

Mapa de KARNAUGH

O Mapa de Karnaugh é uma ferramenta de auxílio à minimização de funções booleanas.

O próprio nome mapa vem do fato dele ser um mapeamento biunívoco a partir de uma tabela-verdade.

► Mapas de Karnaugh

Considere uma tabela-verdade para funções de 4 entradas

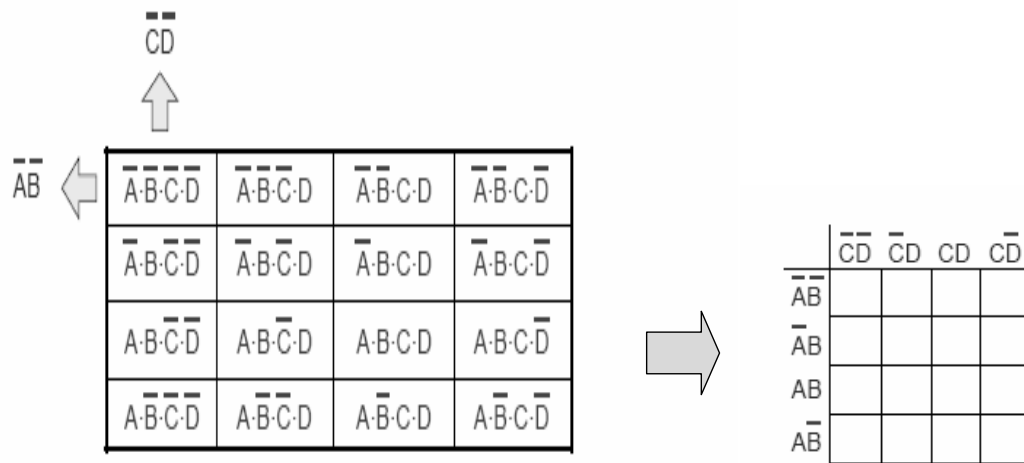
A fim de garantir a adjacência de mintermos que se diferenciam de somente uma variável, teremos que

- re-ordenar os mintermos
- criar uma tabela bidimensional

A	B	C	D	mintermos
0	0	0	0	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$
0	0	0	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$
0	0	1	0	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$
0	0	1	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$
0	1	0	0	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$
0	1	0	1	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$
0	1	1	0	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$
0	1	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$
1	0	0	0	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$
1	0	0	1	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$
1	0	1	0	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$
1	0	1	1	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$
1	1	0	0	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$
1	1	0	1	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$
1	1	1	0	$A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$
1	1	1	1	$A\cdot B\cdot C\cdot D$

▶ Mapas de Karnaugh

Dispondo os mintermos em duas dimensões



Colocando as variáveis de entrada para fora da tabela...

▶ Cobertura dos Mapas de Karnaugh

Considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes, os quais podem conter 2, 4, 8, 16, 32 ... “1s”
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto usando somente as variáveis de entrada que são iguais para todos os “1s”
3. Se houver mais de um grupo, montar a equação em soma de produtos (que já estará simplificada)

OBS: se algum “1” restar sozinho, seu produto (mintermo) também deve ser usado na equação em soma de produtos

► Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de "1s" adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

F18	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	1	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$$F = A'BC'D' + A'BC'D$$

► Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de "1s" adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

F19	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	1	1	1
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$\bar{A}\cdot B$

$$F = A'BC'D' + A'BC'D + A'BCD + A'BCD'$$

► Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos



Os grupos devem ter 2, 4, 8 ou 16 elementos

(2^n elementos, onde n é o número de variáveis de entrada)

F20	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	1	0
$\bar{A}B$	0	0	1	0
AB	0	0	1	0
$A\bar{B}$	0	0	1	0

C·D

► Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos



Os grupos só podem ter formato retangular ou quadrado

F21	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

B·D

► Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos



Os elementos de um grupo podem estar separados, devido às limitações da representação do mapa

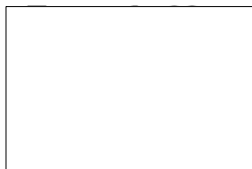
F22	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	0	0	1
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$B \cdot \bar{D}$

► Mapas de Karnaugh

Como usar, considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos



F23	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$\bar{B} \cdot \bar{D}$

► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

Considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de "1s" adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

(Usar o maior grupo, ao invés dos grupos que o compõem)

F24	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	1	0	0	1
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$\bar{C}\cdot\bar{D}$ $C\cdot\bar{D}$

► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

Considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de "1s" adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

F24	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	1	0	0	1
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

\bar{D}

► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

Considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

- Usar somente os grupos essenciais (em vermelho)
- O grupo não-essencial não deve ser usado (neste caso)

F25	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	1	0
$\bar{A}B$	1	1	1	1
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$\bar{A}\cdot D$ (grouping $\bar{A}\bar{B}CD$)
 $B\cdot\bar{D}$ (grouping $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$)

► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

Considerando soma de produtos

1. Identificar grupos de “1s” adjacentes
2. Para cada grupo, escrever a equação de produto (já simplificada)
3. Montar a equação em soma de produtos

F26	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	1
$\bar{A}B$	0	0	1	0
AB	1	0	0	0
$A\bar{B}$	1	1	0	1

$\bar{B}\cdot\bar{D}$ (grouping $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$)
 $\bar{A}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}$ (grouping $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$)
 $\bar{A}\cdot B\cdot C\cdot D$ (grouping $\bar{A}B\bar{C}D$)
 $\bar{B}\cdot\bar{C}$ (grouping $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$)

$$F_{\square} = \bar{B}\cdot\bar{C} + \bar{B}\cdot\bar{D} + \bar{A}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D} + \bar{A}\cdot B\cdot C\cdot D$$

► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

Exercício 1:

Para a função dada pela equação abaixo:

- Encontre a equação mínima em soma de produtos
- Desenhe o circuito resultante

$$S7(A,B,C,D) = \sum(0, 1, 2, 5, 6, 7, 13, 15)$$

S7	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	1	1	0	1
$\overline{A}B$	0	1	1	1
AB	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	0	0	0

► Cobertura dos Mapas de Karnaugh

Exercício 2:

Para a função dada pela equação abaixo:

- Encontre a equação mínima em soma de produtos
- Desenhe o circuito resultante

$$S9(W,X,Y,Z) = \sum(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$$

S9	$\overline{Y}\overline{Z}$	$\overline{Y}Z$	YZ	$Y\overline{Z}$
$\overline{W}\overline{X}$	1	1	0	1
$\overline{W}X$	0	1	0	0
WX	0	0	0	0
$W\overline{X}$	1	1	0	1

► Funções Incompletamente Especificadas

- São funções nas quais uma ou mais posições não estão especificadas
- Tais posições são denominadas *don't cares*, e são representadas por X ou DC ou 2 ou * ...

F29	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	X	1
$\bar{A}B$	0	0	X	0
AB	1	1	X	X
$A\bar{B}$	0	0	0	0

► Funções com Don't Care

Como fazer a cobertura em Soma de Produtos

- O objetivo é cobrir os “1s” da função
- Posições com *don't care* podem ser usadas para ajudar a melhorar a cobertura dos “1s”
- Cada posição com *don't care* é totalmente independente das demais

► Funções com Don't Care

Considerando soma de produtos

1. Cobrir os "1s"
2. Utilizar as posições com *don't care* para encontrar a melhor cobertura
3. Cada posição com *don't care* é totalmente independente das demais

Exemplo 1 :

F29	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	X	1
$\bar{A}B$	0	0	X	0
AB	1	1	X	X
$A\bar{B}$	0	0	0	0

► Funções com Don't Care

Considerando soma de produtos

1. Cobrir os "1s"
2. Utilizar as posições com *don't care* para encontrar a melhor cobertura
3. Cada posição com *don't care* é totalmente independente das demais

Exemplo 1 :

F29	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	X	1
$\bar{A}B$	0	0	X	0
AB	1	1	X	X
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$\bar{A}\bar{B}$

AB

► Funções com Don't Care

Exercício 1:

- Encontre a equação mínima em soma de produtos para a função abaixo
- Desenhe o circuito resultante

$$S_{13}(A,B,C,D) = \sum(0, 3, 5, 6, 7) + DC(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

S ₁₃	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	1	0	1	0
$\overline{A}B$	0	1	1	1
AB	X	X	X	X
$A\overline{B}$	0	0	X	X

mintermos

0	1	3	2
4	5	7	6
12	13	15	14
8	9	11	10

► Funções com Don't Care

Exercício 1:

- Encontre a equação mínima em soma de produtos para a função abaixo
- Desenhe o circuito resultante

$$S_{13}(A,B,C,D) = \sum(0, 3, 5, 6, 7) + DC(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

S ₁₃	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	①	0	1	0
$\overline{A}B$	0	1	1	1
AB	X	X	X	X
$A\overline{B}$	0	0	X	X

$\overline{A} \quad \overline{B} \quad \overline{C} \quad \overline{D}$

BD CD CB

mintermos

0	1	3	2
4	5	7	6
12	13	15	14
8	9	11	10

exemplo

Considere a seguinte função:

$$f(A, B, C, D) = E(6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15)$$

Esta função tem a tabela verdade:

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0	0	1	1
	01	0	0	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	1	1	1

$$f(A, B, C, D) = E(6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$$

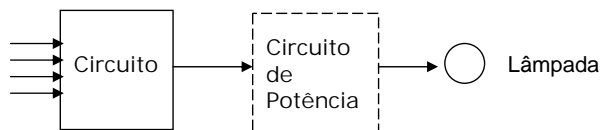
$$F = AC' + AB' + BCD'$$

$$F = (A+B)(A+C)(B'+C'+D')$$

	A	B	C	D	f
0.	0	0	0	0	0
1.	0	0	0	1	0
2.	0	0	1	0	0
3.	0	0	1	1	0
4.	0	1	0	0	0
5.	0	1	0	1	0
6.	0	1	1	0	1
7.	0	1	1	1	0
8.	1	0	0	0	1
9.	1	0	0	1	1
10.	1	0	1	0	1
11.	1	0	1	1	1
12.	1	1	0	0	1
13.	1	1	0	1	0
14.	1	1	1	0	1
15.	1	1	1	1	1

Exercício 2:

Deseja-se projetar um circuito que acenda uma lâmpada a partir das entradas decimais 1, 2, 3, 9, 12 e apague a mesma a partir das entradas 13 e 15:



Determine as entradas e saídas, monte a tabela verdade, obtenha a expressão lógica minimizada através do Mapa de Karnaugh desenhe o circuito lógico correspondente.