaciones ajenas al mercado para todas las oscilaciones de los precios. Esto es, cada cambio de precio viene generado por la llegada de información nueva al mercado, que hace cambiar sus decisiones a oferentes y demandantes.

La hipótesis de la información entrante para justificar los cambios en los precios no es suficiente, pues en un mismo día en los mercados financieros, el precio puede cambiar más de mil veces, resultando imposible que estos cambios se deban a la entrada de información nueva.

[5] El término fue introducido por D. Ruelle y F. Takens, 1971.

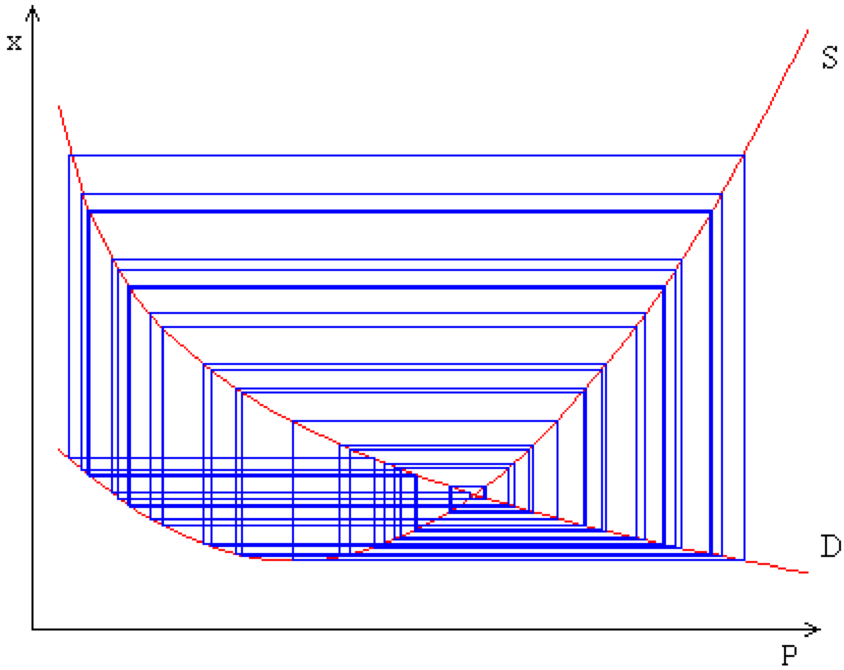

Figura 3.2.4: Con unas funciones de oferta y demanda no lineales[6], nuestro sistema puede llevar a situaciones completamente alejadas del equilibrio. Para, $x_t^D=1000-\ln P_t$; $x_t^S=P_{t-1}^2-2P_{t-1}+1000$; el sistema presenta un atractor aperiódico.

Si consideramos el mercado financiero como un sistema con componentes no lineales, desaparece la restricción de que el único atractor posible es el fijo, siendo posibles los demás tipos de atractores. En el mercado del Futuro sobre el Bono Nocional a 10 años no se encuentran indicios ni de ciclos, ni de oscilaciones cuasiperiódicas en los precios, lo que nos permite descartar ambos tipos de atractores. Sin embargo la hipótesis de que es un sistema con atractor extraño, resulta plausible, y permitiría explicar la gran cantidad de oscilaciones que se producen en los precios del Futuro, sin necesidad de recurrir a la supuesta entrada de nueva información.

[6] Hommes, 1994, llega a un sistema también caótico, pero con la función de oferta con forma sinusoidal. Otros autores, como Lichtenberg y Ujihara, 1989, utilizan una sola función no lineal. Son, en general, modelos menos creíbles.

La primera referencia que se hace a un atractor extraño aparece en un artículo de un meteorólogo llamado Edward Lorenz[7]. En este artículo, Lorenz proponía un modelo matemático que reflejara el mecanismo de convección del aire. Nos va a resultar útil para describir los sistemas con atractores extraños. El modelo tenía la forma de [3.2.8].

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a\cdot(y-x)\\ \frac{dy}{dt} &= b\cdot x - y - x\cdot z\\ \frac{dz}{dt} &= c\cdot z + x\cdot y\end{aligned}\right\}\qquad [3.2.8]$$

Como se observa, éste es un sistema dinámico, expresado en forma de ecuaciones diferenciales. La variable tiempo aparece expresada en forma continua. Los parámetros son *a*, *b* y *c* mientras que *x, y* y *z* son las variables. El sistema es no-lineal, puesto que en la segunda y la tercera ecuación aparecen las variables multiplicadas entre sí ($x{\cdot}z$ y $x{\cdot}y$ respectivamente). Cuando los parámetros toman los valores que originalmente asignó Lorenz (en [3.2.9]), el sistema contiene un atractor extraño.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 10\cdot(y-x)\\ \frac{dy}{dt} &= 28\cdot x - y - x\cdot z\\ \frac{dz}{dt} &= \tfrac{8}{3}\cdot z + x\cdot y\end{aligned}\right\}\qquad [3.2.9]$$

La forma de este sistema no permite encontrar una solución de forma analítica. Lorenz aprovechó la disponibilidad de un ordenador, para observar la evolución de las órbitas, lo que le permitió representar gráficamente los resultados.

---

[7] Edward N. Lorenz, 1963.

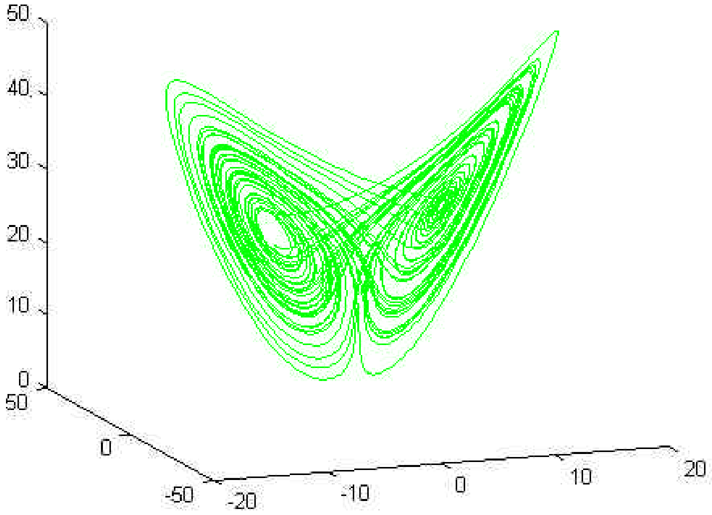

Figura 3.2.5:Atractor extraño del modelo de Lorenz. Ejes x e y.

Estos resultados no se correspondían ni a una solución periódica ni a una cuasiperiódica. Por ello lo denominó no-periódico.

Los sistemas dinámicos que poseen atractores extraños se denominan *sistemas caóticos*[8]. Robert L. Devaney[9] define al sistema caótico como aquel sistema que cumple las siguientes propiedades:

1. Presenta sensibilidad a las condiciones iniciales

   Un sistema presenta sensibilidad a las condiciones iniciales (S.C.I.) si existen puntos arbitrariamente cercanos a un punto $\bar{x}$ que se separan de él durante la evolución del sistema dinámico[10].

---

[8] El término caos o caótico procede del título "Period three implies chaos" del artículo de Li y Yorke, 1975.

[9] R.L. Devaney, 1989.

[10] Si todos los puntos se separaran, el sistema no sería disipativo, sino expansivo.

Sea[11] *f: D*→*D* una función que representa la evolución del sistema.

f presenta S.C.I.⇔*$ d >0 / "r Î Â* ∃ $\bar{y}$ *Î*B($\bar{x}$,*r*) *Ù n³0 /* | $f^{n}(\bar{x})$-$f^{n}(\bar{y})$ | > *d*

2. Las soluciones periódicas son densas[12]

El conjunto de soluciones periódicas será denso si al tomar un punto cualquiera del espacio, podemos encontrar una solución periódica tan cerca de él como queramos[13].

Sea *f: D*→*D* una función que representa la evolución del sistema.

Sea *P Ì D* el conjunto de las órbitas periódicas del sistema.

P será denso en *D Û adherencia*(*P*)=*D.*

3. Es topológicamente transitivo

Un sistema es topológicamente transitivo si con el paso del tiempo, las órbitas visitan todas las regiones del dominio de definición.

Sea *f: D*→*D* una función que representa la evolución del sistema.

f será topológicamente transitiva *Û* ∀*U,V*⊂*D,* ∃ *n* >0 / f^{n}(*U*)∩ *V* ≠ *Æ*

---

[11] Siguiendo a L. M. Berliner, 1992.

[12] Dado *U* un subconjunto de *V*, *U* es denso si su adherencia es igual a *V*. Un ejemplo de puntos densos son los racionales en los reales: para todo número real, existe un racional tan próximo al número real como se quiera. De igual forma los números irracionales también son densos en los reales.

[13] El hecho de que un sistema tenga un atractor extraño, no implica que el sistema no tenga soluciones puntuales, periódicas o cuasiperiódicas. Estas pueden existir, pero no constituyen un atractor por que el resto de las órbitas no tienden a acumularse a su alrededor, sino que se alejan para aproximarse al atractor extraño.

Con el término *Caos,* nos referimos a las características que poseen los sistemas dinámicos con atractores extraños[14]. Vamos a analizar las consecuencias en el sistema que tiene cada una de estas tres características con las que hemos definido los atractores extraños.

3.3. SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES.

Hemos definido un atractor como aquel conjunto en el que se contrae el conjunto *U* de partida. En un atractor extraño el conjunto de partida *U* no se contrae en todas las direcciones, sino que en alguna de ellas el sistema se expande. El fenómeno de expansión va acompañado de otro de pliegue que lo mantiene confinado en la misma región del espacio. A pesar de la expansión, sigue habiendo un atractor, porque el conjunto sigue siendo limitado. El proceso de pliegue y estiramiento puede ser descrito por un Solenoide de Smale (Figura 3.3.1). Este es un conjunto que a pesar de estirarse en cada iteración, cada vez es más pequeño.

[14] James Gleick, 1988, recoge algunas definiciones de caos:
"Las complicadas, aperiódicas y atractivas órbitas de ciertos sistemas dinámicos." Philip Holmes
"Especie de orden sin periodicidad" Hao Bai-Lin
"Comportamiento recurrente y, en apariencia, debido al azar en un sistema determinista simple." Bruce Stewart
"El comportamiento irregular, imprevisible, de sistemas dinámicos deterministas no lineales." Roderick V. Jensen

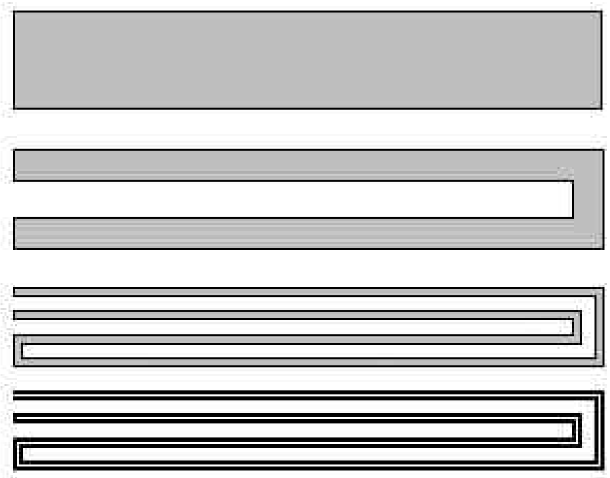

Figura 3.3.1: Solenoide de S.Smale. Fenómeno típico de un atractor extraño: expansión y pliegue.

La sensibilidad a las condiciones iniciales es consecuencia de la forma de contraerse el conjunto *U* para formar el atractor extraño. Si el sistema se contrajera en todas las direcciones, no tendrían importancia las variaciones en el punto inicial de una órbita. Esas variaciones tenderían a desaparecer a medida que el conjunto *U* se contrajera. Sin embargo, si en algunas direcciones el sistema se está expandiendo, esas diferencias iniciales no tienden a desaparecer, sino que pueden llegar a ser relevantes.

Un sistema caótico será un sistema dinámico disipativo[15] con un atractor que presenta sensibilidad a las condiciones iniciales.

La sensibilidad a las condiciones iniciales tiene implicaciones importantes. Porque el más mínimo error en la determinación del estado del sistema supone que va a ser imposible reconstruir la órbita. A muy corto plazo, la órbita prevista y la real se alejarán y perderán cualquier semejanza.

[15] En un sistema no disipativo sí se presenta la sensibilidad a las condiciones iniciales aunque el sistema no sea caótico: $f(x)=x^2$ para $x>1$ las diferencias en los valores iniciales tienden a aumentar con el paso del tiempo.

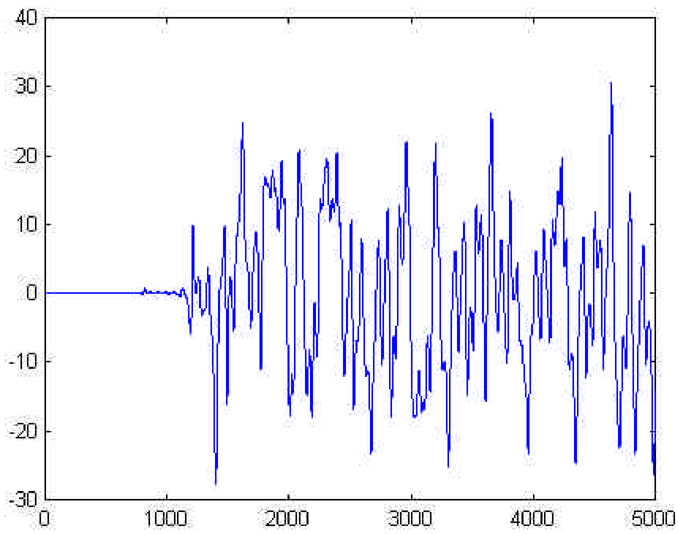

Figura 3.3.2: Diferencia entre dos órbitas del Atractor de Lorenz. La primera con valores iniciales x=y=z=1 y la segunda con los valores iniciales de x=1.00001;y=z=1.

Fue Lorenz quien observó por primera vez la sensibilidad a las condiciones iniciales en su sistema[16]. La forma semejante a las alas de una mariposa que tiene la representación gráfica del atractor de Lorenz (véase la figura 3.2.5) fue la inspiración que llevó a que a la propiedad de sensibilidad a las condiciones iniciales que presentan los sistemas caóticos se la denomine *efecto mariposa*.

La dificultad existente para determinar la relación causa - efecto en los sistemas caóticos hace que éstos puedan ser tomados por procesos aleatorios, y no deterministas.

Un mercado financiero tendrá sensibilidad a las condiciones iniciales si situaciones de partida similares pueden llevar a comportamientos muy distintos. Esto significaría que situaciones que se parecen a otras por las que ya ha pasado el mercado,

[16] James Gleik, 1988; Ian Stewart, 1991.

en cuanto que no son idénticas, solo recibirán una respuesta similar por el mercado a muy corto plazo, pero a medida que pasa el tiempo, dicha respuesta va a variar.

La sensibilidad supone, por tanto, que no podemos predecir cual va a ser el comportamiento futuro del mercado. La conclusión es la misma a la que nos llevaba la Hipótesis de Mercado Eficiente, con la que es congruente, si exceptuamos el muy corto plazo.

3.4. SOLUCIONES PERIÓDICAS DENSAS.

Esta propiedad supone que existen infinitas soluciones periódicas inestables asociadas a un atractor extraño. Las órbitas que entran en el atractor se acercan a las proximidades de estas soluciones periódicas y permanece en sus proximidades hasta que la naturaleza inestable de estas soluciones hace que la órbita escape hacia las proximidades de otra solución inestable.

Un mercado financiero que fuera un sistema dinámico con un atractor extraño tendría infinitas órbitas periódicas inestables asociadas al atractor. Al acercarse el comportamiento del mercado a las órbitas periódicas, se van a repetir situaciones similares a otras que ya había tenido el mercado en el pasado. Esta evolución sólo sería similar durante cierto tiempo, para alejarse de ella después. Si este fuera el caso, estaría justificando, en cierta forma, el análisis técnico, que no haría sino buscar las órbitas periódicas inestables, que permitirían tener un pequeño indicio sobre el comportamiento del precio al menos a muy corto plazo, estudiando la evolución pasada de éste.

De igual forma que hacíamos con la sensibilidad a las condiciones iniciales, al introducir el sistema de Lorenz, vamos a estudiar las órbitas periódicas inestables, a partir de la *función logística*, que es una ecuación en diferencias finitas, que permite describir el fenómeno de la acumulación de soluciones periódicas inestables. La función logística es introducida en el siglo XIX por Pierre François Verhulst, por lo que también se la conoce como ecuación de Verhulst. Se define como la función [3.4.1].

f: [0,1] ¾ ¾ ¾ ®[0,1]

x_t ¾ ¾ ¾ ® $x_{t+1} = a\, x_t\, (1 - x_t)$ [3.4.1]

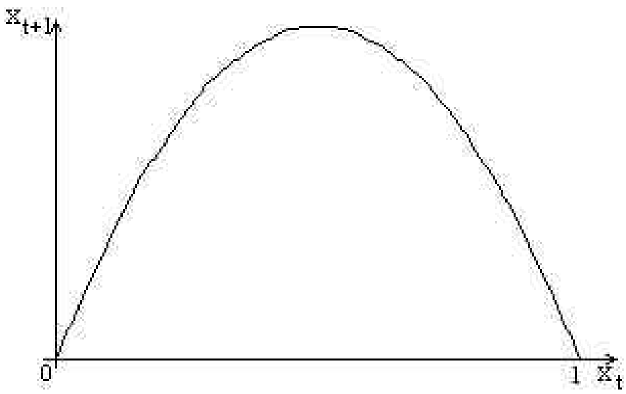

Figura 3.4.1: Función logística. El valor del parámetro *a* se va a reflejar en lo apuntada que quede la gráfica.

Donde *a* es un parámetro que determina un sistema disipativo cuando toma valores entre cero y cuatro. Si *a* es menor que cero o mayor que cuatro, la serie resultante podría salir del dominio para el que se ha definido[17], y el sistema sería expansivo.

[17] $x_t \in$ [0,1], pero $x_{t+1} \notin$ [0,1].

Con el modelo [3.4.1] se intentaba explicar el crecimiento de las poblaciones. El valor cero representa la ausencia de población, mientras que uno indica el tamaño máximo de esa población con los recursos disponibles.

Si en un período la población está cercana a ese máximo, en el período siguiente se reducirá, como consecuencia de la superpoblación y escasez de alimentos. Si la población es baja, la abundancia de recursos favorecerá su crecimiento en los siguientes períodos.

Dando distintos valores al parámetro *a* de la función logística obtenemos distintos comportamientos del sistema. Para la expresión [3.4.2], el sistema va a tener un comportamiento parecido al de la figura 3.4.2.

$$x_{t+1}= 2\, x_t\, (1-x_t) \qquad [3.4.2]$$

Para distintos valores iniciales podemos comprobar como la población tendería a estabilizarse alrededor de 0’5. Una población se estabilizará cuando no se produzcan variaciones en su tamaño de un período a otro. Éste es el atractor hacia el que tienden casi todas las órbitas.

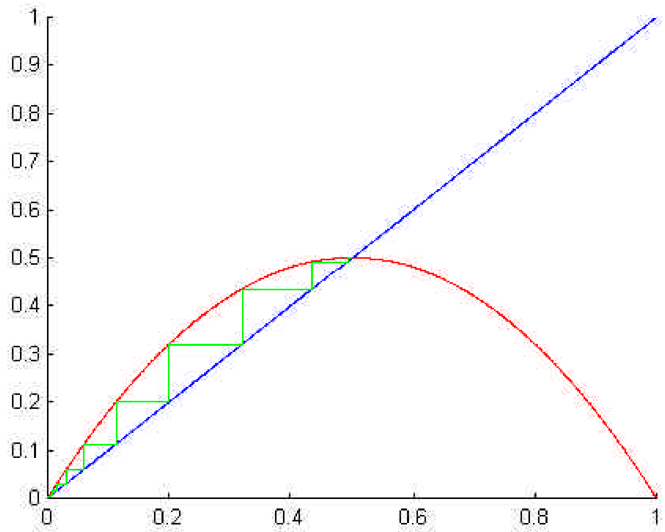

Figura 3.4.2:Camino del equilibrio para la función logística con parámetro a=2.

Para averiguar cuál va a ser el atractor de la función, o lo que es lo mismo, qué valores de x_t llevan a la estabilización de la población, tendremos que resolver la ecuación [3.4.3].

$$x_{t+1} = x_t \qquad [3.4.3]$$

En [3.4.3], podemos sustituir x_{t+1} por su valor, quedándonos [3.4.4]. La ecuación [3.4.4] tiene como soluciones x=0 y x=1-1/a. Que indican hacia dónde va a tender el sistema.

$$a \cdot x \cdot (1- x) = x \qquad [3.4.4]$$

Para saber si dichos puntos son atractivos o repulsivos[18], es decir, si estamos ante equilibrios estables o inestables, deberemos comprobar si se cumple la condición [3.4.5].

$$|f'(x)| < 1 \qquad [3.4.5]$$

Siendo $f'(x)$ la derivada de la función logística que es igual a la expresión [3.4.6].

$$f'(x) = a - 2 \cdot a \cdot x \qquad [3.4.6]$$

Para $x=0$ $\quad f'(0) = a - 2 \cdot a \cdot 0 = a$,

por lo que $x=0$ será un punto de atracción para a menor que uno y se transformará en un equilibrio inestable si a es mayor que uno.

Para $x=1-1/a$ $\quad f'(1-1/a) = a - 2a + 2 = 2 - a$

y por tanto $|f'(1-1/a)| < 1$; si a toma valores entre uno y tres. En este intervalo, $x=1-1/a$ es el punto de atracción. Para valores de a menores que uno, la solución está fuera del dominio. Para valores de a mayores que tres, $x=1-1/a$ será un equilibrio inestable.

---

[18] Dado p (punto fijo de f), si $|f'(p)| < 1$ → $\$ U$ (entorno de p) / " x ÎU, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p$ con lo que p será un punto fijo atractivo y U un conjunto estable. En cambio si $|f'(p)| > 1$; p en vez de atraer, repelerá las trayectorias.

En la figura 3.4.3 se observa cuales son los atractores del sistema según cual sea el valor que toma el parámetro a.

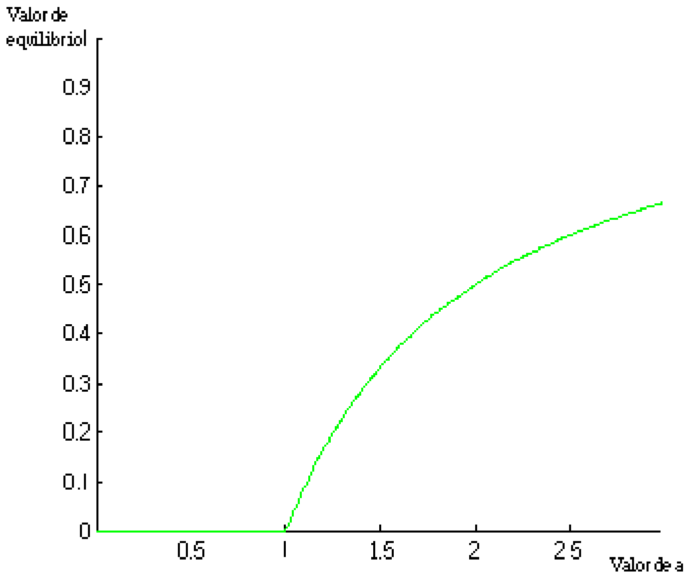

Figura 3.4.3: El equilibrio de la función logística depende del valor que demos al parámetro a.

Pero, ¿qué sucede si a es mayor que tres? En este intervalo, tanto $x=0$ como $x=1-1/a$ representan equilibrios inestables, y por tanto la función no tiene atractor fijo.

A partir de $a=3$ surgen ciclos estables, pasamos de atractores fijos a atractores periódicos. Esto es, $x_t \neq x_{t+1}$, pero, $x_t = x_{t+2}$, con lo que, se cumplirá la ecuación [3.4.7].

$$x = a\,(a\,x\,(1-x))(1-(a\,x\,(1-x))) \qquad [3.4.7]$$

La ecuación [3.4.7] tiene cuatro soluciones, las dos que ya teníamos antes, y dos nuevas que son las de la expresión [3.4.8].

$x=0$

$x=1-1/a$

$$x=\frac{a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2a}=p_u$$
$$x=\frac{a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2a}=p_l \qquad [3.4.8]$$

Donde $f(p_u)=p_l$ y $f^2(p_u)=p_u$, o dicho de otra forma, representan un ciclo de período dos. Este ciclo no se da para valores de a menores que tres, puesto que estas soluciones serían complejas y quedarían fuera del dominio de la función. Comprobamos que este ciclo es estable. Derivando $f(f(x))$, que escribimos como $f^2(x)$, obtenemos la ecuación [3.4.9].

$$f^{2\prime}(p_u) = f^{2\prime}(p_l) = 1-(a^2-2\cdot a-3) \qquad [3.4.9]$$

La derivada que expresa [3.4.9] es menor que uno en valor absoluto, y por tanto cumple la condición [3.4.5] siempre que $3< a <1+\sqrt{6}$. Este es ahora el atractor del sistema. El atractor fijo que teníamos para valores de a inferiores a 3, ahora es una solución inestable. La figura 3.4.4 muestra como las órbitas se aproximan a la solución periódica.

Si prolongamos la figura 3.4.3 que nos representaba el atractor del sistema, veremos (figura 3.4.5) como la curva se desdobla.

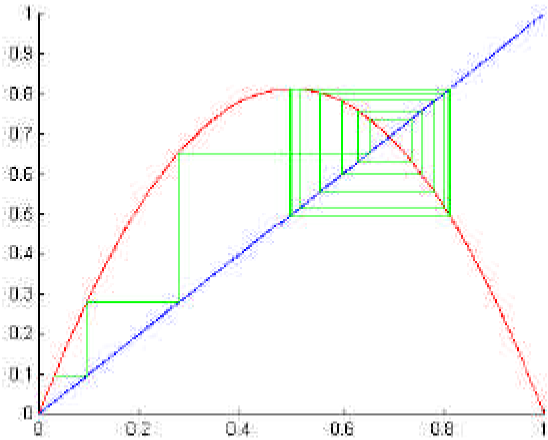

Figura 3.4.4: Función logística con a=3.25. La función alcanza un ciclo de período dos.

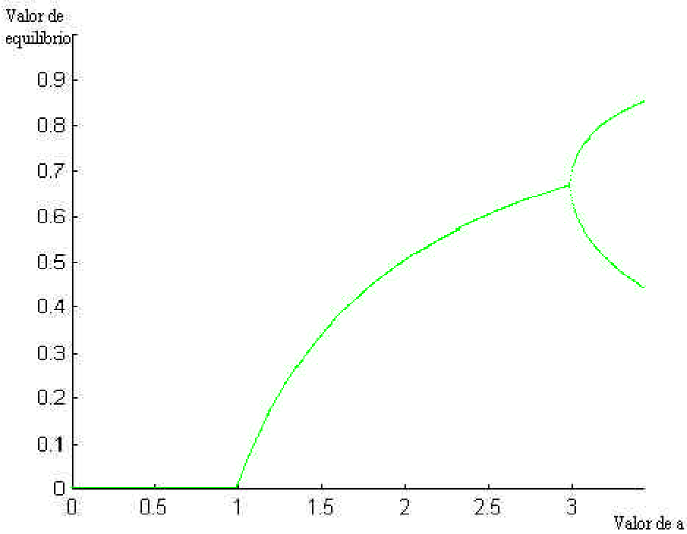

Figura 3.4.5: Al alcanzar a=*3* la función logística sufre una bifurcación en la solución.

Para $a > 1+\sqrt{6}$ encontramos un ciclo estable de período cuatro, tal que $x_t = x_{t+4}$, y con posterioridad surgen ciclos de período 8, 16, 32,... Cada vez para un intervalo de valores de a más pequeño, de tal manera que el ciclo de período 2^{∞} se alcanzaría para a=3'56994... valor que se expresa como a_{∞}. La forma en que se divide el atractor es el que se representa en la figura 3.4.6.

El punto en que se doblan los períodos se denomina punto de bifurcación. De esta manera: $a_1=3$; $a_2=1+\sqrt{6}$; *y* $a_{\infty}=3'56994...$[19]. Cuando a pasa la barrera de a_{∞} surge el comportamiento caótico en la función logística, como el que se observa en la figura 3.4.7.

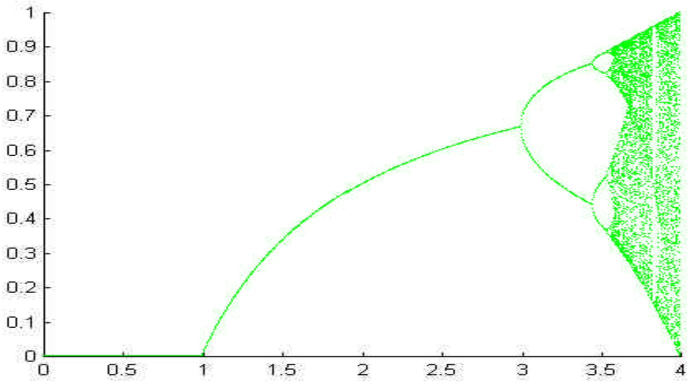

Figura 3.4.6: Equilibrio de la función logística según el valor de *a*.

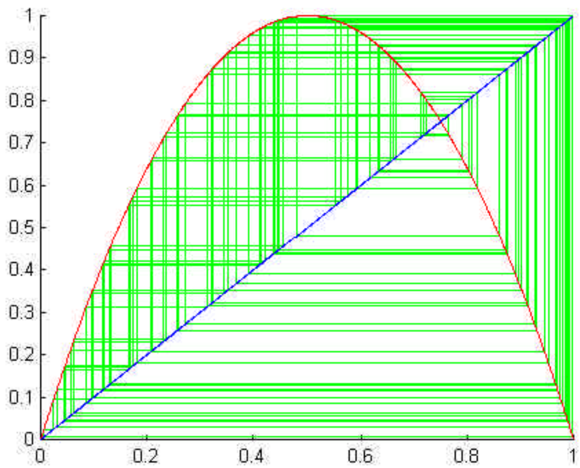

Figura 3.4.7: Función logística con $a=4$. No podemos encontrar ningún ciclo, la serie va a pasar por todo el dominio de definición.

Como hemos señalado, a partir de a_{∞} surge el atractor caótico. Pero todos los equilibrios que hemos ido obteniendo y que se han ido convirtiendo en inestables siguen

[19] Para cualquier modelo no lineal de un único parámetro, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4'669266091$ ... que se conoce como *Constante Universal de Feigenbaum* (Feigenbaum, 1979).

presentes. Es más, tenemos infinitos equilibrios inestables conviviendo con nuestro equilibrio estable, proporcionado por el atractor extraño. La forma en que se agrupan los equilibrios periódicos inestables y el equilibrio estable caótico es la que produce que el atractor extraño sea denso en equilibrios periódicos. Para cada valor de x perteneciente al atractor extraño hay pegado a él un punto que pertenece a un equilibrio periódico inestable.

La forma en que se agrupan los puntos del intervalo [0,1] que forman el atractor, puede ser representada por lo que se conoce como Conjunto de Cantor, y que aparece en la figura [3.4.8].

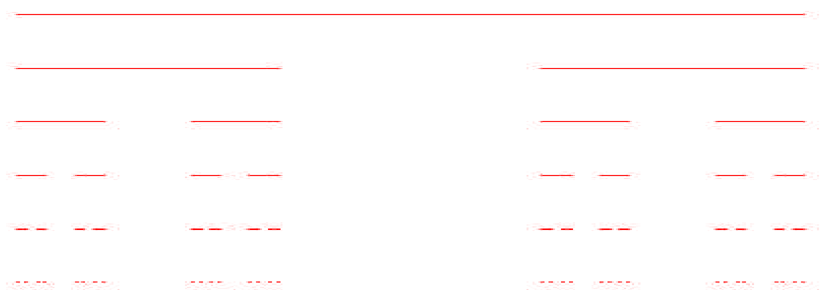

Figura 3.4.8: Camino para la construcción de un conjunto de Cantor.

El proceso generador de un conjunto de Cantor se describe a continuación. A partir de un segmento de la recta de los reales, lo dividimos en tres subconjuntos y eliminamos el de en medio. Con los dos subconjuntos que nos quedan procedemos de igual manera. Si continuamos con este proceso iterativo, en el infinito tendremos un conjunto infinito de puntos en el que todos sus miembros son frontera, pues junto a él habrá siempre un punto que no pertenezca al conjunto. La definición de conjunto de Cantor es un conjunto que está totalmente desconectado, cerrado y perfecto[20].

Esto es exactamente lo que le ocurre al conjunto formado por todos los puntos del atractor extraño, junto a ellos habrá siempre puntos que no son miembros del conjunto. Es la generación del conjunto de Cantor a partir de los equilibrios de la función logística sería la que aparece en la figura 3.4.9.

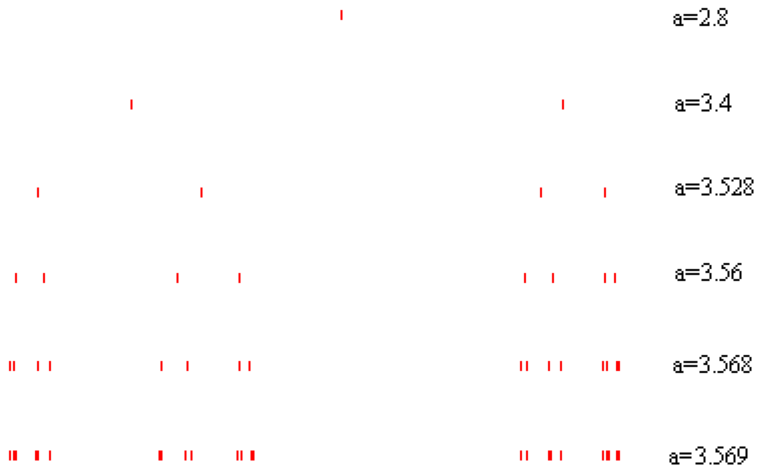

Figura 3.4.9: Diagrama de bifurcación de la función logística como conjunto de Cantor

El hecho de que un atractor extraño pueda verse como un conjunto de Cantor tiene importantes consecuencias. Benoit B. Mandelbrot[21], estableció que un conjunto de Cantor es un tipo de *fractal*, objeto que puede ser reproducido en su totalidad cambiando la escala de alguna de sus partes. En el conjunto de Cantor, el segmento

[20] Totalmente desconectado es aquel conjunto que no contiene ningún intervalo y por tanto no tiene puntos interiores.
Conjunto cerrado es aquél que contiene todos sus puntos frontera. Punto frontera es el punto que en cualquier vecindad arbitrariamente pequeña, contiene elementos tanto del conjunto, como de fuera de él.
Un conjunto es perfecto si es un conjunto no vacío que es igual al conjunto de sus puntos de acumulación.
M. Schroeder, 1991, página 162.
[21] B.B. Mandelbrot, 1982.

[2/3,1] es igual al segmento [0,1], pero a una escala inferior. A la característica de ser invariantes ante cambios de escala, propia de los fractales, se le denomina *Autosimilitud*.

El concepto de fractal lleva aparejado una redefinición del concepto *dimensión*. Podemos ver lo que sucede en una línea. La longitud de una línea puede expresarse como la ecuación [3.4.10] donde N es el número de segmentos de longitud r en que puede dividirse esa línea.

$$L = \lim_{r \to 0} N \cdot r \qquad [3.4.10]$$

De igual forma podemos calcular el área de una superficie como en la ecuación [3.4.11], donde N es ahora el número de cuadrados de lado r en que podemos dividir la superficie.

$$A = \lim_{r \to 0} N \cdot r^2 \qquad [3.4.11]$$

Si hubiéramos tratado de obtener la magnitud dada por [3.4.10] para el caso de una superficie, el valor que hubiéramos obtenido es infinito. De igual forma, si hubiéramos tratado de obtener el área de una línea conforme a [3.4.11], el área que hubiéramos obtenido es cero. El exponente que acompaña a r es el único valor para el que ese límite nos da un valor finito no nulo. Este exponente se corresponde con la dimensión del objeto: uno para una línea, dos para una superficie, tres para un sólido...

$$\lim_{r \to 0} N \cdot r^{D_H} = C \qquad 0 < C < \infty \qquad [3.4.12]$$

La expresión [3.4.12] nos redefine el concepto de dimensión. En esta definición C es una constante, D_H es la denominada dimensión de Hausdorff-Besicovitch y que se corresponde al exponente que hace que $N \cdot r^{D_H}$ se mantenga finito y no nulo a medida que r tiende a cero[22]. El más mínimo cambio en D_H hace que $N \cdot r^{D_H}$ tienda a cero (si el exponente es superior a D_H) o a infinito (si el esponente es inferior).

En el caso del conjunto de Cantor el exponente que va hacer que el límite se mantenga finito no nulo es D_H =log2/log3=0.63... Lo cual quiere decir que el conjunto de Cantor tiene una dimensión que no es un número entero sino que es superior a cero, pero inferior a uno. Es algo más que un punto pero no llega a ser una recta. D_H va a definir la escala a la que el conjunto de Cantor es invariante. Y es precisamente la existencia de una dimensión que no se corresponde con la Euclídea, la característica más llamativa de todo objeto fractal.

La estructural fractal de los atractores extraños va a permitir obtener su dimensión. En el caso de la función logística con a=4 su dimensión será 1, y en el del atractor de Lorenz su dimensión será 2.05.

[22] M. Schroeder, 1991. página 201.

3.5. TOPOLÓGICAMENTE TRANSITIVO.

Un sistema dinámico es topológicamente transitivo si no puede ser descompuesto en dos subsistemas independientes entre sí. De igual forma un mercado financiero es una unidad que no podemos descomponer en partes. Los factores que intervienen en el sistema están relacionados todos entre sí y no podemos considerarlos departamentos estancos.

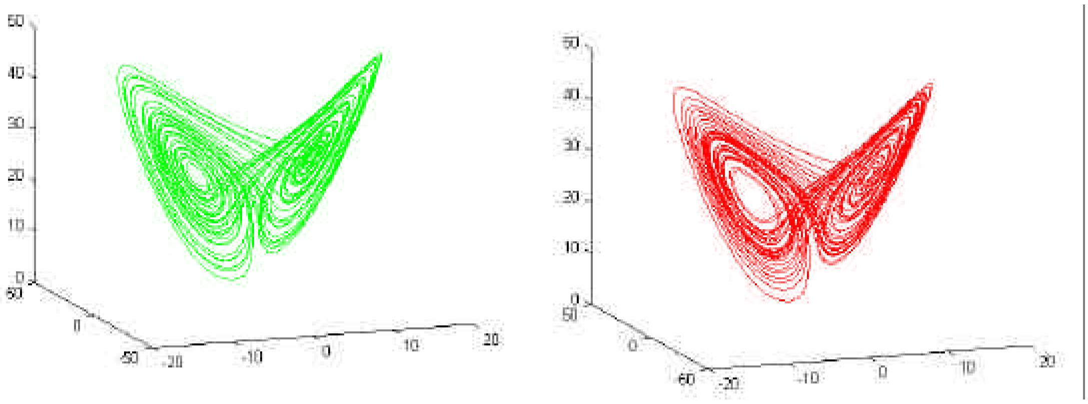

Figura 3.5.1: Las dos órbitas que comparábamos en la figura 3.3.2. a pesar de seguir caminos diferentes, a largo plazo tienden ambas a reproducir el atractor de igual forma.

La sensibilidad a las condiciones iniciales hace que órbitas infinitamente próximas se alejen en el tiempo. Sin embargo la representación gráfica de ambas órbitas será la misma. La figura 3.5.1 nos está dando la forma del atractor hacia el que están tendiendo todas las órbitas próximas. A largo plazo, las órbitas atrapadas en un atractor caótico tienden a pasar por todas las regiones que lo componen.

La consecuencia principal para nosotros que se deriva de que un atractor extraño sea topológicamente transitivo es que va a ser ergódico[23].

Vamos a empezar por definir un sistema ergódico[24]. Dados un espacio *M*, un conjunto de transformaciones en él $T_g{:}M \rightarrow M$, una medida invariante $m(x)$, y una función $f(x)$, el *teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin*[25] nos dice que el límite [3.5.1] existe, y que además, se verifica la ecuación [3.5.2]. La expresión [3.5.1] nos está dando una medida temporal, el sumatorio va reflejando como sucesivas aplicaciones a lo largo del tiempo de la transformación van afectando a x. Sin embargo las integrales de la expresión [3.5.2], al definirse sobre el dominio *M*, nos están dando una medida espacial.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right) = \hat{f}(x) \qquad [3.5.1]$$

$$\int_M f(x)dm(x) = \int_M \hat{f}(x)dm(x) \qquad [3.5.2]$$

La transformación *T* se dice que es ergódica si el límite de [3.5.1] es constante; en este caso, la integral del segundo término de [3.5.2] será igual[26] al límite obtenido en [3.5.1]. Esto implica que la medida temporal sea igual a la medida espacial.

Dos órbitas distintas, contempladas a largo plazo van a tener una forma similar, como muestra la figura 3.5.1, que además reflejará la forma del atractor.

---

[23] La definición que damos de ergodicidad no es la misma que normalmente se da en econometría, y que puede verse, por ejemplo, en Aznar y Trievez o en Greene.
[24] Sinai, 1977.
[25] Cornfeld, Fomin y Sinai, 1982.
[26] Siempre que hallamos definido la medida $m(x)$ de forma adecuada, esto es, que sea tal que $\int_M d\blacksquare(x) = 1$; en cuyo caso diremos que es una medida ergódica.

Se puede deducir que en los sistemas dinámicos en tiempo discreto, la ergodicidad nos lleva a afirmar que la trayectoria de cualquier punto perteneciente a un conjunto con medida positiva ($m(x)>0$) es todo el espacio de fase en que esa medida es positiva (M, el atractor). Esto, traducido a los sistemas dinámicos caóticos, nos indica que cualquier trayectoria que comience en un punto del atractor extraño va a pasar por todo el atractor.

La ergodicidad de los sistemas caóticos, nos va a permitir estudiar estos a partir de una sola órbita., puesto que ésta va a recorrer todo el atractor extraño, y contendrá la información relevante para caracterizar el atractor.

Por tanto, si el mercado del Futuro sobre el Bono Nocional a 10 años se correspondiera a un sistema con atractor extraño, el hecho de que fuera ergódico nos iba a asegurar que podemos estudiarlo a partir de series temporales.

En el siguiente capítulo vamos a definir una serie de medidas ergódicas[27] que caractericen los atractores extraños, y que precisamente por ser ergódicas, vamos a poder calcular a partir de series temporales.

[27] La demostración de que las medidas que vamos a usar son ergódicas puede encontrarse en Eckmann y Ruelle, 1985.

3.6. SISTEMAS CONTINUOS Y SISTEMAS DISCRETOS

Tal y como señalábamos en la introducción del capítulo, nuestro sistema original para describir el comportamiento del contrato de Futuro sobre el Bono Nocional a 10 años estaba descrito en [3.1.1].

El sistema [3.1.1] incluye una parte aleatoria y es, por tanto, un sistema no determinista. Tal como hemos visto a lo largo de los apartados anteriores de este capítulo, un sistema determinista con atractor caótico puede ser confundido con un sistema aleatorio. Diversos autores[28] han propuesto diferentes ejemplos en los que sistemas con atractores extraños podían ser tomados por movimientos brownianos. Por ello, de igual forma a [3.1.1] podíamos proponer un sistema determinista como el de [3.2.2], que en caso de presentar un atractor extraño poseerá un comportamiento similar al del modelo [3.1.1].

Si las funciones a en [3.1.2] son no lineales, entonces el sistema cumple todos los requisitos para que pueda generar un comportamiento de tipo caótico.

El sistema [3.1.2] es un sistema continuo, mientras que lo que vamos a observar en cualquier mercado financiero son datos de precios que forman una serie temporal, y que son por tanto discretos. Existen dos formas de pasar de un sistema continuo a un sistema discreto.

---

[28] Beck, 1990; Trefán, Grigolini y West, 1992.

La forma más simple de volver discreto un sistema continuo es observarlo a intervalos de tiempo regulares. Matemáticamente, lo que hacemos es sustituir a dt por Δt. En este caso el sistema se nos transformaría en [3.6.1].

$$\begin{aligned}
\Delta r_t &= a_r(r_t, s_t, L_t)\cdot \Delta t \\
\Delta s_t &= a_s(r_t, s_t, L_t)\cdot \Delta t \\
\Delta L_t &= a_L(r_t, s_t, L_t)\cdot \Delta t
\end{aligned} \qquad [3.6.1]$$

En el caso en el que demos un valor constante a Δt el sistema será discreto. Cada paso del Δt, supondrá una observación más en nuestra serie temporal. En el caso en que considerásemos que Δt es igual a un día operativo del mercado, tendríamos una serie de cotizaciones diarias. Cuanto más pequeño sea ese salto, más próximo será el sistema discreto a un sistema continuo. En la presente tesis se ha elegido como Δt cinco minutos, que es el tamaño mínimo al que podemos llegar dado el número de operaciones que se cruzan en el MEFF.

Un método alternativo a la definición de una constante es el establecido por Poincaré, y que se conoce como *Sección de Poincaré*[29]. La sección de Poincaré consiste en tomar una observación del sistema cada vez que el sistema verifique una condición. Generalmente esa condición tiene la forma de [3.6.2]. Expresión que podemos abreviar diciendo que tomaremos una observación cada vez que la variable x pase de valores negativos a positivos.

[29] En Medio, 1995, puede encontrarse un tratamiento de la sección de Poincaré para distintos sistemas dinámicos.

$$x = 0 \qquad dx/dt > 0 \qquad [3.6.2]$$

Evidentemente la condición [3.6.2] no tiene por qué cumplirse a intervalos regulares. Lo que sí va a cumplir una sección de Poincaré es que va a definir[30] al vector de variables $\overline{X}_{t_2}$ en un momento del tiempo en función de ese mismo vector de variables $\overline{X}_{t_1}$ en el pasado, como en [3.6.3].

$$\overline{X}_{t_2} = f(\overline{X}_{t_1}) \qquad [3.6.3]$$

La expresión [3.6.3] se corresponde a un sistema discreto, que va a presentar el mismo comportamiento que el sistema original. Lo que es más importante, la función *f*() nos define una relación puramente determinista entre dos observaciones que están separadas por intervalos de tiempo no constantes.

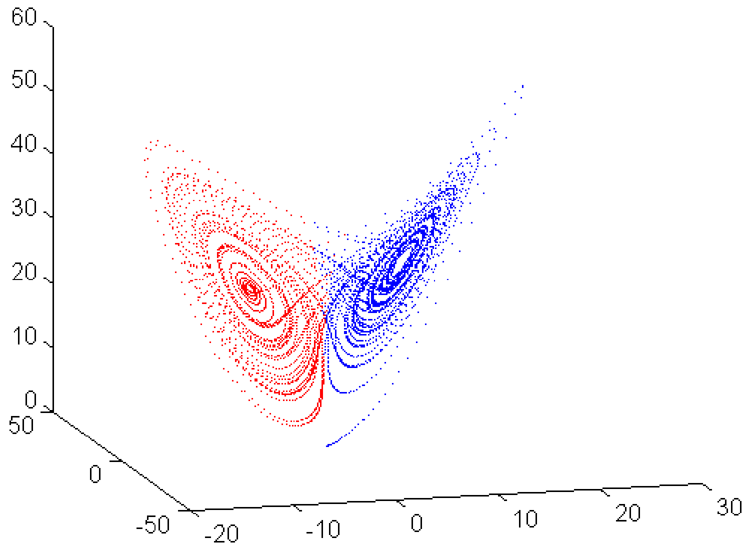

Figura 3.6.1: Atractor de Lorenz que se ha separado en dos partes según sea la variable *x* positiva (azul) o negativa (rojo).

[30] Hénon y Heiles, 1964.

En la figura 3.6.1 vemos como podemos partir una solución de un sistema dinámico continuo en dos utilizando el plano x=0. La sección de Poincaré va a ser los puntos por los que la órbita cortan este plano, lo que representamos en la figura 3.6.2. Esta figura tiene ahora una dimensión menos, que se corresponde a la variable que hemos utilizado para hacer de plano de corte.

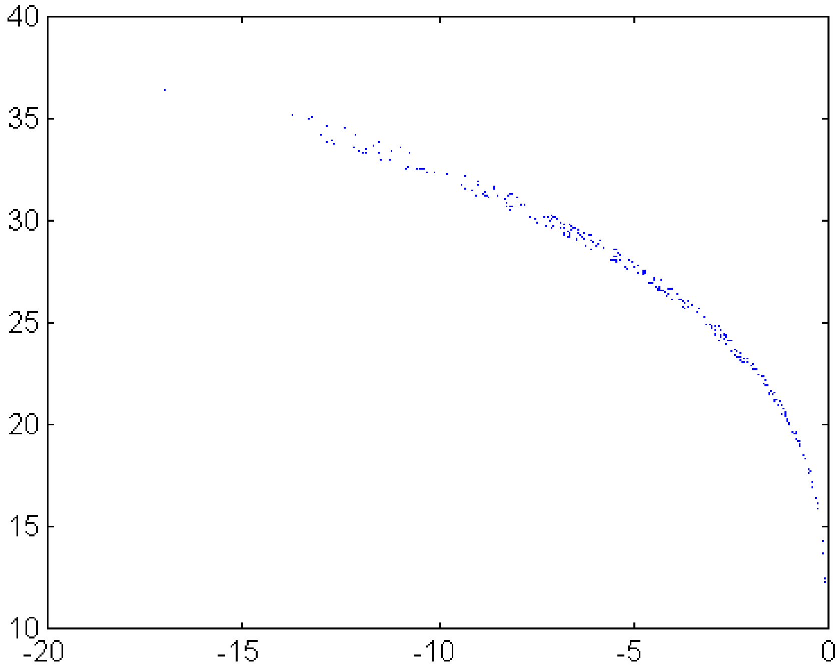

Figura 3.6.2: sección de Poincaré del atractor de Lorenz usando la condición [3.5.4] sobre la variable x.

En un activo financiero, podemos obtener fácilmente una sección de Poincaré. Para ello bastará con que se tome la observación cada vez que el sistema cumpla una condición que nosotros establezcamos. Si esa condición fuese que el precio de oferta se igualara con el precio de demanda, entonces obtendríamos una observación cada vez que se produzca una compraventa del activo. Esta va a ser una serie operación a operación, que es el segundo tipo de serie temporal que vamos a utilizar.

Como resumen del capítulo podemos afirmar que el modelo del comportamiento del contrato de Futuro sobre el Bono Nocional a 10 años que proponíamos en el capítulo anterior puede expresarse sin necesidad de incluir variable aleatoria alguna, con tal de que el sistema sea no lineal. Un modelo determinista como el propuesto es capaz de describir un comportamiento irregular y parecido al aleatorio.

Este sistema no va a ser predecible más que a muy corto plazo, pero la estructura de órbitas periódicas inestable en la que quedaría confinado, permite obtener información sobre su comportamiento, estudiando series temporales obtenidas a partir del modelo.

Para obtener estas series tenemos dos caminos. Por un lado el tradicional de observar el sistema a intervalos constantes. Por otro, a intervalos irregulares, basado en las secciones de Poincaré. Este último método supone obtener una observación cada vez que el sistema repita un comportamiento, en nuestro caso la compraventa del activo. Con ello construimos nuevas series de rendimientos operación a operación y de duración de operaciones.