



CÁLCULO NUMÉRICO E GRÁFICO PARA ENGENHEIROS

Revisado em 2001

Ítalo Alberto Gatica Ríspoli

Professor – Engenheiro Civil Msc



Aos meus pais: Luis Alberto Gatica Mora e
Elena Erika Rísoli Cárcamo;

AGRADECIMENTOS

- Ao grande gurú do Cálculo Numérico, Professor Geraldo Telles UNICAMP – FEI – FEP, quem incentivou o primeiro texto em 1980;
- Ao grande mestre Jony UNICAMP - FEI, que realmente me ensinou a gostar da disciplina em 1981;
- Ao colega de classe, Márcio Pezutti, que me ajudou a datilografar a 1ª série em 1981;
- Aos ex-alunos da engenharia elétrica modalidade eletrônica da 2ª e 3ª turma do UNISAL de Americana, que ajudaram a digitar a 1ª edição digitalizada.

Prefácio

Com aplicação de cálculo numérico, pode-se resolver qualquer problema de álgebra, cálculo e outros. Creio que por esta razão, a disciplina se faz tão necessária nas graduações de Engenharia e Processamento de dados.

Este manual é produto de um resumo dos principais tópicos do cálculo numérico, porém em nenhum ponto, perde seu rigor científico.

Como as soluções dos problemas via análise numérica são propícias para os processadores, estas anotações também são de grande valor para os alunos de Computação e Processamentos de Dados.

Agradeço ao Engenheiro Geraldo Telles, principal propulsor deste trabalho e pela dedicação como docente e pesquisador de todos os assuntos aqui abordados;

“PROIBO A COMERCIALIZAÇÃO E REPRODUÇÃO SEM MINHA PRÉVIA AUTORIZAÇÃO”

Americana, 6 de Fevereiro de 2001

Ítalo Alberto Gatica Rísoli

Professor Mestre em Ciências da Engenharia

ÍNDICE ANALÍTICO

1.1 INTRODUÇÃO:	8
1.2 ERROS	10
1.2.1 ERRO DE ARREDONDAMENTO:	10
1.2.2 ERRO DE TRUNCAMENTO:	11
2.1 MÉTODO GRÁFICO	12
2.2 MÉTODO DA BISSECÇÃO	14
2.3 MÉTODO DE CORDAS (OU DAS PARTES PROPORCIONAIS)	20
2.4 MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON	25
2.4.1 ESTUDO DA CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON	25
2.4.2 PROBLEMA DA ESCOLHA DE X_0 .	26
3.1. INTRODUÇÃO	31
3.2. MATRIZES	32
3.2.1. DEFINIÇÃO DE MATRIZ	32
3.2.2. MATRIZ DIAGONAL	32
3.2.3. MATRIZ IDENTIDADE (OU MATRIZ UNITÁRIA)	33
3.2.4 MATRIZ ZERO	33
3.2.5 OPERAÇÃO COM MATRIZES	34
3.2.5.1 Igualdade	34
3.2.5.2 Soma e Diferença de matrizes	34
3.2.5.3 Multiplicação de uma matriz por um escalar	34
3.2.5.4 Multiplicação de Matrizes	35
3.2.5.5 - Matriz Transposta	36
3.2.6. MATRIZ INVERSA	36
3.2.6.1. Matriz dos cofatores	37
3.2.6.2. Matriz Adjunta	37
3.2.6.3. Cálculo da Matriz Inversa (pela definição)	37
3.3 MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS	38
3.4 MÉTODO INTERATIVO DE GAUSS SEIDEL	39
3.4.1 PRIMEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DE GAUSS SEIDEL	41
3.4.2 SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DE GAUSS SEIDEL	42
3.5 INVERSÃO DE MATRIZES PELO MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS	43
3.5.1 SEGUNDO EXEMPLO DE INVERSÃO DE MATRIZES PELO MÉTODO DA ELIMINAÇÃO	44
3.6 AUTO VALORES E AUTO VETORES	44
3.6.1 PRIMEIRO EXEMPLO DE DETERMINAÇÃO DE AUTO VALORES E AUTO VETORES	45
3.6.2 SEGUNDO EXEMPLO DE DETERMINAÇÃO DE AUTO VALORES E AUTO VETORES.	46
3.6.3 EXEMPLO DE UM PROBLEMA DE MECÂNICA, SOLUCIONANDO DETERMINANDO-SE OS VALORES E AUTO VETORES.	49
4.1 - SÉRIES DE TAYLOR	52

4.2.1 PRIMEIRO EXEMPLO	53
4.2.2 SEGUNDO EXEMPLO	54
4.2.3 TERCEIRO EXEMPLO	55
5.1 INTRODUÇÃO	56
5.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PELA REGRA DOS TRAPÉZIOS	56
5.2.1 EXEMPLO	57
5.3 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PELO MÉTODO DE SIMPSON	57
5.3.1 EXEMPLO	59
5.3.2 SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA FÓRMULA DE SIMPSON	60
6.1 INTRODUÇÃO	61
6.1.1 FÓRMULA DE 2 PONTOS PARA A 1ª DERIVADA	61
6.1.2 FÓRMULA DE 3 PONTOS PARA A 2ª DERIVADA	62
6.1.3 FÓRMULA DE 4 PONTOS PARA A 1A. DERIVADA	62
6.1.4 FÓRMULA DE 5 PONTOS PARA A 2ª DERIVADA	62
6.2 EXEMPLO	63
6.3 - SEGUNDO EXEMPLO	64
7.1 - INTERPOLAÇÃO E EXTRAPOLAÇÃO LINEAR	66
7.1.1. EXEMPLO DE INTERPOLAÇÃO LINEAR	67
7.2. INTERPOLAÇÃO E EXTRAPOLAÇÃO PARABÓLICA (OU QUADRÁTICA)	67
7.2.1 EXEMPLO DE INTERPOLAÇÃO PARABÓLICA	68
7.2.2 SEGUNDO EXEMPLO DE INTERPOLAÇÃO PARABÓLICA	69
7.3 INTERPOLAÇÃO E EXTRAPOLAÇÃO PELOS POLINÔMIOS LAGRANGE	69
7.3.1 PRIMEIRO EXEMPLO	70
7.3.2 SEGUNDO EXEMPLO	72
8.1 AJUSTE POLINOMIAL	73
8.2 AJUSTE PARA POLINÔMIO DO PRIMEIRO GRAU	74
8.2.1 APLICAÇÃO	75
8.3 - AJUSTE PARA FUNÇÃO EXPONENCIAL	76
8.3.1 APLICAÇÃO	76
8.4 AJUSTE PARA POLINÔMIO DO 2º GRAU	77
8.4.1 APLICAÇÃO	78
9.1 INTRODUÇÃO	80
9.2 APLICAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	80
9.2.1 APLICAÇÃO	80
9.2.2 SEGUNDA APLICAÇÃO	82
9.3 MÉTODO DE EULER PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	83
9.3.1 CALCULAR NOVAMENTE A APLICAÇÃO 9.2.1 PELO MÉTODO DE EULER	83
9.3.2 CALCULAR PELO MÉTODO DE EULER	84

9.4 MÉTODO DE EULER GAUSS	84
9.4.1 APLICAÇÃO	84
9.4.2 SEGUNDA APLICAÇÃO –	85
9.5 MÉTODO DE RUNGE KUTTA	85
9.5.1 APLICAÇÃO	86
9.5.2 SEGUNDA APLICAÇÃO	86
MATEMÁTICA FINANCEIRA COM EMBASAMENTO NUMÉRICO	87

Capítulo I

Filosofia do Cálculo Numérico

1.1 INTRODUÇÃO:

Talvez o aspecto mais importante da solução de um problema matemático resolvido via Cálculo Numérico resida no fato de ser quase sempre uma solução aproximada.

Para o iniciante na matéria nada melhor que um exemplo para imediata compreensão, do que venha a ser uma solução aproximada:

É sabido (teorema de Abel-Ruffini) que equações de grau superior a quatro não admitem solução analítica. Como então seria resolvido a equação a seguir?

$$32x^5 - 64x + 31 = 0 \quad [1.1]$$

Um método numérico para detectar uma raiz real da equação 1.1 consistiria:

Toma-se como aproximação inicial da raiz o valor zero, $x^{(0)} = 0$
(leia-se: x em aproximação inicial igual a zero).

Rescreve-se a equação 1.1 de uma forma mais adequada para o método numérico escolhido:

$$x = \frac{31 + 32x^5}{64} \quad [1.2]$$

Substituindo na variável x da equação 1.2, a aproximação inicial $x^{(0)}$, vem:

$$x^{(1)} = \frac{31 + 32(0)^5}{64} = 0,4844$$

E diríamos que em 1ª aproximação a raiz vale 0,4844.

Recorrendo sempre à equação 1.2 teríamos em 2ª, 3ª e 4ª aproximação os cálculos:

$$x^{(2)} = \frac{31 + 32 \cdot [x^{(1)}]^5}{64} = \frac{31 + 32 \cdot (0,4844)^5}{64} = 0,4977$$

$$x^{(3)} = \frac{31 + 32 \cdot [x^{(2)}]^5}{64} = \frac{31 + 32 \cdot (0,4977)^5}{64} = 0,4996$$

$$x^{(4)} = \frac{31 + 32 \cdot [x^{(3)}]^5}{64} = \frac{31 + 32 \cdot (0,4996)^5}{64} = 0,4999$$

Notamos então que os valores numéricos obtidos nas diferentes aproximações da raiz **convergem** para o número 0,5 que corresponde ao valor exato da raiz.

O método utilizado para a resolução da equação 1.1 corresponde ao chamado "*Método Iterativo*", para a resolução de equações. Basicamente o método consiste em:

Precisa-se resolver uma equação do tipo:

$$F(x) = 0 \quad [1.3]$$

Toma-se uma aproximação inicial "conveniente" ao valor da raiz:

$x(0)$ = valor numérico conveniente.

Rescreva-se a equação 1.3 de uma forma mais adequada para o método iterativo:

$$x = f(x) \quad [1.4]$$

Assim teremos:

$$X^{(k+1)} = f(X^{(k)}) \quad (\text{onde } k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

A essas alturas o leitor terá uma série de perguntas, por exemplo:

Qual o critério para uma aproximação inicial conveniente?

Consegue-se sempre rescrever a equação 1.3 na forma 1.4?

Quando deve-se interromper o processo iterativo?

Estas perguntas deverão ser esclarecidas durante o curso, mas podemos adiantar de antemão que basicamente a disciplina *Cálculo Numérico* utiliza-se de conhecimentos das outras áreas da matemática e principalmente Bom Senso.

Outro aspecto que precisa ser ressaltado é que em Cálculo Numérico não existe o conceito de infinitamente grande e infinitamente pequeno. Trabalha-se sempre com grandezas FINITAS.

1.2 ERROS

Uma solução aproximada distingue-se da correspondente solução exata pelo erro. Basicamente podemos incorrer em Cálculo Numérico em dois tipos de erros: de arredondamento e de truncamento.

1.2.1 Erro de Arredondamento:

Por maior que seja nossa paciência (no caso de cálculo manual), por melhor que seja o nosso equipamento de cálculo (calculadora ou computador), representamos sempre uma quantidade numérica por um número finito de algarismos. Essa condição obriga-nos a "arredondar" as quantidades numéricas. Por exemplo, seja a solução da seguinte equação de 2º grau:

$$9x^2 - 6x + 19 = 0$$

que tem por raízes:

$$x_1 = \frac{1}{3} + i\sqrt{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1}{3} - i\sqrt{2}$$

As raízes x_1 e x_2 são raízes exatas do ponto de vista matemático, mas quando vamos trabalhar com elas notamos a necessidade de arredondamento, pois:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{3} = 0,3333 & \text{ou ?} & \frac{1}{3} = 0,33333 \\ \sqrt{2} = 1,4 & \text{ou ?} & \sqrt{2} = 1,414 \end{array}$$

Daí também decorrer a necessidade do sinal \approx desta apostila ser interpretado quase sempre por \approx (aproximadamente igual).

Podemos adotar como norma de cálculo o seguinte:

A precisão requerida para a resposta deve ser fixada de antemão.

todos os cálculos intermediários devem ser feitos completo menos um algarismo significativo a mais do que o requerido para a resposta final;

No instante de arredondar adotar o seguinte critério:

3,141159 escrito com 5 algarismos significativos fica 3,1416

1,41421 escrito com 5 algarismos significativos fica 1,4142

2,718 escrito com 3 algarismos significativos fica 2,72

2,145 escrito com 3 algarismos significativos fica 2,14

└─ par

5,135 escrito com 3 algarismos significativos fica 5,14

└─ ímpar

1.2.2 Erro de Truncamento:

Um dos tópicos de grande importância em Cálculo Numérico (será abordado com detalhes no transcorrer do curso) refere-se à representação de uma função em série de potências.

Assim temos por exemplo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots - \dots + \dots \quad [1.5]$$

válida para x em radianos.

O erro de truncamento decorre do fato que a equação 1.5 contém na realidade infinitos termos e quando vamos utilizá-la tomamos sempre um número finito de termos truncando os infinitos termos restantes.

Assim, tomando-se apenas o 1º termo da série, temos para o seno de 0,5 radianos o valor:

$$\sin 0,5 \text{ rd} = 0,5$$

Tomando dois termos da série 1.5 teremos:

$$\sin 0,5 \text{ rd} = 0,5 - \frac{(0,5)^3}{6} = 0,4792$$

Com 3 termos teremos:

$$\sin 0,5 \text{ rd} = 0,5 - \frac{(0,5)^3}{6} + \frac{(0,5)^5}{120} = 0,479427$$

No caso de uma série de termos alternados como é a série 1.5, o erro cometido é sempre menor que o primeiro termo desprezado. Mas tenha-se sempre em conta:

"No instante em que se conhece o erro, não existe mais erro"

Sabedoria Oriental

e também:

"A resposta, meu amigo, está soprando ao vento."

Bob Dylan

Capítulo II

Solução Algébrica de Equações Algébricas e Transcendentes

2.1 MÉTODO GRÁFICO

A solução para um problema do tipo:

$$F(x) = 0 \quad [2.1]$$

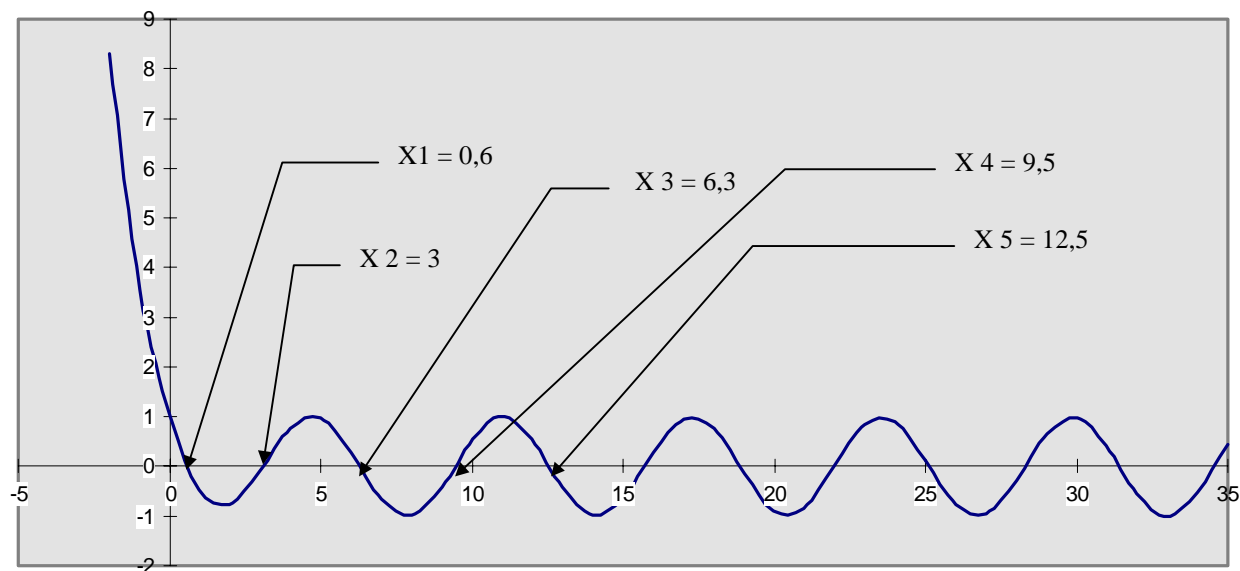
consiste em determinar-se os valores particulares (raízes) para "x" em que a igualdade é satisfeita.

O método gráfico consiste em representar-se num plano de coordenadas cartesianas $F(x)$ contra "x". As raízes reais x_1, x_2, \dots, x_n da equação são os pontos em que a curva representa $F(x)$ contra "x".

Por exemplo a solução gráfica da equação:

$$e^x - \sin x = 0 \quad [2.2] \quad \text{dado } x \text{ em radianos}$$

é conseguida desenhando-se o gráfico e verificando-se os pontos em que a curva corta o eixo dos x.



diante $X_1 = 0,6$ $X_2 = 3$ $X_3 = 6,3$ $X_4 = 9,5$ $X_5 = 12,5$ e assim por

Podemos observar também que essa equação tem infinitas raízes, sendo que foram determinadas apenas as 5 primeiras.

Uma variação no método, que às vezes simplifica sobremaneira o problema, consiste em rescrevermos a equação 2.1 na forma:

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \dots 2.3$$

Onde as raízes reais serão as abscissas dos pontos de interseção do $y_1(x)$ com $y_2(x)$.

Assim teríamos para a equação 2.2:

$$e^x = \sin x \quad \dots 2.5$$

onde:

$$Y_1(x) = e^x ; Y_2(x) = \sin x$$

Isto simplifica o problema porque existe inclusive tabelas de funções exponenciais e trigonométricas.

Teremos então no mesmo desenho duas curvas

A precisão das soluções obtidas pelo método gráfico está intimamente relacionada com a escala da desenho e a habilidade do desenhista.

Com o advento dos modernos computadores e calculadoras, o método raramente é utilizado, tanto sido apresentado aqui apenas devido a razões didáticas.

Como 2º exemplo teríamos a solução da equação:

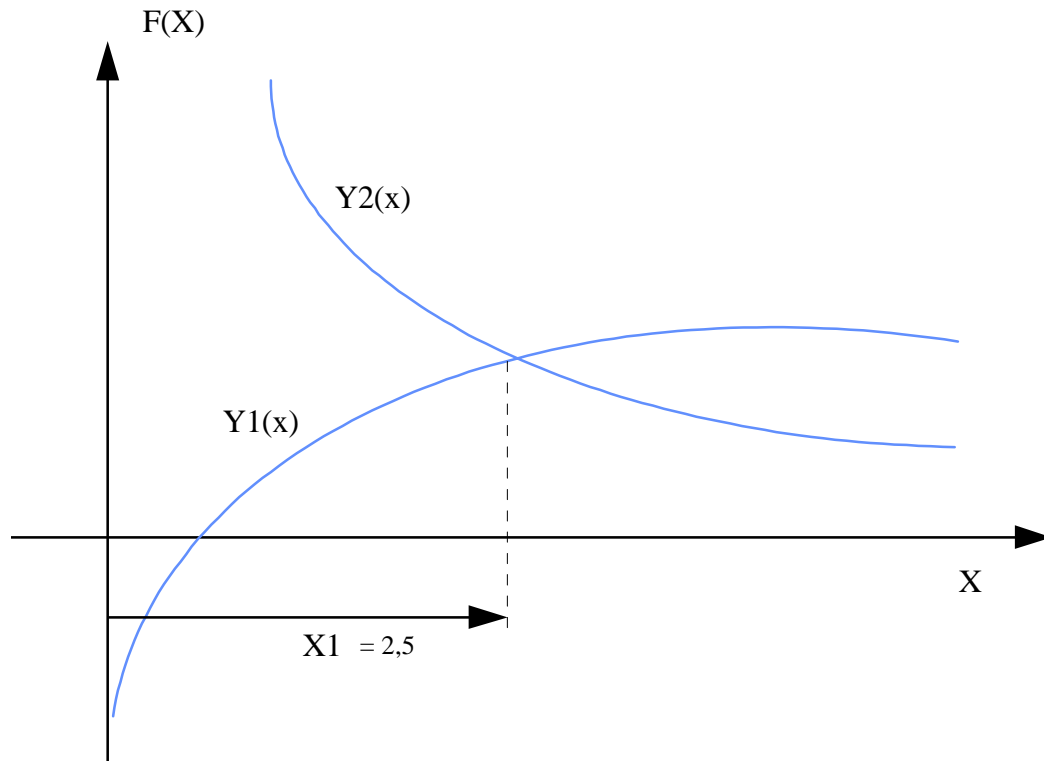
$$x \log x - 1 = 0 \quad \dots 2.6$$

que re escrita na forma 2.3, ficaria:

$$\log x = 1/x \quad \dots 2.7$$

onde $Y_1(x) = \log x$ e $y_2(x) = 1/x$

Do diagrama notamos que essa equação possui apenas uma raiz real.



2.2 MÉTODO DA BISSECÇÃO

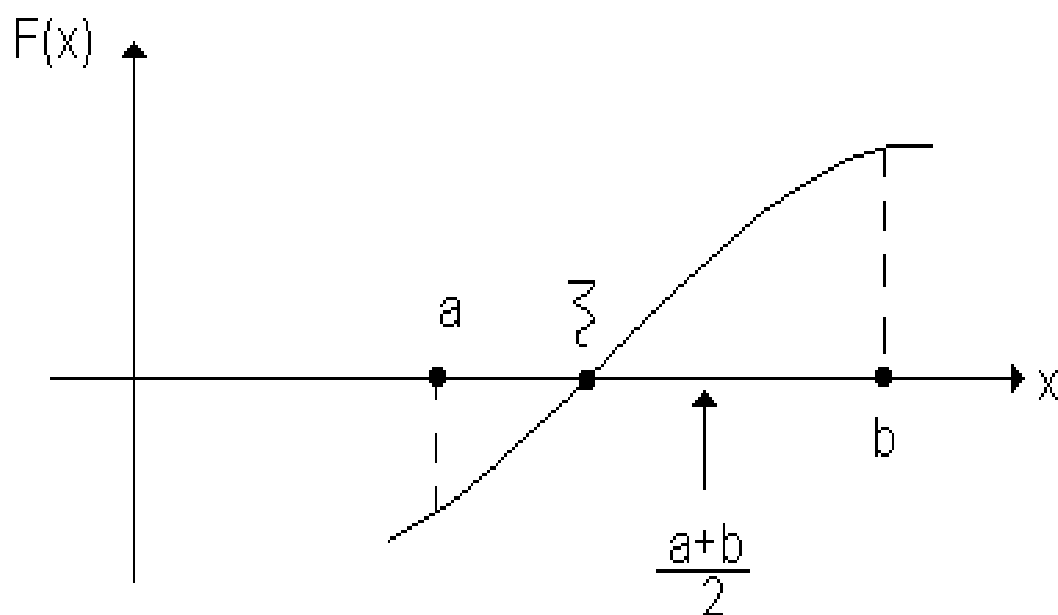
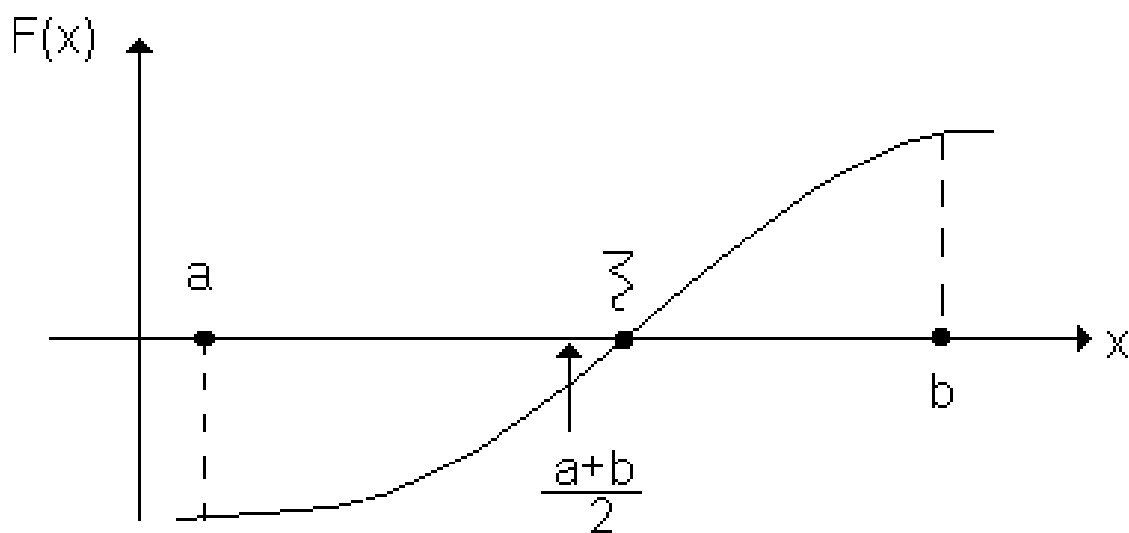
Recordando que o nosso objetivo é resolver uma equação do tipo: $F(x) = 0$ e com auxílio do teorema de Bolzano o qual afirma: "Se $F(x)$ é contínua em um intervalo $[a,b]$ e $F(a).F(b) < 0$, existe pelo menos uma raiz real no intervalo $[a,b]$."

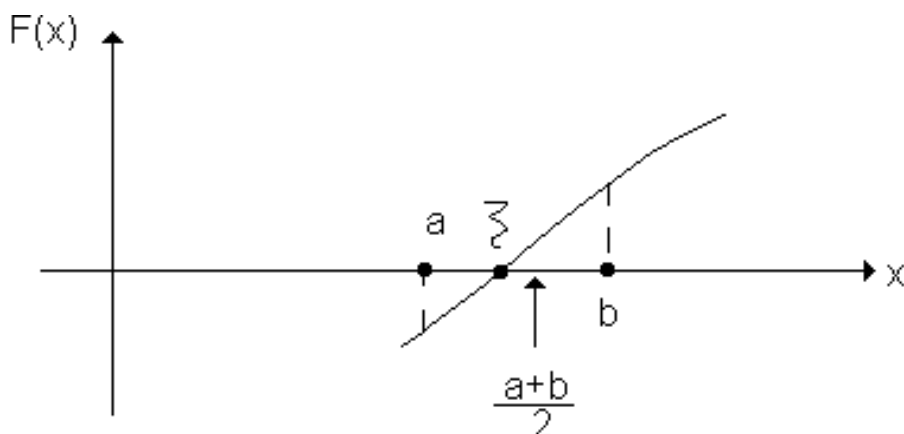
A 1a. fase do método da bissecção consiste em determinar-se (por tentativas) a e b tais que $F(a).F(b) < 0$. Supondo-se que a raiz real existente nesse intervalo é única, divide-se esse intervalo em duas partes iguais.

A raiz procurada pode encontrar-se na 1a. parte do intervalo: $[a, (a+b)/2]$ ou na 2a. parte: $[(a+b)/2, b]$

Isto é facilmente determinado calculando-se $F[(a+b)/2]$. A raiz procurada está na 1a. parte do intervalo caso $F[(a+b)/2]$ tenha sinal contrário de $F(a)$, ou estará na 2a. parte, caso tenham mesmo sinal.

Determinada a parte em que se localiza a raiz, divide o novo intervalo ao meio e repete-se a rotina até uma aproximação suficiente para a raiz.

Interpretação Gráfica de Método da Bisseccção



E assim por diante até uma aproximação suficiente para a raiz.

Exemplo

Determinar pelo método da bissecção a raiz existente no intervalo $[0,1]$, da seguinte equação:

$$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0 \quad \dots 2.8$$

Substituindo-se os valores dos extremos do intervalo na equação, temos : $F(0) = -1$ e $F(1) = 1$.

Como $F(0).F(1) < 0$, realmente existe pelo menos uma raiz no intervalo $[0,1]$.

Dividindo-se esse intervalo ao meio e verificando o valor de $F(x)$ nesse ponto vem:

$$\frac{0+1}{2} = 0,5 \quad \text{e} \quad F(0,5) = -1,1875$$

Como $F(0,5)$ tem o mesmo sinal que $F(0)$, dividimos agora o intervalo $[0,5; 1]$ ao meio:

$$\frac{0,5+1}{2} = 0,75 \quad \text{e} \quad F(0,75) = -0,58984$$

Nota: No caso de equações polinomiais o cálculo do polinômio para um particular "x" é simplificado escrevendo-se o polinômio na forma de "binômios encaixados". Assim a equação 2.8 pode ser substituída por:

$$x\{x[x(x+2)+0]-1\}-1=0 \quad [2.9]$$

Como $F(0,75)$ tem o mesmo sinal que $F(0,5)$, dividimos o intervalo $[0,75; 1]$ ao meio:

$$\frac{0,75+1}{2} = 0,875 \quad \text{e} \quad F(0,875) = 0,051025$$

Podemos observar que 0,875 já é uma boa aproximação da raiz pois seu resíduo (0,051025) é bem pequeno com relação aos resíduos das aproximações anteriores.

Nota: O resíduo de uma aproximação é o valor que a função assume no ponto.

Se desejarmos uma aproximação melhor para a raiz prosseguimos com o método.

$$\frac{0,875 + 0,75}{2} = 0,8125 \quad e \quad F(0,8125) = -0,30394$$

$$\frac{0,8125 + 0,875}{2} = 0,84375 \quad e \quad F(0,84375) = -0,13557$$

$$\frac{0,84375 + 0,875}{2} = 0,85938 \quad e \quad F(0,85938) = -0,044585$$

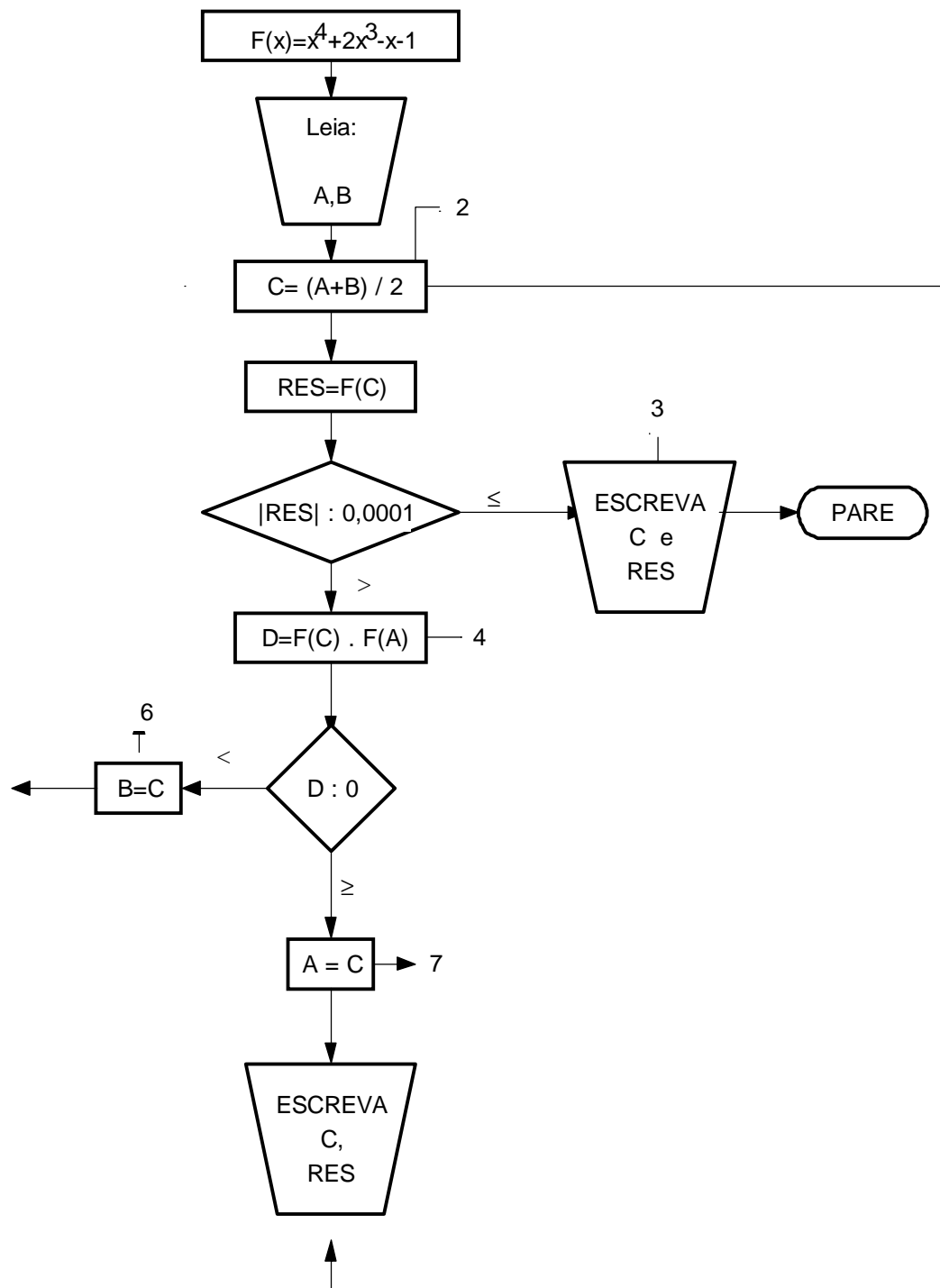
$$\frac{0,875 + 0,85938}{2} = 0,86719 \quad e \quad F(0,86719) = 0,0026276$$

Então podemos dizer que 0,86719 é uma aproximação da raiz com um resíduo da ordem de 0,003, que na maior parte dos casos é suficiente. É fácil de observar que caso haja necessidade de uma aproximação melhor, o método prosseguiria da mesma forma.

OBSERVAÇÃO :

FOGEM à regra de Bolzano, algumas funções **descontínuas** onde ocorre $f(a) f(b) < 0$, porém no intervalo (a,b) não existirão raízes reais. Como por exemplo uma tangeitoide ou alguns tipos de assíntotas.

Caso tivéssemos à disposição um compilador FORTRAN, esse problema poderia ser resolvido conforme diagrama de bloco e listagem a seguir:



$F(X) = X ** 4 + 2 * X ** 3 - X - 1.$

READ(5,1)A,B

1 FORMAT (2F2. 0)

2 C = (A+B) /2.

RES = F(C)

IF (ABS (RES) - 0.001) 3,3,4

```

3  WRITE (5,5) C, RES
5  FORMAT ( 2F15. 5 )
   CALL EXIT
4  D = F ( C ) * F ( A )
   IF ( D ) 6,7,7
6  B = C
   WRITE ( 5,5 ) C,RES
   GOTO2
7  A = C
   WRITE ( 5,5 ) C,RES
   GOTO2
   END

```

Para : A = 0 e B = 1, teríamos os seguintes resultados :

0. 50000	-1. 18750
0. 75000	-0. 58984
0. 87500	0. 05103
0. 81250	-0. 30394
0. 84375	-0. 13557
0. 85938	-0. 04461
0. 86719	0. 00261
0. 86328	-0. 02115
0. 86523	-0. 00930
0. 86621	-0. 00336
0. 86670	-0. 00037
0. 86694	0. 00112
0. 86682	0. 00037
0. 86676	-0. 00000

Um compilador BASIC é bem semelhante, de fácil domínio e conduz a resultados tão precisos quanto ao do FORTRAN.

Esse problema também poderia ser resolvido com a função embutida de uma calculadora programável HP 48G ou 48 GX, conforme a seqüência abaixo :

- Habilite a função Solve (setinha verde seguida do 7);
- Escolha OK no menu Solve equation;
- Digite a equação utilizando α 1/x para aparecer a incógnita x onde necessário. Deve ficar na parte inferior do visor entre aspas simples ' $X^4 + 2 \cdot X^3 - X - 1$ '.

- Digite Enter ou OK
- Digite a tecla F habilitada para Solve e a calculadora apresentará o resultado com um erro muito pequeno, pois já foi arquitetada para isso. Fantástico não é? Um processador tão pequeno e poderoso !

A tecla ON desabilita o menu.

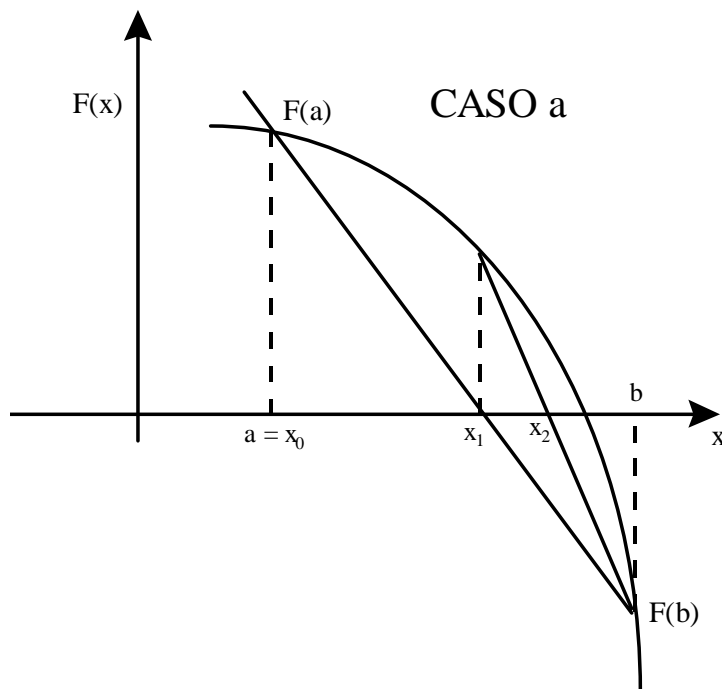
Nota: Ao manipular qualquer função pre-programada desta calculadora, aconselho ao acadêmico,

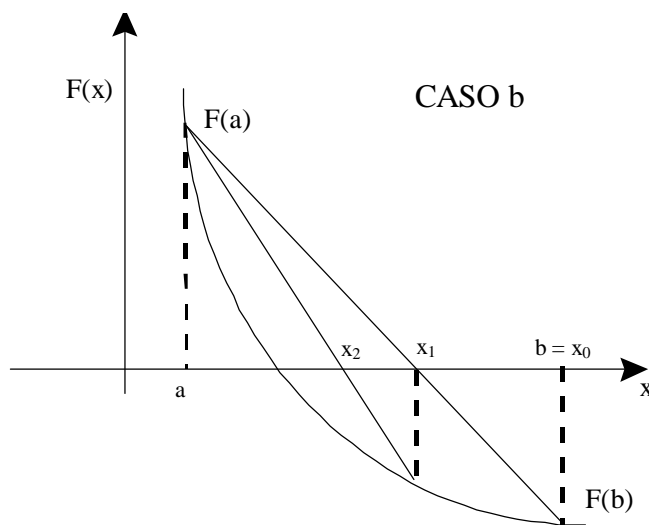
determinar um subdiretório específico, que pode ter o nome de *lixo*, pois todas as funções programadas criam variáveis que ficam no diretório de trabalho de forma temporária até o usuário decidir apagá-las. Desta forma no subdiretório *lixo* podem ser apagadas facilmente as variáveis temporárias, bastando para isso colocar entre as chaves { } e na posição 1 da pilha, todas as variáveis temporárias e digitar a função PURG localizada através da setinha azul sobre a tecla EEX. Para introduzir a variável dentro das { }, basta pressionar a tecla da variável após ter abedrtto as { }.

2.3 MÉTODO DE CORDAS (OU DAS PARTES PROPORCIONAIS)

O método das cordas converge mais rapidamente que o da bissecção. É mais lógico tomar-se como próxima aproximação a razão de $F(a) / F(b)$, isto é, ligar-se os pontos

$(a, F(a))$ e $(b, F(b))$ e supor como aproximação seguinte o ponto onde essa corda intercepta o eixo x. Pode ocorrer dois casos:





Caso a) Concavidade para Baixo Caso b) Concavidade para Cima

Caso a) $F''(x) < 0$ e $F(b) < 0$
faz-se $X_0 = a$ e:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{F(X_n)(b - X_n)}{F(b) - F(X_n)} \quad \dots 2.9$$

Caso b) $F''(x) > 0$ e $F(a) > 0$
faz-se $X_0 = b$ e:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{F(X_n)(a - X_n)}{F(a) - F(X_n)} \quad \dots 2.10$$

Resumindo-se:

- 1) Encontra-se a e b tais que $F(a) \cdot F(b) < 0$. Isto garantirá a existência da raiz
- 2) Encontra-se $F(x)$ e considera-se a fórmula 2.9 caso $F''(x) \cdot F(b) > 0$ ou a fórmula 2.10 se $F''(x) \cdot F(a) > 0$.

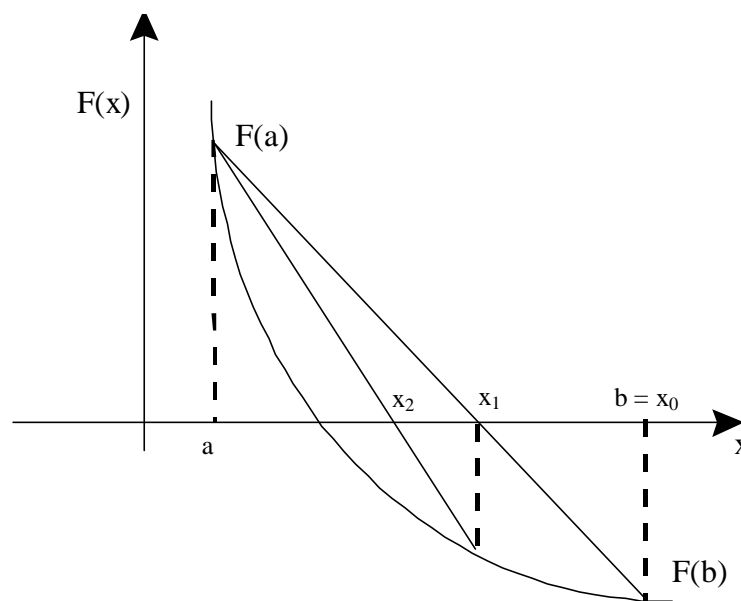
Uma outra forma bastante prática de resolver uma equação por este método, consiste em refinar bem o intervalo inicial pelo processo das bisseções o que garante economia de iterações *a posteriori* e aplicar :

$$X_{n+1} = a + \frac{f(a)f(b-a)}{f(a)-f(b)}$$

que possui bom desempenho para as duas concavidades, economizando a análise das mesmas.

Demonstração:

Interessa-nos qualquer posição iterativa x exceto a de X_0 que é de conhecimento inicial. Tomando por exemplo a posição X_1 , tomando um caso qualquer, temos:



$X_1 = a + \Delta$, onde Δ = segmento de reta medido de a até X_1 . Por semelhança de triângulos ...

$$\Delta / (b - a) = f(a) / [f(a) - f(b)], \text{ isolando } \Delta = [f(a)(b - a)] / [f(a) - f(b)].$$

$$\text{Como } X_1 = a + \Delta, \text{ então, } X_{n+1} = a + \frac{f(a)f(b-a)}{f(a)-f(b)}$$

Como queríamos demonstrar

Exemplo

Determinar pelo método das cordas uma raiz positiva da equação :

$$x^3 + 0,2 x^2 - 0,2 x - 1,2 = 0 \quad \dots 2,11$$

(resíduo permissível : 0, 02)

1º) Precisamos encontrar a e b tais que : $F(a) \cdot F(b) < 0$.

Esse é realmente um dos pontos mais enfadonhos do método, ainda mais, quando uma simples equação é dada apenas com a finalidade didática e nada significa para o aluno. Ao contrário da vida prática quando o usuário tem uma noção do **domínio**¹

pois a e b devem ser determinados (via de regra) por tentativas.

$$F(0) = -1,2; \quad F(1) = -0,6; \quad F(2) = 5,6$$

Então existe pelo menos uma raiz da equação 2.11 no intervalo

$$[1,2], \text{ pois } f(1) \cdot f(2) < 0.$$

Poderíamos fazer $a=1$ e $b=2$, mas antes faremos uma pesquisa de $F(1,5)$.

$F(1,5) = 1,425$ então fazemos $a=1$ e $b=1,5$. Isto significa refinar o intervalo pelas dicotomias ou método da bissecção.

2º) Verifiquemos o sinal de $F''(x)$ no intervalo $[1;1,5]$, para sabermos qual das fórmulas deverá ser utilizada.

$$F(x) = x^3 - 0,2 x^2 - 0,2 x - 1,2$$

$$F'(x) = 3 x^2 - 0,4 x - 0,2$$

$$F''(x) = 6 x - 0,4$$

$F''(1) = 5,6$ e $F''(1,5) = 8,6$, temos então $F''(x) > 0$ no intervalo $[1;1,5]$.

Como $f(1,5) > 0$ temos $F''(x) \cdot F(b) > 0$ e portanto utilizaremos a fórmula 2.9 com $X_0 = a$, logo : $X_0 = 1$.

$$X_1 = a - \frac{F(a)}{F(b) - F(a)} (b-a) = 1 + \frac{0,6}{1,425 + 0,6} (1,5 - 1)$$

¹ Quando a equação montada tem fundo lógico por ser do nosso domínio prático, às vezes é possível determinar o intervalo (a,b) sem grandes problemas. É o caso, por exemplo de uma equação financeira de descapitalização ou financiamento, o usuário tem uma noção do **domínio** dos juros, isto é, sabe-se mais ou menos o valor mínimo e máximo das taxas de juros.

$$X1 = 1,1482 \text{ e } F(1,1482) = -0,17957$$

Como o resíduo da aproximação 1,1482 é superior à 0,02 precisamos prosseguir com o método, calculando-se X2 :

$$x2 = x1 - \frac{F(x1)}{F(b) - F(x1)} (b - x1) = 1,1482 + \frac{0,17957}{1,425 + 0,17957} (1,5 - 1,1482)$$

$$x2 = 1,1876 \text{ e } F(1,1876) = -0,044615$$

$$x3 = x2 - \frac{F(x2)}{F(b) - F(x2)} (b - x2) = 1,1876 + \frac{0,044615}{1,425 + 0,044615} (1,5 - 1,1876)$$

$$x3 = 1,1971 \text{ e } F(1,1971) = |-0,010527| < 0,02$$

Então afirmamos que uma raiz da equação 2.11 é 1,1971 com resíduo inferior a 0,02.

Exercícios sobre Equações Financeiras de Descapitalização ²

1.) Um objeto custa à vista R\$ 200,00 ou à prazo:

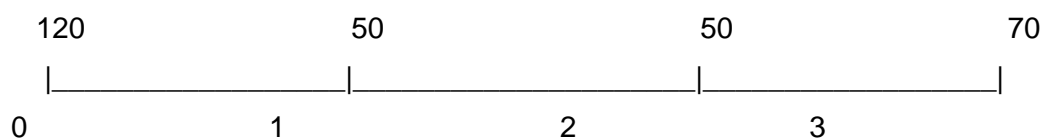
Entrada = R\$ 120,00

30 dias = R\$ 50,00

60 dias = R\$ 50,00

90 dias = R\$ 70,00

Pede-se o juro mensal do plano parcelado



$$\text{Financiamento} = \text{Preço à vista} - \text{Entrada} = 200 - 120 = 80$$

$$\text{Equação: } 50/(1+i)^1 + 50/(1+i)^2 + 70/(1+i)^3 - 80 = 0$$

$$\text{RESULTADO: } i = 46,1926600864 \%$$

2.) Idem ao anterior com:

À vista = R\$ 160,00

Entrada = R\$45,00

30 dias = R\$45,00

60 dias = R\$45,00

² Localizar no índice a página do capítulo referente a Matemática Financeira com fundo numérico.

90 dias = R\$50,00

RESULTADO : $i = 10,3223697014 \%$

2.4 MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

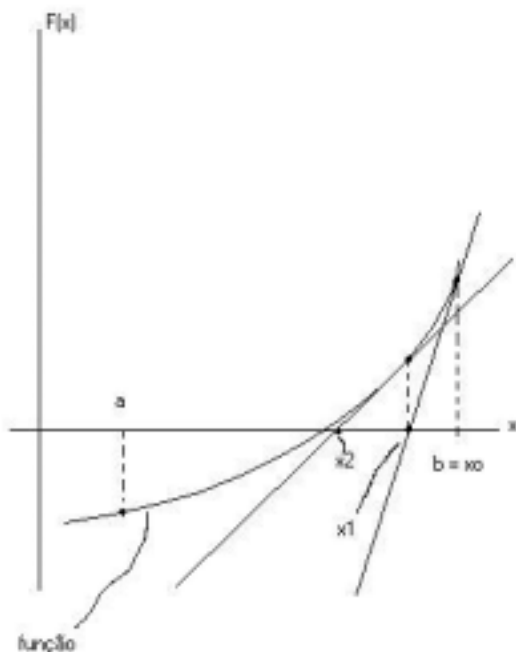
Este será o último método que veremos no curso para resolver uma equação do tipo $F(x) = 0$.

Se a raiz procurada encontra-se num intervalo $[a,b]$ e $F'(x)$ e $F''(x)$ são contínuas no intervalo, podemos escrever :

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

Demonstração:

Interessa-nos qualquer posição iterativa x exceto a de X_0 que é de conhecimento inicial. Tomando por exemplo a posição X_1 gerada pela reta tangente T_1 , onde por semelhança de triângulos temos:



A posição $X_1 = X_0 - \Delta$, Segmento de X_1 a X_0 , fazendo $\Delta =$ Segmento de X_1 a X_0 , tem-se: $X_1 = X_0 - \Delta$, Sabe-se ainda que $\text{Tg } \alpha = f'(X_0)$ e

que pelas propriedades trigonométricas dos triângulos retângulos,

$\text{Tg } \alpha = \text{cateto oposto} / \text{cateto adjacente}$, então,

$\text{Tg } \alpha = f(x_0) / \Delta$, então temos as igualdades:

$\text{Tg } \alpha = f'(X_0) = f(X_0) / \Delta$, onde isolando Δ :

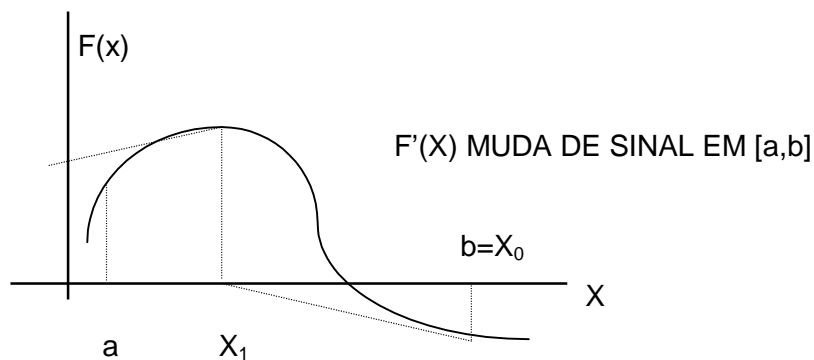
$\Delta = f(X_0) / f'(X_0)$, desta forma, obtem-se:

$X_1 = X_0 - f(X_0) / f'(X_0)$, genericamente:

$$X_{n+1} = X_n - f(X_n) / f'(X_n)$$

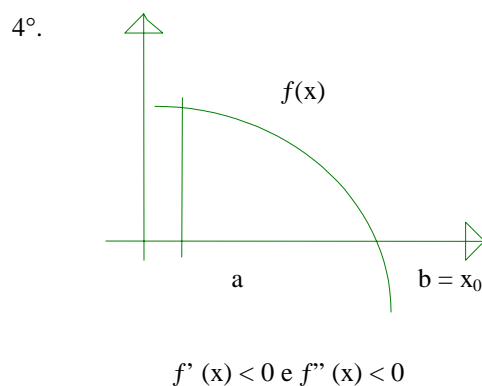
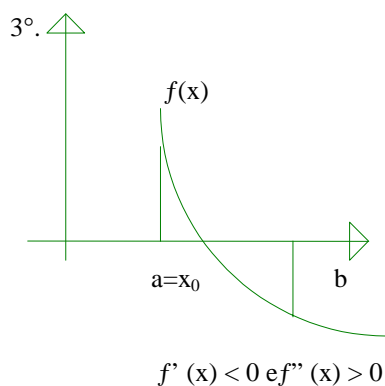
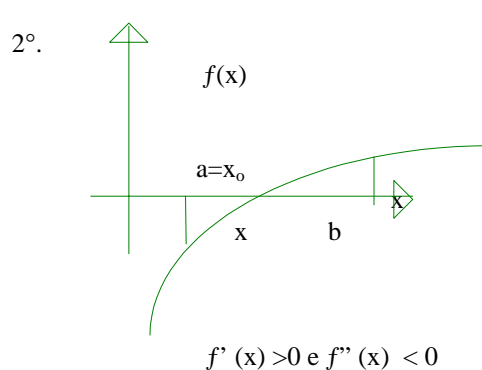
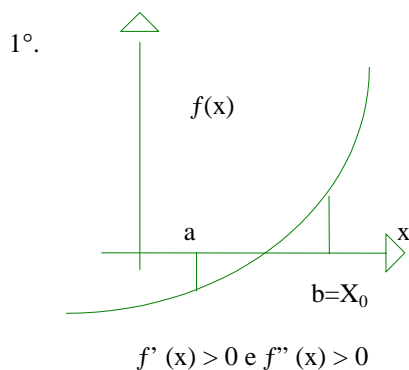
2.4.1 Estudo da convergência do Método de Newton - Raphson

Nem sempre o método de N.R. converge, por exemplo :



2.4.2 Problema da escolha de X_0 .

Temos quatro possibilidades:



Observando que nos quatro casos devemos adotar um x_0 conveniente, temos:

$$x_0 = b \text{ se } f'(x) \cdot f''(x) > 0$$

ou

$$x_0 = a \text{ se } f'(x) \cdot f''(x) < 0$$

1º Exemplo

Determinar pelo método de Newton-Raphson as raízes da seguinte equação:

$$x^3 - 0,8x^2 + 0,2x - 3,6 = 0 \quad \dots 2.13$$

1º) Inicialmente precisamos determinar a e b tais Que.: $f(a) \cdot f(b) < 0$.

$$f(0) = -3,6; \quad f(1) = -3,2 \quad f(2) = 1,6 \quad \text{e} \quad f(1,5) = -1,725$$

Então adotamos $a=1,5$ e $b=2$.

2º) Estudo da convergência

$$f(X) = X^3 - 0,8X^2 + 0,2x - 3,6$$

$$f'(X) = 3X^2 - 1,6x + 0,2$$

$$f''(X) = 6x - 1,6$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1,5) &= 3(1,5)^2 - 1,6(1,5) + 0,2 = 4,55 \\ f'(2) &= 3(2)^2 - 1,6(2) + 0,2 = 9 \end{aligned} \right\} f'(X) \text{ não muda de sinal no intervalo } (1,5;2).$$

$$\left. \begin{aligned} f''(1,5) &= 6(1,5) - 1,6 = 7,4 \\ f''(2) &= 6(2) - 1,6 = 10,4 \end{aligned} \right\} f''(X) \text{ também não muda de sinal no intervalo } (1,5;2).$$

3º) Escolha do X_0 adequado

Como $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ no intervalo $(1,5;2)$, tomamos $X_0 = b$,
logo $X_0 = 2$.

4º) Método propriamente dito

Aplicando-se a fórmula 2.12 de Newton-Raphson, temos para x_1 :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1,6}{9} = 1,8222$$

verificando o resíduo da aproximação x_1 temos $f(1,8222) = 0,15857$ o qual excede o permissível, portanto continuamos com a rotina de cálculo:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,8222 - \frac{f(1,8222)}{7,2457} = 1,8222 - \frac{0,15857}{7,2457}$$

$x_2 = 1,8003$, que possui o resíduo : $f(1,8003) = 0,0021124 < 0,01$. Portanto, na precisão requerida uma das raízes da equação 2.13 é **1,8003**.

Nesse ponto o leitor deverá estar pensando: e as outras duas raízes?

Para determinarmos as outras duas raízes, basta dividirmos a equação 2.13 por $(x - 1,8003)$, com isto recai-se numa equação de 2º grau, facilmente solucionável.

Por questão de espaço faremos a divisão por $(x - 1,8)$

$$\begin{array}{r} [x^3 - 0,8x^2 + 0,2x - 3,6] : [x - 1,8] = x^2 + x + 2 \\ - \underline{x^3 + 1,8x^2} \\ x^2 + 0,2x \\ - \underline{x^2 + 1,8x} \\ 2,0x - 3,6 \\ - \underline{2,0x + 3,6} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

Resolvendo-se a equação: $x^2 + x + 2$, temos as outras duas raízes:

$$\frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \quad e \quad \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$$

2º) Exemplo

Para encerrarmos o assunto resolveremos uma equação transcendental:

$$\operatorname{tg} x - x = 0$$

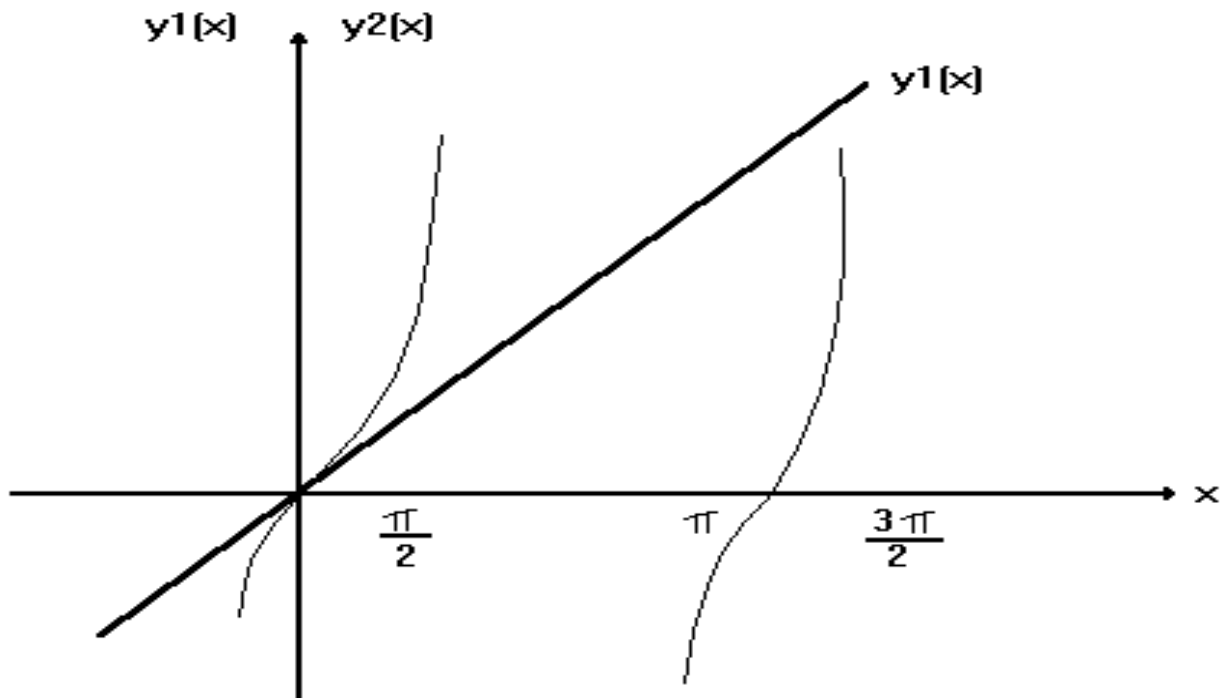
da qual interessa a primeira raiz positiva, com resíduo permissível de 0,01.

1º) Determine de a e b

Se rescrevermos 2.14 na forma :

$$\operatorname{tg} x = x$$

e utilizarmos o método gráfico, fica fácil de estimarmos a primeira raiz positiva. Para tanto desenha-se num só plano cartesiano as funções $Y1(x) = \operatorname{tg} x$ e $Y0(x) = x$.



Do gráfico vemos que podemos adotar $a = \pi$ e $b = 3\pi/2$.

Isto corresponde a ângulos do 3º quadrante trigonométrico.

2o) Estudo da convergência

O estudo é facilitado se rescrevermos a equação 2.14, na forma:

$$\operatorname{sen}(x) - x \cos x = 0 \quad \dots 2.15$$

$f(\pi) = \pi$ e $f(3\pi/2) = -1$, que confirma a existência de raiz no 3º quadrante.

$$f(x) = \operatorname{sen} x - x \cos x$$

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{em } [\pi, 3\pi/2]$$

$$f''(x) = x \cos x + \sin x$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{em } [\pi, 3\pi/2]$$

3) Escolha do X_0 adequado:

como $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ fazemos $X_0 = b = 4,7124$

3) Método propriamente dito

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} = 4,7124 - \frac{\sin 4,7124 - 4,7124 \cdot \cos 4,7124}{4,7124 \cdot \sin 4,7124}$$

Obs³: Lembre-se que estamos trabalhando com ângulos em radianos ! se você está acompanhando os cálculos na sua calculadora, fixe a mesma no modo radiano.

$X_1 = 4,5002$ que tem o resíduo $f(4,5002) = -0,029829$ Como o resíduo de X_1 , excede o permissível, calcularemos X_2 :

$$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(X_1)} = 4,5002 - \frac{\sin 4,5002 - 4,5002 \cdot \cos 4,5002}{4,5002 \cdot \sin 4,5002}$$

$X_2 = 4,4932$ que tem o resíduo $f(4,4932) = 0,00041483 < 0,01$

Então temos na precisão requerida que a raiz da equação 2.14 vale: 4,4934.

³ As calculadoras científicas trazem os modos ajustáveis: DEG = Degree - RAD = Radianos e GRAD = Grados ou gradientes em espanhol

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES SIMULTÂNEAS

3.1. INTRODUÇÃO

É conhecido (colegial) que um sistema de equações lineares pode ser resolvido pelo método de Cramer. Por exemplo, seja o sistema:

$$x + 2y + z = 3$$

$$-x + 3y = 1$$

$$-2y + 4z = 0$$

Tem por solução segundo o método de Cramer:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad \text{e} \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

com:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Imaginemos então que temos um computador de 3ª geração à nossa disposição. Esse computador realiza uma adição ou subtração em 60 μ s e uma multiplicação em 400 μ s.

Suponhamos também os seguintes métodos para resolução de sistemas lineares:

- Método de Cramer, calculando-se os determinantes pela definição.
- Método de Cramer, calculando-se os determinantes pelo desenvolvimento de Laplace.
- Método da eliminação de Gauss (a ser estudado no nosso curso).

Valores de H →

verificar referência bibliográfica

a) Cramer (deter. pela definição) 2,5 s 3,4 dias 20 bilhões de anos

b) Cramer (deter. por Laplace)	0,4 s	6 min	5 meses
c) Eliminação de Gauss	36 μ s	0,22 s	1,5 s

Onde H é o número de equações e incógnitas.

Da tabela nota-se que o fato de possuir um equipamento moderno de computação não se encerra a que estão, pois o método de resolução utilizado também é importante.

E também podemos escrever a seguinte expressão simbólica:

Cálculo Numérico = Aritmética + Álgebra + Geometria + Cálculo Integral + + Bom Senso

O autor pede que a expressão acima (por questão de ética) seja encarada como uma reação química irreversível, isto é, as parcelas não podem mudar de lado na expressão.

3.2. MATRIZES

Antes de estudarmos os métodos numéricos de resolução de sistemas faremos uma pequena revisão na teoria de matrizes.

3.2.1. Definição de Matriz

Chama-se matriz a todo conjunto de números (complexos ou reais) dispostos em forma retangular do m linhas e n colunas.

O 1º índice denota a linha

O 2º índice denota a coluna

A matriz é dita de dimensão MxN (Leia-se m por n).

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}
 \end{array} = (a_{ij})_{m,n}$$

Se $M=N \Rightarrow$ Matriz Quadrada

Um número ordinário pode ser imaginado como sendo uma Matriz 1 x 1.

3.2.2. Matriz Diagonal

É a matriz em que todos os elementos são nulos exceto aqueles em que os dois índices são iguais.

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

3.2.3. Matriz Identidade (ou Matriz Unitária)

É a matriz diagonal em que os elementos não nulos são iguais a um.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e introduzindo a notação de Kronecker: $\Delta_{i,j} = 0$ se $j \neq i$ ou $\Delta_{i,j} = 1$ se $j = i$

Podemos escrever $I = [\Delta_{i,j}]$

3.2.4 Matriz Zero

É a matriz em que todos elementos são nulos.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{notação: } \overline{0}_{m,n}$$

3.2.5 Operação com Matrizes

3.2.5.1 Igualdade

$$A = [a_{ij}] \quad B = [b_{ij}]$$

$$A = B \text{ se: } a_{ij} = b_{ij} \text{ para } \forall i \text{ e } j$$

3.2.5.2 Soma e Diferença de matrizes

$$C = A + B \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ para } \forall i \text{ e } j$$

$$C = A - B \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \text{ para } \forall i \text{ e } j$$

Propriedades

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{Associativa.}$$

$$A + B = B + A \quad \text{Comutativa.}$$

$$A + 0 = A \quad \text{Existe o elemento neutro na soma de matrizes, e é a matriz zero.}$$

3.2.5.3 Multiplicação de uma matriz por um escalar

- produto de uma matriz $A = [a_{ij}]$ m, n por um escalar α é obtido multiplicando-se todos os elementos de A pelo escalar α .

$$A\alpha = \alpha A = \begin{bmatrix} a_{11}\alpha & a_{12}\alpha & \dots & a_{1n}\alpha \\ a_{21}\alpha & a_{22}\alpha & \dots & a_{2n}\alpha \\ a_{31}\alpha & a_{32}\alpha & \dots & a_{3n}\alpha \\ a_{m1}\alpha & a_{m2}\alpha & \dots & a_{mn}\alpha \end{bmatrix}$$

$$C = \alpha A \quad c_{ij} = \alpha a_{ij} \quad \text{para } \forall i \text{ e } j$$

Propriedades

$$1a. \quad 1 A = A$$

$$2a. \quad 0 A = 0$$

$$3a. \quad \alpha (\beta A) = (\alpha\beta) A$$

$$4a. \quad (\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$$

$$5a. \quad \alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$$

e mais :

$$-A = (-1) \cdot A$$

$$A - B = A + (-B)$$

3.2.5.4 Multiplicação de Matrizes

Sejam :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m,n} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix}_{p,q}$$

Se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, isto é $n = p$, podemos definir o produto matricial $A \times B$ como sendo uma Matriz C de dimensão $m \times q$.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{bmatrix}$$

$$\text{Onde : } c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{in} \times b_{nj}$$

$$\text{Com } i = 1, 2, \dots, m \quad \text{e} \quad j = 1, 2, \dots, q$$

Exemplo :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Propriedades:

$$1.a. A (B C) = (A B) C$$

$$2.a. \alpha (A B) = (\alpha A) B$$

$$3.a. (A + B) C = A C + B C$$

$$4.a. C (A + B) = C A + C B \quad \text{e quase sempre não vale a comutativa } AB \neq BA$$

3.2.5.5 - Matriz Transposta

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m, n} \quad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n, m}$$

$$\text{Então se } A = [a_{ij}]; \quad A^t = [a_{ji}]$$

Propriedades:

$$1^a. A^t = A^t$$

$$2^a. (A+B)^t = A^t + B^t$$

$$3^a. (AB)^t = B^t A^t$$

$$4^a. \text{Det } A^t = \text{Det } A$$

3.2.6. Matriz Inversa

A matriz inversa de uma matriz A é tal que:

$$A A^{-1} = I = A^{-1} A$$

A condição para que a matriz A tenha inversa, é que A seja uma matriz singular, isto é, uma matriz cujo determinante é diferente de zero.

3.2.6.1. Matriz dos cofatores

Quando de uma matriz A (quadrada de ordem n) são removidos os elementos da linha i e da coluna j resultam numa matriz quadrada de ordem $n-1$. O determinante m_{ij} desta matriz é denominado menor de a_{ij} . O cofator de a_{ij} , A^*_{ij} é definido como sendo:

$$A^*_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

A matriz que engloba todos os A^*_{ij} é denominada matriz dos cofatores.

3.2.6.2. Matriz Adjunta

É a matriz transposta da matriz dos cofatores.

$$\overline{A} = (A^*)^T$$

3.2.6.3. Cálculo da Matriz Inversa (pela definição)

Dada uma matriz A (que precisa ser não singular), determina-se inicialmente a matriz dos cofatores de A , simbolicamente: A^* ; transpõe-se A^* e obtemos a matriz adjunta de A , simbolicamente: \overline{A}

A matriz inversa de A é a matriz adjunta dividida pelo determinante (Δ) da matriz A . Portanto:

$$A \rightarrow A^* \rightarrow \overline{A} \rightarrow A^{-1}$$

Propriedades:

$$1^a. \text{Det } A^{-1} = 1 / \text{Det } A$$

$$2^a. (A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

3.3 MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Seja o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 + 4x^3 = 18 \\ x^1 + 3x^2 + 2x^3 = 13 \\ 3x^1 + x^2 + 3x^3 = 14 \end{cases}$$

Esse sistema pode perfeitamente ser representado pela seguinte equação matricial :

$$A X = C \quad 3.1$$

Onde ,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 18 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

A idéia do método de Gauss consiste em trabalhar sobre a equação matricial 3.1 de forma a triangularizar a matriz A. Isto tem que ser feito de forma que não modifique a equação matricial, respeitando-se as propriedades das matrizes.

Para tanto lança-se mão do quadro a seguir :

[LINHA]	X1	X2	X3	C	
[1]	2	2	4	18	
[2]	1	3	2	13	
[3]	3	1	3	14	
[4]	1	1	2	9	[1] / a11 = [1] / 2
[5]	0	2	0	4	[2] - a21 [4] = 2 - 1 [4]
[6]	0	-2	-3	-13	[3] - a31 [4] = [3] - 3 [4]
[7]	0	1	0	2	[5] / a22 = [5] / 2
[8]	0	0	-3	-9	[6] - a32 [7] = [6] + 2 [7]

Da linha [8] temos : $0 X1 + 0 X2 - 3 X3 = -9$ que nos fornece o valor de $X3 = 3$.

Da linha [7] temos : $0 X1 + 1 X2 + 0 X3 = 2$ portanto $X2 = 2$.

Da linha [4] temos : $1 X1 + 1 X2 + 2 X3 = 9$; $1.X1 + 1.2 + 2.3 = 9$ portanto $X1 = 1$.

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Devemos observar que todas operações efetuadas não alteraram a equação matricial . O leitor deve tentar construir o quadro para resolução de um sistema 4x4.

3.3.1 Segundo exemplo:

Resolver o sistema:

$$5X_1 + 2X_2 - X_3 = 14$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 5$$

$$X_1 - 2X_2 + 4X_3 = -8$$

[LINHA]	X ₁	X ₂	X ₃	C	
[1]	5	2	-1	14	
[2]	2	3	1	5	
[3]	1	-2	4	-8	
[4]	1	2/5	-1/5	14/5	[1] / a ₁₁ = [1] / 5
[5]	0	11/5	7/5	-3/5	[2] - a ₂₁ [4] = [2] - 2 [4]
[6]	0	-12/5	21/5	-54/5	[3] - a ₃₁ [4] = [3] - 1 [4]
[7]	0	1	7/11	-3/11	[5] / a ₂₂ = [5] / 11/5
[8]	0	0	315 / 55 - 630 / 55		[6] - a ₃₂ [7] = 6 + 12/5 [7]

Da linha [8] temos : $0 X_1 + 0 X_2 + 315 / 55 X_3 = -630 / 55$ que nos fornece o valor de $X_3 = -2$.

Da linha [7] temos : $0 X_1 + 1 X_2 + 7 / 11(-2) = -3 / 11$; portanto $X_2 = 1$.

Da linha [4] temos : $1 X_1 + 2 / 5 (1) - 1 / 5(-2) = 14 / 5$; portanto $X_1 = 2$.

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3.4 MÉTODO INTERATIVO DE GAUSS SEIDEL

Seja o seguinte sistema :

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \dots + a_{1n} X_n = C_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + \dots + a_{2n} X_n = C_2$$

.....3.2

$$a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + \dots + a_{nn}X_n = C_n$$

o qual pode ser rescrito na forma :

$$X_1 = K_1 - b_{12} X_2 - b_{13} X_3 - \dots - b_{1n} X_n$$

$$X_2 = K_2 - b_{21} X_1 - b_{23} X_3 - \dots - b_{2n} X_n$$

.....

$$X_n = K_n - b_{n1} X_1 - b_{n2} X_2 - \dots - b_{n,n-1} X_{n-1}$$

onde :

$$K_i = C_i / a_{ii} ; \quad b_{ij} = a_{ij} / a_{ii}$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, n$ $j = 1, 2, 3, \dots, n$

Adotando-se em aproximação inicial para valor zero, temos :

$$(x_1)^{(0)} = (x_2)^{(0)} = (x_3)^{(0)} = (x_4)^{(0)} = \dots = (x_n)^{(0)} = 0$$

Vem para a primeira aproximação :

$$\begin{aligned} (x_1)^{(1)} &= K_1 - b_{12} (x_2)^{(0)} - b_{13} (x_3)^{(0)} - \dots - b_{1n} (x_n)^{(0)} \\ (x_2)^{(1)} &= K_2 - b_{21} (x_1)^{(1)} - b_{23} (x_3)^{(0)} - \dots - b_{2n} (x_n)^{(0)} \\ &\dots\dots\dots \\ (x_n)^{(1)} &= K_n - b_{n1} (x_1)^{(1)} - b_{n2} (x_2)^{(1)} - \dots - b_{n,n-1} (x_{n-1})^{(1)} \end{aligned}$$

E numa aproximação r+1 tem-se :

$$\begin{aligned} (x_1)^{(r+1)} &= K_1 - b_{12} (x_2)^{(r)} - b_{13} (x_3)^{(r)} - \dots - b_{1n} (x_n)^{(r)} \\ (x_2)^{(r+1)} &= K_2 - b_{21} (x_1)^{(r+1)} - b_{23} (x_3)^{(r)} - \dots - b_{2n} (x_n)^{(r)} \\ &\dots\dots\dots \\ (x_n)^{(r+1)} &= K_n - b_{n1} (x_1)^{(r+1)} - b_{n2} (x_2)^{(r+1)} - \dots - b_{n,n-1} (x_{n-1})^{(r+1)} \end{aligned}$$

O processo é interrompido quando a precisão requerida para as incógnitas for atingida. Isto é controlado via de regra pelos resíduos.

Observação: Uma condição para que o método de Gauss Seidel convirja (reportando-se ao sistema 3.2 original) é que:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{ij}| \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Tais sistemas são chamados de sistemas com diagonal "predominante".

3.4.1 Primeiro Exemplo de Aplicação do Método de Gauss Seidel

Resolver o sistema:

$$10 x_1 + 2 x_2 + x_3 = 9$$

$$2 x_1 + 20 x_2 - 2 x_3 = -44$$

$$-2 x_1 + 3 x_2 + 10 x_3 = 22 \quad (\text{resíduo permissível} = 0,1)$$

Que rescrito de uma maneira mais adequada para o método de G.S. fica:

$$x_1 = 0,9 - 0,2 x_2 - 0,1 x_3$$

$$x_2 = -2,2 - 0,1 x_1 + 0,1 x_3$$

$$x_3 = 2,2 + 0,2 x_1 - 0,3 x_2$$

Fazendo-se em aproximação inicial:

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

Temos para a 1a. aproximação os valores

$$x_1^{(1)} = 0,9$$

$$x_2^{(1)} = -2,2 - 0,1(0,9) = -2,29$$

$$x_3^{(1)} = 2,2 + 0,2(0,9) - 0,3(-2,29) = 3,07$$

Em 2a. aproximação temos:

$$x_1^{(2)} = 0,9 - 0,2(-2,29) - 0,1(3,07) = 1,05$$

$$x_2^{(2)} = -2,2 - 0,1(1,05) + 0,1(3,07) = -2,00$$

$$x_3^{(2)} = 2,2 + 0,2(1,05) - 0,3(-2) = 3,01$$

Em 3a. aproximação temos:

$$x_1^{(3)} = 0,9 - 0,2(-2) - 0,1(3,01) = 1,00$$

$$x_2^{(3)} = -2,2 - 0,1(1) + 0,1(3,01) = -2,00$$

$$x_3^{(3)} = 2,2 + 0,2(1) - 0,3(-2) = 3,00$$

Então na precisão requerida podemos fornecer o vetor resposta:

$$X = \begin{pmatrix} 1,00 \\ -2,00 \\ 3,00 \end{pmatrix}$$

3.4.2 Segundo Exemplo de Aplicação do método de Gauss Seidel

Resolver o sistema abaixo com um erro permissível de 0,001.

$$10 x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

$$2 x_1 + 10 x_2 + x_3 = 13$$

$$2 x_1 + 2 x_2 + 10 x_3 = 14$$

Que rescrito de uma maneira mais adequada, fica:

$$x_1 = 1,2 - 0,1 x_2 - 0,1 x_3$$

$$x_2 = 1,3 - 0,2 x_1 - 0,1 x_3$$

$$x_3 = 1,4 - 0,2 x_1 - 0,2 x_2$$

Fazendo em aproximação inicial :

$$(x_1)^{(0)} = (x_2)^{(0)} = (x_3)^{(0)} = 0$$

Temos para 1ª. aproximação das incógnitas :

$$(x_1)^{(1)} = 1,2 - 0,1(0) - 0,1(0) = 1,2$$

$$(x_2)^{(1)} = 1,3 - 0,2(1,2) - 0,1(0) = 1,06$$

$$(x_3)^{(1)} = 1,4 - 0,2(1,2) - 0,2(1,06) = 0,948$$

Em 2ª aproximação temos :

$$(x_1)^{(2)} = 1,2 - 0,1(1,06) - 0,1(0,948) = 0,9992$$

$$(x_2)^{(2)} = 1,3 - 0,2(0,9992) - 0,1(0,948) = 1,005$$

$$(x_3)^{(2)} = 1,4 - 0,2(0,9992) - 0,2(1,005) = 0,9992$$

Em 3ª aproximação temos :

$$(x_1)^{(3)} = 1,2 - 0,1(1,005) - 0,1(0,9992) = 0,9996$$

$$(x_2)^{(3)} = 1,3 - 0,2(0,9996) - 0,1(0,9992) = 1,000$$

$$(x_3)^{(3)} = 1,4 - 0,2(0,9996) - 0,2(1,000) = 1,000$$

Em 4ª aproximação temos :

$$(x_1)^{(4)} = 1,2 - 0,1(1,000) - 0,1(1,000) = 1,000$$

$$(x_2)^{(4)} = 1,3 - 0,2(1,000) - 0,1(1,000) = 1,000$$

$$(x_3)^{(4)} = 1,4 - 0,2(1,000) - 0,2(1,000) = 1,000$$

Portanto temos para o vetor resposta :

$$X_1 = 1,000 \quad X_2 = 1,000 \quad \text{e} \quad X_3 = 1,000$$

3.5 INVERSÃO DE MATRIZES PELO MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

A partir da relação já vista que $A \cdot A^{-1} = I$, isto é o produto de uma matriz A por sua inversa resulta na matriz identidade, podemos aplicar o método da eliminação também para inversão de matriz.

Seja por exemplo a matriz :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Utilizando o esquema já visto teríamos :

[LINHA]	X_1	X_2	X_3	C_1	C_2	C_3	
[1]	2	2	4	1	0	0	
[2]	1	3	2	0	1	0	
[3]	3	1	3	0	0	1	
[4]	1	1	2	1/2	0	0	[1] / a_{11} = [1] / 2
[5]	0	2	0	-1/2	1	0	[2] - a_{21} [4] = 2 - [4]
[6]	0	-2	-3	-3/2	0	1	[3] - a_{31} [4] = [3] - 3 [4]
[7]	0	1	0	-1/4	1/2	0	[5] / a_{22} = [5] / 2
[8]	1	0	2	3/4	-1/2	0	[4] - a_{12} [7] = [4] - [7]
[9]	0	0	-3	-2	1	1	[6] - a_{32} [7] = [6] + 2 [7]
[10]	0	0	1	2/3	-1/3	-1/3	[9] / a_{33} [9] / (-3)
[11]	0	1	0	-1/4	1/2	0	[7] - a_{13} [10] = [7] - 0 [10]
[12]	1	0	0	-7/12	1/6	2/3	[8] - a_{23} [10] = [8] - 2 [10]

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/12 & 1/6 & 2/3 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

3.5.1 Segundo Exemplo de Inversão de Matrizes pelo Método da Eliminação

Inverter a Matriz :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

[LINHA]	X1	X2	X3	C1	C2	C3	
[1]	2	4	6	1	0	0	
[2]	-1	2	4	0	1	0	
[3]	2	3	1	0	0	1	
[4]	1	2	3	1/2	0	0	[1] / a ₁₁ = [1] / 2
[5]	0	4	7	1/2	1	0	[2] - a ₂₁ [4] = [2] + [4]
[6]	0	-1	-5	-1	0	1	[3] - a ₃₁ [4] = [3] - 2 [4]
[7]	0	1	7/4	1/8	1/4	0	[5] / a ₂₂ = [5] / 4
[8]	1	0	-1/2	1/4	-1/2	0	[4] - a ₁₂ [7] = [4] - 2 [7]
[9]	0	0	-13/4	-7/8	1/4	1	[6] - a ₃₂ [7] = [6] + [7]
[10]	0	0	1	7/26	-1/13	-4/13	[9] / a ₃₃ = [9] / (-13/4)
[11]	0	1	0	-9/26	5/13	7/13	[7] - a ₁₃ [10] = [7] - 7/4 [10]
[12]	1	0	0	5/13	-7/13	-2/13	[8] - a ₂₃ [10] = [8] + 1/2 [10]

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/13 & -7/13 & -2/13 \\ -9/26 & 5/13 & 7/13 \\ 7/26 & -1/13 & -4/13 \end{pmatrix}$$

Observação : Uma verificação dos resultados consiste em multiplicar A por A⁻¹ e verificarmos se resulta a Matriz Unitária.

3.6 AUTO VALORES E AUTO VETORES

Já foi visto que um sistema de equações algébricas lineares e simultâneas pode ser representado pela equação matricial:

$$A X=Y$$

... 3.3

Assim dado um vetor X e aplicado sobre ele a matriz A obtêm-se um novo vetor Y, o qual tem módulo e direção diferente de X.

É natural então a pergunta: fixado uma matriz A existirá X , tal que A aplicado sobre X resulta em Y paralelo à X ? Isto é:

$$A X = \lambda X$$

onde λ é um escalar

ou:

$$\lambda X - AX = (\lambda I - A) X = 0 \quad \dots 3.4$$

onde I é a matriz unitária.

Da teoria das equações verifica-se que só existe solução não trivial para X se:

$$\det (\lambda I - A) = 0$$

Este determinante é chamado determinante característico, e a sua expansão fornece a equação característica de A .

A equação característica é um polinômio de grau n , em cujas n raízes são chamadas "**raízes características ou autovalores**" da matriz A .

Para cada auto valor λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) podemos escrever:

$$(\lambda_i I - A) X_i = 0 \quad \dots 3.5$$

O vetor X_i obtido é chamado "vetor característico" da i -ésima raiz ou "auto vetor associado ao i -ésimo auto-valor".

Basicamente, embora existam métodos especiais, a determinação dos auto valores de uma matriz consiste em determinar-se as raízes de uma equação Polinomial.

3.6.1 Primeiro exemplo de determinação de auto valores e auto vetores

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -44 & -15 \end{pmatrix}$$

1º Passo: Subtrai-se λ dos elementos da diagonal principal e iguala-se o determinante a zero.

Com isso encontra-se a equação característica.

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ -44 & -15-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 15\lambda + 44 = 0$$

2º Passo: Resolva-se a equação característica.

$$\lambda_1 = -4 \text{ e } \lambda_2 = -11$$

3º Passo: Substitui-se os auto valores na relação 3.5 e determina-se os correspondentes auto vetores inicialmente com $\lambda_1 = -4$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -44 & -11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 4 X_1 + X_2 &= 0 \\ -44 X_1 - 11 X_2 &= 0 \end{aligned}$$

Em qualquer uma das equações se fizermos $X_2 = 1$

$$X_1 = -1/4$$

Portanto:

$$X = \begin{vmatrix} -1/4 \\ 1 \end{vmatrix} \quad 1^\circ \text{ auto vetor}$$

E finalmente com $\lambda_2 = -11$

$$\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ -44 & -11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 11 X_1 + X_2 &= 0 \\ -44 X_1 - 11 X_2 &= 0 \end{aligned}$$

Em qualquer uma das equações se fizermos $X_2 = 1 \Rightarrow X_1 = -1/11$

Portanto:

$$X = \begin{vmatrix} -1/11 \\ 1 \end{vmatrix} \quad 2^\circ \text{ auto vetor}$$

3.6.2 Segundo exemplo de determinação de auto valores e auto vetores.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

1º Passo:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} (1-\lambda)(4-\lambda) + 4 &= 0 \\ \lambda^2 + 15\lambda + 44 &= 0 \end{aligned}$$

2º Passo:

$$\lambda_1 = (5 - (7)^{0,5} i) / 2 \qquad \lambda_2 = (5 + (7)^{0,5} i) / 2$$

3º Passo:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{5 - i(7)^{0,5}}{2} & 2 \\ -2 & 4 - \frac{5 - i(7)^{0,5}}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{5 - i(7)^{0,5}}{2} \right] X_1 + 2 X_2 &= 0 \\ -2X_1 + \left[4 - \frac{5 - i(7)^{0,5}}{2} \right] X_2 &= 0 \end{aligned}$$

Em qualquer uma das equações fazendo $X_2 = 1$ vem:

$$\left(1 - \frac{5 - i(7)^{0,5}}{2} \right) X_1 = -2$$

$$\text{portanto } X_1 = \frac{3 + i(7)^{0,5}}{4}$$

Logo temos para 1º auto vetor:

$$X = \begin{vmatrix} \frac{3 + i(7)^{0,5}}{4} \\ 1 \end{vmatrix} \quad 1^\circ \text{ auto vetor}$$

Com o 2º auto valor temos:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{5+i(7)^{0,5}}{2} & 2 \\ -2 & 4 - \frac{5+i(7)^{0,5}}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1 - \frac{5+i(7)^{0,5}}{2}\right] X_1 - 2 X_2 = 0$$

$$-2 X_1 + \left[4 - \frac{5+i(7)^{0,5}}{2}\right] X_2 = 0$$

Fazendo $x_2 = 1$, vem:

$$2 - \frac{5+i(7)^{0,5}}{2} X_1 + 2 = 0$$

Portanto: $x_1 = \frac{3 - i(7)^{0,5}}{4}$

E temos para o 2º auto vetor:

$$X = \begin{vmatrix} \frac{3 - i(7)^{0,5}}{4} \\ 1 \end{vmatrix} \quad 2^\circ \text{ auto vetor}$$

1

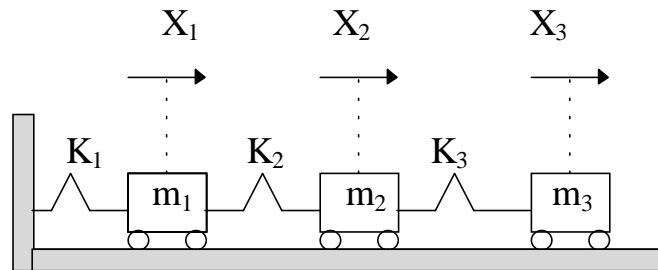
Do exemplo podemos observar que não necessariamente os auto - valores e auto vetores devem ser número reais.

Uma verificação da exatidão dos auto vetores é feita multiplicando-se a matriz A original pelo auto vetor encontrado, o resultado tem que ser um vetor paralelo ao auto vetor.

Então temos como condição para aplicação do método de N. R. que $F'(x)$ e $F''(x)$ não mudem de sinal no intervalo $[a,b]$.

3.6.3 Exemplo de um problema de Mecânica, solucionando determinando-se os valores e auto vetores.

O esquema abaixo mostra um sistema mecânico composto por 3 corpos rígidos de massas m_1 , m_2 , m_3 ligados por molas com constantes k_1 , k_2 , e k_3 , sendo que a extremidade da primeira é fixa. O atrito horizontal é desprezado. O sistema tem 3 graus de liberdade e deseja-se determinar as frequências naturais e os modos de vibrar do sistema.



Partindo da suposição que a configuração do sistema pode ser definida pelos deslocamentos X_1 , X_2 e X_3 , temos as seguintes equações do movimento:

$$m_1 \ddot{x}_1 = k_2 (x_2 - x_1) - k_1 x_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_3 (x_3 - x_2) - k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = k_3 (x_3 - x_2)$$

Se alguma perturbação instantânea e externa atuar no sistema, os corpos sairão de sua posição de equilíbrio estático e vibrarão em uma das frequências naturais do sistema. (ω).

As acelerações e os deslocamentos são relacionados por:

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1$$

Então as equações de movimento podem ser re arrançadas e na forma matricial teremos:

$$\begin{vmatrix} (K_1 + K_2) / m_1 & -K_2 / m_1 & 0 \\ -K_2 / m_2 & (K_2 + K_3) / m_2 & -K_3 / m_2 \\ 0 & -K_3 / m_3 & K_3 / m_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \frac{W^2 m}{K} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix}$$

Como W é um escalar temos que o problema é exatamente um problema de auto valores e auto vetores.

Se na equação matricial acima fizermos $m_1 = 4m$; $m_2 = 2m$; $m_3 = m$; $K_1 = K$; $K_2 = K$ e $K_3 = \frac{1}{2} K$. Então as 3 frequências naturais são encontradas em termos de **K** e **m**.

A equação matricial então fica:

$$\begin{vmatrix} 0,5 & -0,25 & 0 \\ -0,5 & 0,75 & -0,25 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \frac{W^2 m}{K} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix}$$

Para um particular auto valor da matriz acima a frequência natural pode ser obtida pela relação:

$$W = (\lambda K / m)^{1/2}$$

Determinando-se os auto valores e os correspondentes auto vetores temos:

λ	X_1	X_2	X_3
1,140	-0,391	1,000	-0,780
0,500	-0,500	0,000	1,000
0,110	0,500	0,781	1,000

Em correspondência aos auto valores determinados temos as frequências naturais:

$$W_1 = 1,068 \text{ (K/m)}^{0,5} ; \quad W_2 = 0,707 \text{ (K/m)}^{0,5} ; \quad W_3 = 0,332 \text{ (K/m)}^{0,5}$$

Os auto vetores definem os "modos de vibrar" do sistema. Assim por exemplo no segundo modo a massa m_2 permanece parada enquanto m_3 vibra fora de fase com a massa m_1 e com o dobro da amplitude.

" Se você suportou até aqui, meus parabéns, pois meio caminho já foi cumprido."

CAPÍTULO IV

DESENVOLVIMENTO DE FUNÇÕES EM SÉRIE DE POTÊNCIAS

4.1 - SÉRIES DE TAYLOR

Suponhamos que a função $y = f(x)$ tenha todas as derivadas até a ordem $n+1$ no ponto a . Vamos encontrar um polinômio $y = P_n(x)$ tal que:

$$P_n(a) = f(a) ; P'_n(a) = f'(a) ; P''_n(a) = f''(a) \quad \dots \quad P^{(n)}_n(a) = f^{(n)}(a)$$

Se:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \dots + C_n(x-a)^n \quad \dots A$$

Então basta determinarmos os coeficientes C_i do polinômio.

$$P'_n(x) = C_1 + 2 C_2(x-a) + 3 C_3(x-a)^2 + \dots + n C_n(x-a)^{n-1}$$

$$P''_n(x) = 2 C_2 + 3(2)C_3(x-a) + \dots + n(n-1) C_n(x-a)^{n-2} \quad \dots B$$

$$P^{(n)}_n(x) = n(n-1) \dots 2.1 C_n$$

Substituindo-se em A e B o valor de x por a vem :

$$f(a) = C_0$$

$$f'(a) = C_1$$

$$f''(a) = 2(1) C_2$$

$$f'''(a) = 3(2)(1) C_3$$

.....

$$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2) \dots 2(1) C_n = n! C_n$$

Então:

$$C_0 = f(a) ; C_1 = f'(a) ; C_2 = (1 f''(a)) / (1)(2) ; C_3 = (f'''(a)) / ((1)(2)(3)) ; C_n = f^{(n)}(a) / n!$$

E numa vizinhança do ponto a , temos:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a) f'(a)}{1!} + \frac{(x-a)^2 f''(a)}{2!} + \dots + \frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!}$$

que constitui a chamada fórmula de Taylor, a que também é apresentada numa forma compactada:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

... 4.1

4.2 Séries de Mac Laurin

Se na fórmula de Taylor impormos que $a = 0$, temos a chamada fórmula de Mac Laurin.

$$f(x) = f(0) + \frac{x f'(0)}{1!} + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \dots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!}$$

Numa forma compactada:

... 4.2

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) x^n}{n!}$$

... 4.2

4.2.1 Primeiro Exemplo

Desenvolver em série de Mac-Laurin a função $f(x) = e^x$

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \end{array}$$

Valores que substituídos na relação 4.2 nos fornece:

$$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + \dots + x^n/n! \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Observação: Como já foi ressaltado no início do curso se podemos tomar de série de potências um número FINITO de termos.

Calculemos $e^{0,1}$ segundo sua série de Mac-Laurin considerando-se os 3 primeiros termos apenas:

$$e^{0,1} = 1 + 0,1 / 1 + 0,1^2 / 2 = 1,105 \quad , \text{ valor que apresenta um erro de truncamento da ordem de } 0,0002.$$

Se considerarmos os 4 primeiros termos da série naturalmente o erro deve diminuir:

$$e^{0,1} = 1 + 0,1/1 + 0,1^2 / 2! + 0,1^3 / 3! = 1,10517, \text{ valor que apresenta um erro da ordem de } 0,000001.$$

Uma diretriz então para atenuar os erros de truncamento é trabalhar-se com o número maior de termos possível.

Seja o cálculo de $e^{0,2}$ considerando-se os 4 primeiros termos de sua série de Mac-Laurin:

$$e^{0,2} = 1 + 0,2/1 + 0,2^2 / 2 + 0,2^3 / 6 = 1,2213, \text{ valor que apresenta um erro da ordem de } 0,0001.$$

Notamos então que à medida que nos afastamos da vizinhança do ponto em que a função foi desenvolvida o erro aumenta.

4.2.2 Segundo Exemplo

Desenvolver a função $f(x) = \sin(x)$ em série de Mac-Laurin.

$f(x) = \sin(x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos(x)$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin(x)$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos(x)$	$f'''(x) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin(x)$	$f^{(4)}(x) = 0$
.....	

$$\text{Portanto: } \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots +$$

Para funções trigonométricas, devemos ter o argumento x em radianos.

Calculemos então o seno de 0,15 radianos, considerando-se apenas os 2 primeiros termos de uma série de Mc'Laurin.

$$\text{Sen}(0,15) = 0,15 - 0,15^3 / 6 = 0,14944$$

É interessante notar que numa série alternada o erro de truncamento cometido é sempre menor que o primeiro termo desprezado.

Então no cálculo anterior do seno de 0,15 radianos o limite superior do erro de truncamento é:

$0,15^5 / 120 = 0,0000006$ que corresponde ao 1º termo desprezado. O leitor deve tentar deduzir a série de Mc'Laurin do cosseno, a qual deve resultar numa série de potências pares.

4.2.3 Terceiro Exemplo

Desenvolver em série de Mac-Laurin a função $f(x)=\ln(1+x)$.

$$f(x) = \ln(1+x) \rightarrow f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = (1+x)^{-1} \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = (1+x)^{-2} \rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \rightarrow f'''(0) = 2$$

.....

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

Então para o cálculo de $\ln(1,17)$ com três termos da série temos:

$$\ln(1,17) = 0,17 - \frac{0,17^2}{2} + \frac{0,17^3}{3} = 0,1572 \text{ que deve ter um erro de truncamento menor}$$

$$\text{que } 0,17^4 / 4 = 0,00021.$$

CAPÍTULO V

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

5.1 INTRODUÇÃO

É sabido dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral que para resolvermos o problema de integração de uma função $f(x)$ de a até b , basta determinar-se a primitiva de função e executar a diferença desta nos extremos:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Então é natural a pergunta: Por que estudarmos em outra disciplina o problema de integrais definidas?

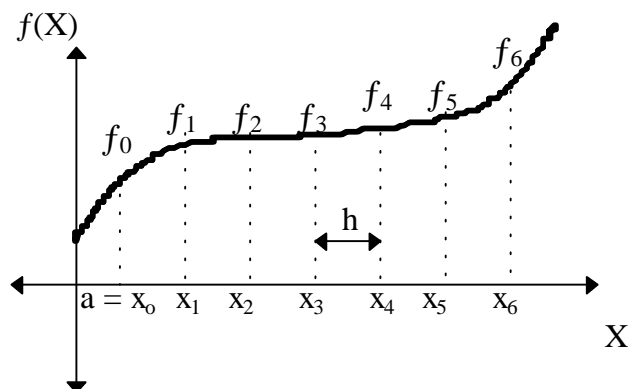
Temos duas respostas:

- 1.a) É comum não ser possível determinar-se a primitiva $f(x)$.
- 2.a) Muitas vezes não temos a fórmula analítica de $f(x)$, conhecendo-se apenas os valores de $f(x)$ em alguns pontos, e assim mesmo é requerida a integral definida de $f(x)$.

Para esses dois casos então lança-se mão dos processos aproximados de Cálculo Numérico. Deve-se ter em mente que quando existir a solução analítica exata esta deve ter preferência.

5.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PELA REGRA DOS TRAPÉZIOS

A integral definida é aproximada por uma somatória de áreas de trapézios, conforme figura a seguir:



Então temos:

a

$$\int f(x) dx \cong I = h(f_0 + f_1) / 2 + h(f_1 + f_2) / 2 + h(f_2 + f_3) / 2 + h(f_3 + f_4) / 2 + h(f_5 + f_6) / 2$$

b

$$I_T = h (f_0/2 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 / 2)$$

Generalizando:

$$I_T = h (f_0/2 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + f_n / 2)$$

... 5.2

5.2.1 Exemplo

Integrar a função tabelada abaixo de 0 a 0,6 com $h = 0,2$

i	0	1	2	3
x_i	0,0	0,2	0,4	0,6
f_i	1,000	1,221	1,492	1,822

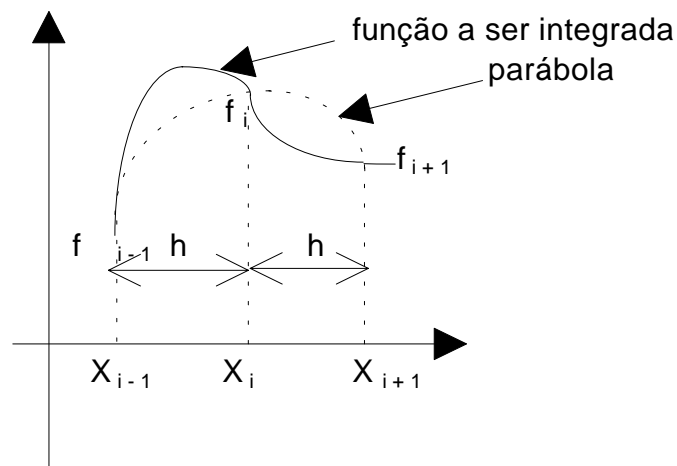
Aplicando então a fórmula 5.2, temos:

$$I_T = 0,2 (1,000 / 2 + 1,221 + 1,492 + 1,822 / 2) = 0,8248$$

Deve-se observar que o valor da integral definida de uma função foi estimado sem conhecermos a fórmula analítica da função!

5.3 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PELO MÉTODO DE SIMPSON

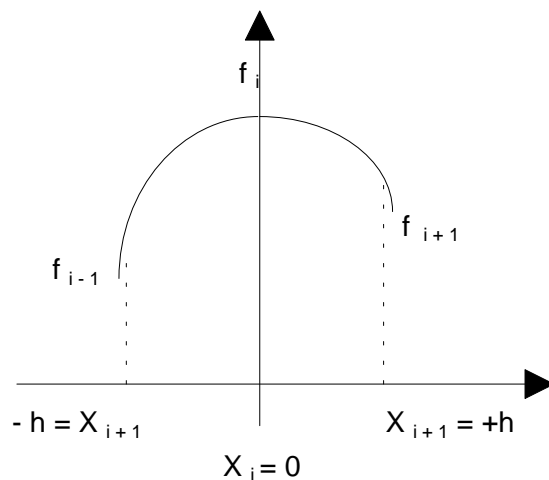
No método dos trapézios por cada 2 pontos foi passado um segmento de reta, no método de Simpson passaremos por cada 3 pontos, arcs de parábolas e faremos a integração dos mesmos.



Como a expressão analítica da parábola que passa por cada três pontos é :

$$y(x) = A X^2 + B X + C \quad \dots 5.3$$

problema não é particularizado se imaginarmos que para cada trinca de pontos pivôs impusermos que o intermediário é coincidente com a origem, mas a dedução simplifica sobremaneira. Assim temos :



$$\text{Então } \int_{-h}^{+h} y(X) dx = A/3 (2h^3) + C (2h) \quad \dots 5.3.b$$

Portanto precisamos apenas determinar A e C .

Reportando-se a função definida pela fórmula 5.3, temos:

$$\text{para } x = -h \rightarrow f_{i-1} = A h^2 - B h + C \quad \dots \quad 5.4$$

$$\text{para } x = +h \rightarrow f_{i+1} = A h^2 + B h + C \quad \dots \quad 5.5$$

$$\text{para } x = 0 \rightarrow f_i = A 0^2 + B 0 + C \quad \dots \quad 5.6$$

Portanto de 5.6 temos que: $C = f_i$ e somando 5.4 com 5.5, vem:

$$A = (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) / (2 h^2)$$

Substituindo-se esses valores em 5.3.b temos:

$$\int_{-h}^{+h} Y(x) dx = h/3 (f_{i+1} + 4 f_i + f_{i-1})$$

Generalizando temos:

$$\int_{-h}^{+h} Y(x) dx = h/3 (f_0 + 4 f_1 + 2 f_2 + \dots + 2 f_{n-2} + 4 f_{n-1} + f_n)$$

onde n tem que ser par!

5.3.1 Exemplo

Integrar a função tabelada abaixo de 0 a 0,8 com $h = 0,2$ pela fórmula de Simpson:

i	0	1	2	3	4
x i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
f i	1,000	1,221	1,492	1,822	2,225

Notando que $n = 4$ é par, temos:

$$I = 0,2 / 3 (1,000 + 4 (1,221 + 1,822) + 2 (1,492) + 2,225) \rightarrow I = 1,225$$

Observação: Percebendo que a função tabelada acima é função $y(x) = e^x$, que tem sua integral analítica, podemos comparar o resultado exato (analítico), com o resultado aproximado fornecido pela fórmula de Simpson.

$$\int_0^{0,8} e^x dx = e^x \Big|_0^{0,8} = e^{0,8} - e^0 = 2,225 = 1,225$$

5.3.2 Segundo exemplo de aplicação da fórmula de Simpson

Integrar pelo método de Simpson de 0 a 1, com $h = 0,1$ a função tabelada abaixo:

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
f_i	1,000	0,909	0,833	0,769	0,714	0,667	0,625
i	7	8	9	10			
x_i	0,7	0,8	0,9	1,0			
f_i	0,588	0,555	0,626	0,500			

Caso no caso $n = 10$ podemos aplicar o método de Simpson.

$$I = 0,1/3 (1,000 + 4 (0,909 + 0,769 + 0,667 + 0,588 + 0,526 + 2 (0,833 + 0,714 + 0,625 + 0,555) + 0,500) = 0,693$$

Observação: Percebendo que a função tabelada acima é a função $y(x) = 1 / (1+x)$, e como ela admite integral analítica, podemos comparar os resultados:

$$\int_0^{1,0} \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^{1,0} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0,693$$

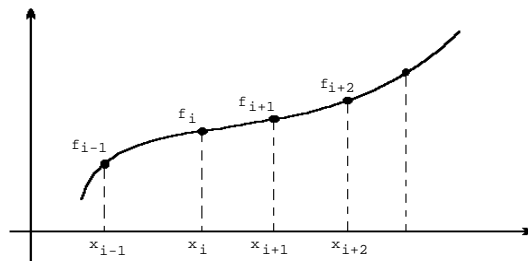
Capítulo VI

Diferenciação Numérica

6.1 INTRODUÇÃO

Se os pontos pivos estiverem uniformemente espaçados ao longo do eixo dos x , podemos escrever para um ponto pivô x_j qualquer:

$$x_j = x_i + m.h, \text{ onde } m \text{ é um inteiro}$$



Recorrendo-se à fórmula 4.1 da série de Taylor, observando-se que se particularizarmos a por x_i temos que $x - a = m.h$, e teremos:

$$f_j = f(x_i \pm mh) = f_i \pm mhf'_i + \frac{(mh)^2}{2!} f''_i \pm \frac{(mh)^3}{3!} f'''_i \dots 6.1$$

Todas as deduções desse capítulo se basearão na relação acima.

6.1.1 Fórmula de 2 pontos para a 1ª derivada

Tomando-se 2 pontos pivos contínuos, isto é fazendo-se na relação 6.1, mal temos:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \left(\frac{h}{2} f''_i + \frac{h^2}{6} f'''_i + \dots \right)$$

Desprezando os termos entre parênteses temos a fórmula de 2 pontos para a derivada primeira:

$$f'_i = 1/h (f_{i+1} - f_i) \quad \dots 6.1.1$$

Com um erro proporcional a h.

6.1.2 Fórmula de 3 pontos para a 2ª derivada

Se fizermos na relação 6.1, $m = 1$ e $m = -1$ teremos:

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + h f'_i + h^2 f''_i/2 + h^3 f'''_i/3 + \dots \\ f_{i-1} &= f_i - h f'_i + h^2 f''_i/2 - h^3 f'''_i/3 + \dots \end{aligned}$$

Relações que somadas membro a membro, agrupadas convenientemente e desprezando-se os termos de ordem superior, nos fornece a fórmula de 3 pontos da 2ª. derivada.

$$f''_i = 1/h^2 (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \quad \dots 6.1.2$$

Com um erro proporcional a h^2 .

6.1.3 Fórmula de 4 pontos para a 1ª. derivada

Com um raciocínio análogo ao das deduções anteriores temos :

$$f'_i = 1/6 h (-11 f_i + 18 f_{i+1} - 9 f_{i+2} + 2 f_{i+3})$$

Com um erro proporcional a h^3 .

6.1.4 Fórmula de 5 pontos para a 2ª derivada

Finalizando :

$$f''_i = 1/12 h^2 (11 f_{i-1} - 20 f_i + 6 f_{i+1} + 4 f_{i+2} - f_{i+3})$$

Com um erro proporcional a h^3 .

Observação : Poderíamos deduzir uma grande quantidade de fórmulas de diferenciação numérica, mas para a maioria das aplicações as 4 fórmulas acima são suficientes.

6.2 EXEMPLO

Seja a seguinte tabela de uma função qualquer :

X	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
f(X)	1,0000	1,105171	1,221403	1,349859	1,491825	1,648721

Calcular :

a) A primeira derivada para $x = 0$ pela fórmula de 2 pontos.

$$X_i = 0,0 \quad f_i = 1,000000$$

$$X_{i+1} = 0,1 \quad f_{i+1} = 1,105171 \quad h = 0,1$$

$$f'_i = [f_{i+1} - f_i] / h = [1,105171 - 1,000000] / 0,10 = 1,05171$$

b) A segunda derivada para $x = 0,1$ pela fórmula de 3 pontos

$$X_i = 0,1 \quad f_i = 1,105171$$

$$X_{i-1} = 0,0 \quad f_{i-1} = 1,000000$$

$$X_{i+1} = 0,2 \quad f_{i+1} = 1,221403 \quad h = 0,1$$

$$f''_i = 1 / h^2 (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) = 1 / 0,1^2 (1,221403 - 2 \cdot 1,105171 + 1,000000) = 1,1061$$

c) Calcular a primeira derivada para $X = 0,2$ pela fórmula de 4 pontos :

$$X_i = 0,2 \quad f_i = 1,221403$$

$$X_{i+1} = 0,3 \quad f_{i+1} = 1,349859$$

$$X_{i+2} = 0,4 \quad f_{i+2} = 1,491825$$

$$X_{i+3} = 0,5 \quad f_{i+3} = 1,648721 \quad h = 0,1$$

$$f'_i = 1 / 6h (-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3})$$

$$f'_i = 1 / 6 \cdot 0,10 (-11 \cdot 1,221403 + 18 \cdot 1,349859 - 9 \cdot 1,491825 + 2 \cdot 1,648721)$$

$$f'_i = 1,221743$$

d) Calcular $f''(x)$ para $x = 0,1$ pela fórmula de 5 pontos

$$\begin{aligned}
 X_i &= 0,1 & f_i &= 1,105171 \\
 X_{i-1} &= 0,0 & f_{i-1} &= 1,000000 \\
 X_{i+1} &= 0,2 & f_{i+1} &= 1,221403 \\
 X_{i+2} &= 0,3 & f_{i+2} &= 1,349859 \\
 X_{i+3} &= 0,4 & f_{i+3} &= 1,491825
 \end{aligned}$$

$$f''_i = 1 / 12 h^2 (11 f_{i-1} - 20 f_i + 6 f_{i+1} + 4 f_{i+2} - f_{i+3})$$

$$f''_i = 1 / 12 \cdot 0,1^2 (11 (1) - 20 (1,105171) + 6 (1,221403) + 4 (1,349859) - 1,491825) = 1,105075$$

Observação : Notando que os valores tabelados no enunciado são da função e^x , é fácil de comparar os valores aproximados das diferenciais com os valores exatos (analíticos).

6.3 - SEGUNDO EXEMPLO

Seja a função tabelada abaixo :

X	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
f (X)	0,00	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25

Calcular :

a) A primeira derivada pela fórmula de 2 pontos para $X = 0,1$

$$\begin{aligned}
 X_i &= 0,1 & f_i &= 0,01 \\
 X_{i+1} &= 0,2 & f_{i+1} &= 0,04 & h &= 0,1 \\
 f'_i &= [f_{i+1} - f_i] / h = (0,04 - 0,01) / 0,1 = 0,3
 \end{aligned}$$

b) A primeira derivada para $X = 0,1$ pela fórmula de 4 pontos

$$\begin{aligned}
 X_i &= 0,1 & f_i &= 0,01 \\
 X_{i+1} &= 0,2 & f_{i+1} &= 0,04 \\
 X_{i+2} &= 0,3 & f_{i+2} &= 0,09 \\
 X_{i+3} &= 0,4 & f_{i+3} &= 0,16 & h &= 0,1
 \end{aligned}$$

$$f' = 1 / [6 (0,1)] (-11 (0,01) + 18 (0,04) - 9 (0,09) + 2 (0,16)) = 0,2$$

c) Calcular a 2ª derivada para $X = 0,2$ pela fórmula de 3 pontos

$$\begin{aligned}
 X_i &= 0,2 & f_i &= 0,04 \\
 X_{i+1} &= 0,3 & f_{i+1} &= 0,09 \\
 X_{i-1} &= 0,1 & f_{i-1} &= 0,01 & h &= 0,1
 \end{aligned}$$

$$f''_i = 1 / 0,1^2 (0,09 - 2(0,04) + 0,01) = 2$$

d) Calcular a 2ª derivada para $X = 0,2$ pela fórmula de 5 pontos

$$\begin{aligned}
 X_{i-1} &= 0,1 & f_{i-1} &= 0,01 \\
 X_i &= 0,2 & f_i &= 0,04 \\
 X_{i+1} &= 0,3 & f_{i+1} &= 0,09
 \end{aligned}$$

$$f''_i = [1 / 12(0,10)^2] (11(0,01) - 20(0,04) + 6(0,09) + 4(0,16) - 0,25) = 2$$

Observação : Notando que a função tabelada no enunciado é a função $f(X) = X^2$, é fácil de comparar-se os resultados fornecidos por Cálculo Numérico e os resultados analíticos.

CAPÍTULO VII

INTERPOLAÇÃO E EXTRAPOLAÇÕES

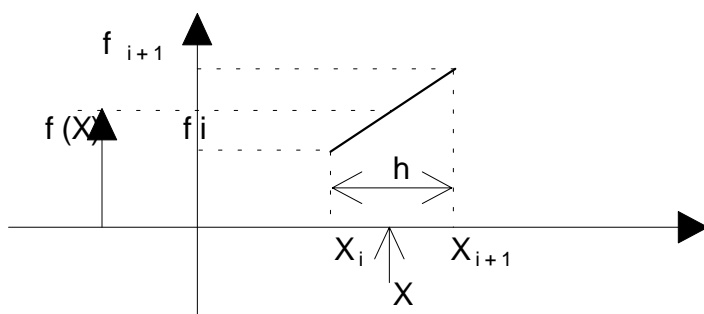
7.1 - INTERPOLAÇÃO E EXTRAPOLAÇÃO LINEAR

O problema de interpolação / extrapolação ocorre quando é conhecido o valor da função em alguns pontos particulares e deseja-se conhecer o valor da função em outros pontos. Os pontos em que se conhece o valor da função definem um domínio, se o ponto em que se quer determinar o valor da função pertencer a esse domínio então é um problema de interpolação, caso não pertencer será um problema de extrapolação. As extrapolações devem ser evitadas.

É bastante provável que o leitor já tenha executado interpolações lineares. No curso médio ela é conhecida por "regra de três", e ocorre freqüentemente quando consulta-se uma tabela de funções em que o valor necessário é intermediário entre dois tabelados.

Suponhamos então que a função é conhecida nos pontos X_i e X_{i+1} (pontos pivos) e vale respectivamente f_i e f_{i+1} e desejamos interpolar o valor para um X qualquer interno ao intervalo X_i, X_{i+1} .

A idéia consiste em supor-se que a função é linear entre X_i e X_{i+1} . Graficamente teríamos :



Da figura temos:

$$f^{(1)}(x) = f_i + (f_{i+1} - f_i) (x - x_i) / h$$

Fazendo $p = (x - x_i) / h$, temos:

$$f^{(1)}(x) = p f_{i+1} + (1 - p) f_i$$

... 7.1

7.1.1. Exemplo de interpolação linear

Interpolar $e^{0,24}$, conhecendo-se $e^{0,2} = 1,221$ e $e^{0,3} = 1,35$

$$x_i = 0,2 \quad f_i = 1,221 \quad h = 0,1$$

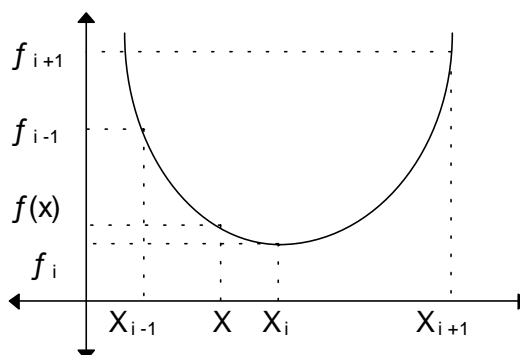
$$x_{i+1} = 0,3 \quad f_{i+1} = 1,35 \quad x = 0,24$$

$$p = (0,24 - 0,2) / 0,10 = 0,40$$

$$f^{(1)}(0,24) = 0,4(1,35) + 0,6(1,221) = 1,273$$

7.2. INTERPOLAÇÃO E EXTRAPOLAÇÃO PARABÓLICA (OU QUADRÁTICA)

Quando temos 3 pontos pivos espaçados uniformemente podemos lançar mão da interpolação/extrapolação parabólica, em que se obriga uma parábola passar pelos 3 pontos do plano cartesiano. Como temos mais informações sobre a função o erro da interpolação parabólica é menor que o de linear.



Recorrendo-se mais uma vez à fórmula 4.1 da série do Taylor, e fazendo-se $a = x_i$, vem:

$$f(x) = f_i + f'_i(x - x_i) + \frac{1}{2}f''_i(x - x_i)^2 + \frac{1}{3!}f'''_i(x - x_i)^3 + \dots$$

Como é uma interpolação (ou extrapolação) parabólica tomamos da série de Taylor os termos até a potência 2.

Então temos:

$$f^2 = f_i + f'_i (x - x_i) + \frac{1}{2} f''_i (x - x_i)^2$$

Podemos tomar com boa aproximação:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

E conforme fórmula 6.12, temos:

$$f''_i = 1/h^2 (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$

Fazendo-se :

$$p = \frac{x - x_i}{h}$$

Temos finalmente a fórmula da interpolação parabólica:

$$f^2(x) = f_i + p/2 (f_{i+1} - f_{i-1}) + p^2/2 (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \quad \dots 7.2$$

7.2.1 Exemplo de interpolação parabólica

Interpolar o seno de 0,35 radianos conhecendo-se:

sen 0,2 rd = 0,199, sen 0,3 rd = 0,296 e sen 0,4 rd = 0,389.

$x_{i-1} = 0,2$	$f_{i-1} = 0,199$	
$x_i = 0,3$	$f_i = 0,296$	
$x_{i+1} = 0,4$	$f_{i+1} = 0,389$	$h = 0,1$

$$p = \frac{0,35 - 0,3}{0,1} = 0,05/0,01 = 0,5$$

7.2.2 Segundo exemplo de interpolação parabólica

Interpolar $f(0,57)$, conhecendo-se $f(0,4) = -1,37$, $f(0,5) = 0,49$ e $f(0,6) = 3,25$.

$$\begin{array}{lll} x_{i-1} = 0,4 & f_{i-1} = -1,37 & \\ x_i = 0,5 & f_i = 0,49 & \\ x_{i+1} = 0,6 & f_{i+1} = 3,25 & h = 0,1 \end{array}$$

$$p = (0,57 - 0,5)/0,1 = 0,7$$

$$f^2(0,57) = 0,49 + 0,7/2(3,25 + 1,37) + 0,7^2/2(3,25 - 2 \cdot 0,49 - 1,37) = 2,33$$

7.3 INTERPOLAÇÃO E EXTRAPOLAÇÃO PELOS POLINÔMIOS LAGRANGE

Quando os pontos pivos x_i não estão distribuídos uniformemente os polinômios de interpolação podem ser obtidos pelo método de Lagrange.

Conhecendo-se o valor da função em n pontos pivos, sabemos que existe sempre um polinômio de grau $(n - 1)$ que passa por esses pontos.

A equação desse polinômio é dada por:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) y_i \quad ,,,7.3.1$$

onde $L_i(x)$, são denominados polinômios interpolares de Lagrange e são calculados segundo:

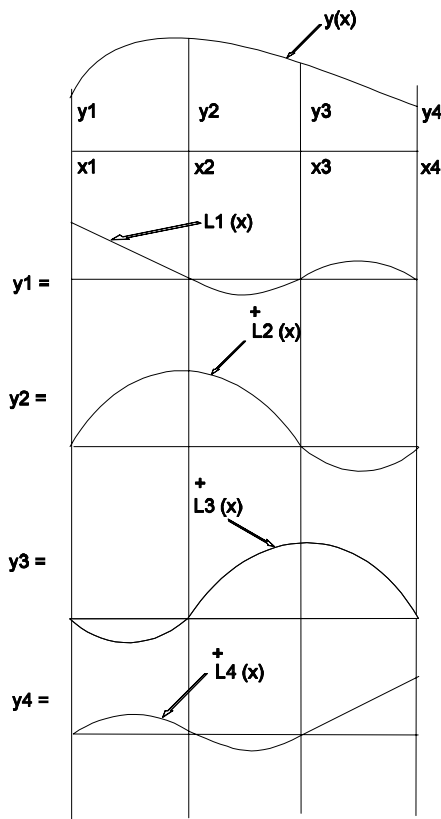
$$L_i(x) = [(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)] / [(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)] \dots$$

7.3.2

ou numa notação compactada:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} (x - x_j) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} (x_i - x_j) \dots 7.3.3$$

onde o símbolo Π representa o produto contínuo.



O polígono interpolador pode ser visualizado na figura 7. 3, particularizada para 4 pontos pivos. Cada $L_i(x)$ pode ser considerado uma "linha de influência" com ordenada unitária em $x=x_i$ e com ordenadas Π nulas em $x=x_j$, $j \neq i$. A soma das ordenadas das linhas de influência num ponto x multiplicadas pelas correspondentes ordenadas y_i fornece o valor do polígono interpolador $y(x)$ - naquele ponto.

7.3.1 Primeiro Exemplo

Dada a função tabelada abaixo intarpolar $y(6)$ pelo método de Lagrange.

i	1	2	3	4
x_i	1	2	5	9
y_i	1	3	6	10

$$L_1(x) = [(x-2)(x-5)(x-9)] / [(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)]$$

$$L_1(x) = [(x-2)(x-5)(x-9)] / [(1-2)(1-5)(1-9)]$$

$$L_1(6) = [(6-2)(6-5)(6-9)] / [(1-2)(1-5)(1-9)] = 3/8$$

$$L_2(x) = [(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)] / [(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)]$$

$$L_2(x) = [(x-1)(x-5)(x-9)] / [(2-1)(2-5)(2-9)]$$

$$L_2(6) = [(6-1)(6-5)(6-9)] / [(2-1)(2-5)(2-9)] = -5/7$$

$$L_3(x) = [(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)] / [(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)]$$

$$L_3(x) = [(x-1)(x-2)(x-9)] / [(5-1)(5-2)(5-9)]$$

$$L_3(6) = [(6-1)(6-2)(6-9)] / [(5-1)(5-2)(5-9)] = 5/4$$

$$L_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(9-1)(9-2)(9-5)}$$

$$L_4(6) = \frac{(6-1)(6-2)(6-5)}{224} = \frac{5}{56}$$

$$y(6) = L_1(6)y_1 + L_2(6)y_2 + L_3(6)y_3 + L_4(6)y_4$$

$$y(6) = 3/8(1) + (-5/7)(3) + 5/4(6) + 5/56(10) = 6,625$$

Observação: O método de Lagrange também pode ser utilizado caso os pontos pivôs estiverem espaçados uniformemente.

7.3.2 Segundo Exemplo

Dada a função tabelada abaixo interpolar $y(4)$ pelos polinômios de Lagrange.

i	1	2	3	4
x_i	1	3	7	13
y_i	2	5	12	20

$$L_1(4) = \frac{(4-3)(4-7)(4-13)}{(1-3)(1-7)(1-13)} = -\frac{27}{144}$$

$$L_2(4) = \frac{(4-1)(4-7)(4-13)}{(3-1)(3-7)(3-13)} = \frac{81}{80}$$

$$L_3(4) = \frac{(4-1)(4-3)(4-13)}{(7-1)(7-3)(7-13)} = \frac{27}{144}$$

$$L_4(4) = \frac{(4-1)(4-3)(4-7)}{(13-1)(13-3)(13-7)} = -\frac{9}{720}$$

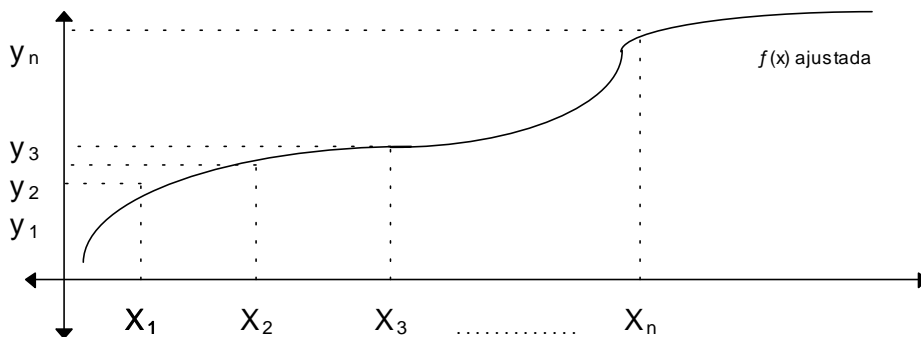
$$y(4) = (-27/144)2 + (81/80)5 + (27/144)12 + (-9/720)20 = 6,6875$$

CAPÍTULO VIII

AJUSTAMENTO DE FUNÇÕES PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.

8.1 AJUSTE POLINOMIAL

Conhecemos os n pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) de um fenômeno qualquer e queremos determinar a fórmula de $y(x)$ que melhor represente os pontos.



Se o polinômio $y(x)$ for do tipo :

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad \text{.....8.1.1}$$

onde $m < n$

o problema consiste em determinar-se os coeficientes : $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ do polinômio $y(x)$.

A idéia consiste em minimizar a soma dos quadrados dos desvios.

A soma dos quadrados dos desvios é:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m)^2 \quad \text{.....8.1.2}$$

onde S é uma função de $m+1$ variáveis: a_0, a_1, \dots, a_m .

Derivando-se S e igualando-se a zero temos uma condição de mínimo. Como S é função de mais de uma variável temos que:

$$\frac{\partial s}{\partial a_0} = 0; \frac{\partial s}{\partial a_1} = 0; \dots \frac{\partial s}{\partial a_m} = 0 \quad \dots 8.1.3$$

que constituirá um sistema de m+1 equações lineares, cujas incógnitas são: a_0, a_1, \dots, a_m .

Uma vez fixado o grau do polinômio que se deseja ajustar e aplicando-se as condições 8.1.2, 8.1.3 e os recursos do CAPÍTULO III o problema é solucionado.

8.2 AJUSTE PARA POLINÔMIO DO PRIMEIRO GRAU

Suponhamos que desejamos ajustar ao conjunto de pontos abaixo, a equação de uma reta:

i	1	2	3	4
x _i	0	1	2	5
y _i	3,1	4,9	7,2	13,1

A função a ser determinada é:

$$y(x) = a_0 + a_1 x \quad \dots 8.2.1$$

Nesse caso $n = 4$ e $m = 1$, portanto, $m < n$ OK!

Recorrendo-se a expressão 8.1.2 aplicada a esse problema temos:

$$s = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

Impondo a condição 8.1.3, de mínimo temos:

Logo o sistema formado pelas equações 8.2.1 e 8.2.2 e esse caso particular fica:

$$\begin{cases} 4a_0 + 8a_1 = 20,3 \\ 8a_0 + 30a_1 = 84,8 \end{cases}$$

que resolvido nos fornece: $a_1 = 2,01$ e $a_0 = 3,05$

Então a equação procurada é :

$$y(x) = 3,05 + 2,01 x$$

8.2.1 Aplicação

Ajustar uma reta ao seguinte conjunto de pontos:

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1	2,5	3,2	5	5,5	6	6,5
y_i	-2,2	2,8	4,6	10,2	11,3	12,8	14,3

Acrescentando as duas linhas necessárias para obtenção das equações 8.2.1 e 8.2.2, temos:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1	-2,2	-2,2	1
2	2,5	2,8	7	6,25
3	3,2	4,6	14,72	10,24
4	5	10,2	51	25
5	5,5	11,3	62,15	30,25
6	6	12,8	76,8	36
7	6,5	14,3	92,95	42,25
Σ	29,7	53,8	302,42	150,99

Montado o sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} 7a_0 + 29,7a_1 = 53,8 \\ 29,7a_0 + 150,99a_1 = 302,42 \end{cases}$$

Resolvido o sistema temos : $a_0 = -4,91$ e $a_1 = 2,97$

E a equação da reta é : $y(X) = -4,91 + 2,97 X$

8.3 - AJUSTE PARA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Freqüentemente desejamos ajustar uma coleção de pontos à uma função do tipo :

$$S = q \cdot t^p \quad \dots 8.3.1$$

Quando t é a variável independente, S é a variável dependente, q e p são parâmetros que devemos determinar para cada coleção particular de pontos.

A idéia consiste em aplicar-se logaritmos em ambos os lados da equação 8.3.1 e com isso a função do tipo exponencial é linearizada.

$$\log S = \log q + p \log t$$

onde $\log S$ corresponderia a y da equação 8.2.1, $\log q$ corresponderia a a_0 , p corresponderia a a_1 e $\log t$ corresponderia a X .

Forma-se então uma tabela constituída dos logaritmos dos valores originais, arma-se o sistema formado pelas equações 8.2.1 e 8.2.2, resolve-se o sistema determinando-se a_0 e a_1 e finalmente determina-se p e q , pois :

$$q = 10^{a_0} \quad e \quad p = a_1 \quad \dots 8.3.2$$

Observação : Estamos trabalhando com os logaritmos decimais. Caso empregarmos outra base de logaritmos devemos atentar para a corresponde alteração no cálculo de q .

8.3.1 APLICAÇÃO

Ajustar um modelo exponencial ao seguinte conjunto de valores:

ti	2,2	2,7	3,5	4,1
si	65	60	53	50

Trabalhando com os logaritmos dos valores e aplicando a rotina de calculo para ajuste de reta temos

ti	si	xi=logti	yi=logti	x2i	xi=yi
2,2	65	0,3424	1,8129	0,1172	0,6207
			2,7	60	0,4314 1,7782 0,1861 0,7671
			3,5	53	0,5441 1,7243 0,2960 0,9382
			4,1	50	0,6128 1,6990 0,3755 1,0411
		somatório			1,9307 7,0144 0,9748 3,3671

$$\{4,0000 \quad a_0 + 1,9307 \quad a_1 = 7,0144$$

$$\{1,9307 \quad a_0 + 0,9748 \quad a_1 = 3,3671$$

Resolvendo o sistema acima temos:

$$a_0 = 1,963 \quad e \quad a_1 = -0,4330$$

Das relações 8.3.2 vem:

$$\log q = 1,963 \quad q = 10^{1,963} = 91,83$$

$$p = a_1 = -0,4330$$

Finalmente a fórmula da função exponencial fica:

$$S = 91,83 \quad t^{-0,4330}$$

8.4 AJUSTE PARA POLINÔMIO DO 2º GRAU

Faremos aqui a dedução do ajuste pelo método dos mínimos quadrados do polinômio do 2º grau. O leitor poderá observar que é simples a dedução do polinômio de qualquer grau.

A função polinomial do 2º grau pode ser representada por:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

O problema consiste em determinar-se os valores de a_0 , a_1 e a_2 de uma coleção particular de valores.

Expressando-se S (somatória dos desvios ao quadrado) e impondo-se a condição de mínimo (deriva-se parcialmente e iguala-se a zero) temos o seguinte sistema a ser resolvido:

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	y_1	$x_1 y_1$	$x_1^2 y_1$
2	x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	y_2	$x_2 y_2$	$x_2^2 y_2$
3	x_3	x_3^2	x_3^3	x_3^4	y_3	$x_3 y_3$	$x_3^2 y_3$
.....							
n	x_n	x_n^2	x_n^3	x_n^4	y_n	$x_n y_n$	$x_n^2 y_n$
Σ	a_1	a_2	a_3	a_4	v_0	v_1	v_2

$$n a_0 + a_1 a_1 + a_2 a_2 = v_0$$

$$a_1 a_0 + a_2 a_1 + a_3 a_2 = v_1$$

$$a_2 a_0 + a_3 a_1 + a_4 a_2 = v_2$$

8.4.1 Aplicação

Ajustar um polinômio de 2º grau ao seguinte conjunto de valores:

x_i	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y_i	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

Montando o quadro necessário para resolução temos:

i	X_i	X_i^2	X_i^3	X_i^4	Y_i	$X_i Y_i$	$X_i^2 Y_i$
1	0,78	0,608	0,475	0,370	2,50	1,950	1,521
2	1,56	2,434	3,796	5,922	1,20	1,872	2,920
3	2,34	5,476	12,813	29,982	1,12	2,621	6,133
4	3,12	9,734	30,371	94,759	2,25	7,020	21,902
5	3,81	14,516	55,306	210,717	4,28	16,307	62,128

Σ	11,610	32,768	102,761	341,750	11,350	29,770	94,604
	(s_1)	(s_2)	(s_3)	(s_4)	(v_0)	(v_1)	(v_2)

Como $m=2$ e $n=5$, temos os sistemas:

$$\begin{cases} 5 a_0 + 11,61 a_1 + 32,768 a_2 = 11,350 \\ 11,610 a_0 + 32,768 a_1 + 102,761 a_2 = 29,770 \\ 32,768 a_0 + 102,761 a_1 + 341,750 a_2 = 94,604 \end{cases}$$

Aplicando para resolução desse sistema o método da eliminação de Gauss temos:

[linha]	a_0	a_1	a_2	C
[1]	5	11,61	32,768	11,35
[2]	11,61	32,768	102,761	29,77
[3]	32,768	102,761	341,750	94,604
[4]	1	2,32200	6,55360	2,27000
[5]	0	5,80958	26,6737	3,41530
[6]	0	26,6737	127,002	20,2206
[7]	0	1	4,59133	0,587874
[8]	0	0	4,53424	4,53983

Onde: $a_2 = 1,00123$; $a_1 = -4,00910$ e $a_0 = 5,01747$

Temos portanto o polinômio de 2º grau:

$$y(x) = 5,01747 - 4,00910 x + 1,00123 x^2$$

Nota final: Em aula será fornecido o sistema matricial de geração do ajuste polinomial e o coeficiente de correlação de pelo quociente das variâncias explicada e experimental

CAPÍTULO IX

RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

9.1 INTRODUÇÃO

A maioria dos fenômenos físicos são “modelados” por equações ou sistemas de equações diferenciais. A própria 2ª Lei de Newton para a mecânica é uma equação diferencial.

Como já foi visto em outros tópicos muitas vezes não se consegue obter a solução analítica de uma equação diferencial. Temos então que lançar mão dos métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais.

A solução de uma equação diferencial é uma função, ou uma família de funções. A solução desse problema via Cálculo Numérico só será possível, se forem fornecidas as condições de contorno (ou condições iniciais) da equação diferencial.

9.2 APLICAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O primeiro método a ser visto resume-se numa aplicação do estudo de séries (ver Capítulo IV). A fórmula 4.2 pode ser escrita na forma:

$$y(x) = y_0 + y'_0 x / 1! + y''_0 x^2 / 2! + y_0 x^3 / 3! + y_0 x^4 / 4! + \dots \quad \dots 9.2.1$$

Com os valores numéricos das condições de contorno e recorrendo-se à expressão analítica da equação diferencial determinamos um número FINITO de termos de 9.2.1 e fazemos o cálculo de $y(x)$ (resposta) nos pontos que se fizer necessário.

9.2.1 Aplicação

Determinar a solução da equação diferencial abaixo para x variando de 0 a 0,4 com $h=0,1$, através de sua aproximação pelos 4 primeiros termos de sua correspondente série de potências:

$$y' = 1/2(1+x) y^2 \quad \text{com } y(0)=y_0=1$$

Já temos então o 1º termo da série 9.2.1. Se substituirmos na equação diferencial x por x_0 (=zero) e y por y_0 (=hum) teremos y'_0 .

$$y'_0 = 1/2(1+x_0) \quad y_0^2 = 1/2(1+0) \quad 1^2 = 1/2.$$

Derivando-se a equação diferencial temos:

$$y'' = \frac{1}{2} \{ 2(1+x) y y' + (0+1) y^2 \}$$

$$y'' = (1+x) y y' + y^2 / 2$$

Portanto:

$$y_0'' = (1+0) \cdot 1 \cdot 1 / 2 + 1^2 / 2 = 1$$

Para determinarmos o 4º termo da série derivamos mais uma vez:

$$y''' = (1+x)(y' y' + y y'') + (1+0) y \cdot y' + 2 y y' / 2$$

$$y''' = (1+x)(y'^2 + y y'') + 2 \cdot y \cdot y'$$

Portanto:

$$y''' = (1+0)(1/4 + 1 \cdot 1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 / 2 = 9/4$$

Logo a função solução para a equação diferencial é aproximada pela seguinte série:

$$y(x) = 1 + x/2 + x^2/2 + 3x^3/2 \quad \dots 9.2.2$$

Substituindo-se em 9.2.2 os valores de x para os quais se quer os correspondentes y temos:

x_i	y_i
0	1
0,1	1,0554
0,2	1,1230
0,3	1,2051
0,4	1,3040

9.2.2 Segunda aplicação

Calcular a solução y do seguinte problema nos pontos $x = 0,2$, $x = 0,3$ e $x = 1,0$:

$$y'' + y' + y = e^x \quad \text{com: } y_0 = y_0' = 0$$

$$y'' = e^x - y - y'$$

$$y_0'' = e^0 - y_0 - y_0' = 1 - 0 - 0 = 1$$

$$y''' = e^x - y' - y''$$

$$y_0''' = e^0 - y_0' - y_0'' = 1 - 0 - 1 = 0$$

$$y^{(4)} = e^x - y'' - y'''$$

$$y_0^{(4)} = e^0 - y_0'' - y_0''' = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$y^{(5)} = e^x - y''' - y^{(4)}$$

$$y_0^{(5)} = e^0 - y_0''' - y_0^{(4)} = 1 - 0 - 0 = 1$$

Portanto temos os dois primeiros termos não nulos da série de potências:

$$y = x^2 / 2 + x^5 / 120$$

Logo:

$$y(0,2) = 0,0200027 ; y(0,3) = 0,0450202$$

$$\text{e } y(1) = 0,508333$$

9.3 MÉTODO DE EULER PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A solução de um problema de valor inicial é geralmente obtida etapa por etapa pelos métodos de integração sucessiva que dão Y_{i+1} logo que forem conhecidos um ou mais valores dos pivos antecedentes : Y_i, Y_{i-1}, \dots de y . Então dado o problema de primeira ordem :

$$Y' = f(x,y) \quad \text{com} \quad Y(X_0) = Y_0 \quad \dots 9.3.1$$

a derivada de Y no ponto i , $f(X_i, Y_i) = f_i$, poderá ser calculada por meio do 9.3.1 , logo que Y_i for conhecido. Uma vez conhecido f_i , temos aproximadamente :

$$\Delta Y_{i+1} - Y_i = \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x,y) dx \cong (Y_{i+1} - X_i) f_i$$

Então temos a fórmula de Euler :

$$Y_{i+1} = Y_i + (X_{i+1} - X_i) . f_i \quad \dots 9.3$$

9.3.1 Calcular novamente a aplicação 9.2.1 pelo método de Euler

$$y' = \frac{1}{2} (1+x) y^2 \quad \text{com} \quad y(0) = y_0 = 1$$

O quadro abaixo facilita a resolução :

X_i	Y_i	f_i	$(X_{i+1} - X_i) . F_i$
0,0		0,5	0,05
0,1	1,05	0,606	0,0606
0,2	1,1108	0,74006	0,074006
0,3	1,1846	0,91213	0,091213
0,4	1,2758		

9.3.2 Calcular pelo método de Euler

A solução da seguinte equação diferencial para x variando de 0 a 0,1 com $h = 0,02$.

$$Y' = -0,9 y / (1 + 2x) \quad \text{com } y(0) = y_0 = 1$$

X_i	Y_i	F_i	$(X_{i+1} - X_i) \cdot F_i$
0,0	1	-0,9	-0,0180
0,02	0,982	-0,8498	-0,0170
0,04	0,965	-0,8042	-0,0161
0,06	0,9489	-0,7625	-0,0153
0,08	0,9336	-0,7243	-0,0145
0,10	0,9191		

9.4 MÉTODO DE EULER GAUSS

O método de Euler Gauss utiliza a fórmula 8.3 de Euler como uma primeira aproximação de Y_{i+1} .

Δy_i é então calculado pela regra dos trapézios.

$$Y^{(1)}_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i) \cdot f_i$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) \dots 8.4$$

9.4.1 Aplicação

Calcular novamente o exercício 9.2.1 pelo método de Euler Gauss

$$Y' = -0,9 y / (1 + 2x) \quad \text{com } y(0) = y_0 = 1$$

X_i	Y_i	F_i	$Y^{(1)}_{i+1}$	F_{i+1}	$\frac{1}{2}(f_i + f_{i+1})$
0,0	1	0,5	1,05	0,6064	0,5532
0,1	1,055	1,116	1,116	0,7473	0,6799
0,2	1,123	1,199	1,199	0,9344	0,8456
0,3	1,208	1,303	1,303	0,188	1,068
0,4	1,315				

9.4.2 Segunda Aplicação

Calcular pelo método de Euler-Gauss a solução da equação diferencial abaixo, para x variando de 0 a 0,1 com $h = 0,02$.

$$Y' = -0,9 y / (1 + 2x) \quad \text{com } y(0) = y_0 = 1$$

Y_i	X_i	F_i	$Y^{(1)}_{i+1}$	F_{i+1}	$\frac{1}{2}(f_i + f_{i+1})$	Δy_i
0,00	1,0000	-0,9000	0,9820	-0,8498	-0,8749	-0,0175
0,02	0,9825	-0,8503	0,9655	-0,0046	-0,82745	-0,0165
0,04	0,9660	-0,8050	0,9499	-0,7633	-0,7844	-0,0157
0,06	0,9503	-0,7637	0,9350	-0,7255	-0,7446	-0,0149
0,08	0,9354	-0,7250	0,9209	-0,6907	-0,7082	-0,0142
0,10	0,9212					

9.5 MÉTODO DE RUNGE KUTTA

O método de Runge Kutta determina inicialmente Δy_1 segundo a fórmula:

$$\Delta y_1 = h f_i = h f(x_i, y_i)$$

Posteriormente determina-se ψy_i , calculado pela fórmula:

$$\psi y_1 = h f_i = h f(x_i + h/2, y_i + \frac{1}{2} \Delta y_1)$$

9.5.1 Aplicação

Determinar a solução da equação diferencial abaixo, pelo método de Runge Kutta:

$$Y' = \frac{1}{2} (1 + x) y^2 \quad \text{com } y(0) = y_0 = 1$$

Observação: Determinar a solução para $x = 0,1$ e $x = 0,3$.

X_i	Y_i	$F(X_i, Y_i)$	$\frac{1}{2} \blacktriangle' y_i$	$X_i + h/2$	$Y_i + \frac{1}{2} \blacktriangle' y_i$	$F(x, y)$	ψY_i
0,0	1,0000	0,5000	0,0250	0,550	1,025	0,5516	0,0552
0,1	1,0552	0,6124	0,0612	0,200	1,116	0,7470	0,1496
0,3	1,2040						

9.5.2 Segunda Aplicação

Resolver pelo método de Runge Kutta a equação diferencial abaixo para x variando de 0 a 0,1 com $h=0,02$.

$$Y' = -0,9 y / (1 + 2x) \quad \text{com } y(0) = y_0 = 1$$

X_i	Y_i	$F(X_i, Y_i)$	$\frac{1}{2} \blacktriangle' y_i$	$X_i + h/2$	$Y_i + \frac{1}{2} \blacktriangle' y_i$	$F(x, y)$	ψY_i
0,00	1,0000	-0,9000	-0,0090	0,01	0,991	-0,8744	-0,0175
0,02	0,9825	-0,8502	-0,0085	0,03	0,974	-0,8270	-0,0165
0,04	0,9660	-0,8050	-0,0081	0,05	0,9579	-0,7837	-0,0157
0,06	0,9503	-0,7636	-0,0076	0,07	0,9427	-0,7442	-0,0149
0,08	0,9354	-0,7257	-0,0073	0,09	0,9281	-0,70787	-0,0142
0,10	0,9212						

MATEMÁTICA FINANCEIRA COM EMBASAMENTO NUMÉRICO

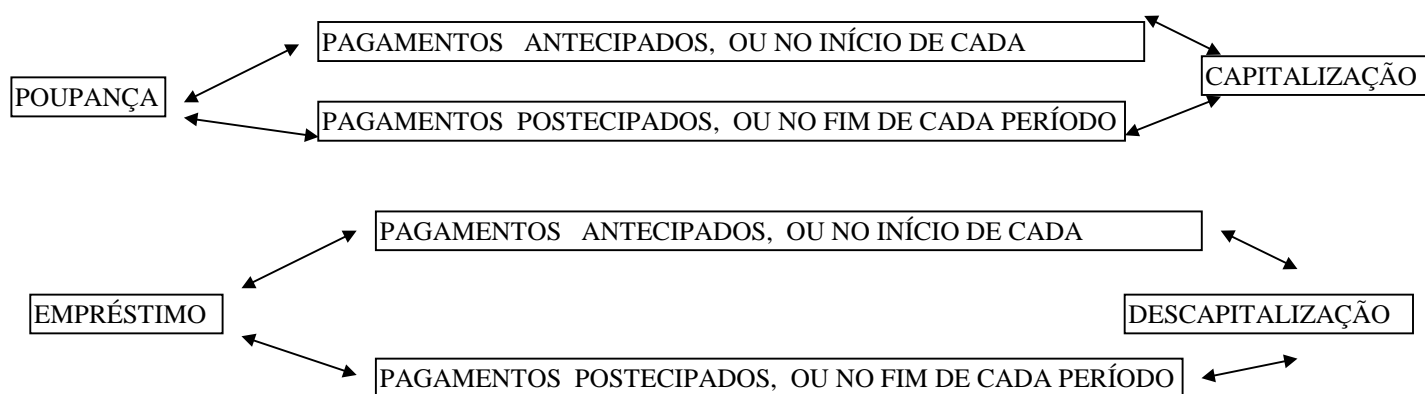
Usar a função Solve de uma HP - ou similar numa calculadora financeira não significa saber Cálculo Numérico e sim estar preparado para a prática se munidos desses equipamentos.

objetivos:

- Fornecer ao acadêmico de engenharia uma visão na relação da matemática financeira com a montagem de equações exponenciais, cuja solução numérica faz parte do nosso curso normal (solução de equações);
- Também serve como uma iniciação e embasamento aos financiamentos e anuidades, problemas tão freqüentes nas organizações, onde o entendimento fica para uma minoria esclarecida e treinada em calculadoras financeiras (gerentes, agentes financeiros, funcionários gabaritados, etc.) geralmente os detentores do conhecimento real do negócio.

INICIAÇÃO AO CÁLCULO:

O iniciante em matemática financeira geralmente sofre na interpretação dos problemas devido ao nível de abstração na mistura de matemática com uma grandeza física: O tempo. Para evitar ao máximo problemas de montagens, vem a seguir algumas dicas que catalogam o curso e equacionamento que cada problema deve seguir .



- Quando o problema trata de devolução de dinheiro tomado, é um problema de **descapitalização**. O tomador goza de empréstimo no ato da tomada do empréstimo (geralmente para adquirir um bem material) mas assume um futuro de devolução parcelada. Aqui geralmente a análise consiste em projetar o dinheiro do futuro para o presente. Característico de dividir por :

$$(1 + i)^n$$

- Quando o problema trata de depósitos periódicos sem usufruir de empréstimo. Típico de poupança é um problema de **capitalização ou fundo de amortização**. Aqui geralmente a análise consiste em projetar o dinheiro do presente para o futuro.

Característico de multiplicar por

$$(1 + i)^n$$

Os casos mais freqüentes envolvendo empréstimos podem ser separados por:

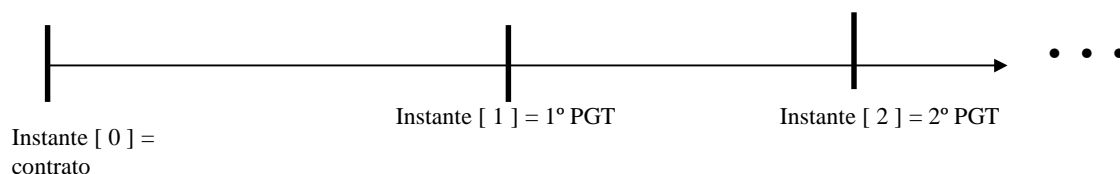
- Pequeno número de parcelas (resultando em equações exponenciais pouco extensas);
- Grande número de parcelas (anos = anuidades);
 - Estes últimos devem ser divididos em duas categorias:
 - Se as parcelas são antecipadas (no início de cada período chamadas de Anuidades antecipadas);
 - Se as parcelas são pagas no fim de cada período (anuidades comuns);

FUNDO DE AMORTIZAÇÃO COM VALOR FUTURO (VF):

CARACTERÍSTICAS:

- Não existe gozo de empréstimo;
- Os pagamentos ou depósitos são feitos no final de cada período;
- Quando a incógnita desconhecida for i, então recomenda-se o método das cordas ou o de Newton Raphson, embora as cordas seja mais lento o mesmo foge da derivada $f'(i)$ presente no método de Newton.

É um fundo destinado a acumular uma quantia de dinheiro em uma data especificada. Essa quantia é um valor futuro de uma anuidade comum, sendo que o 1º pagamento será efetuado no final de cada período, e pode ser calculada com:



$$VF = PGT \frac{(1 + i)^N - 1}{i}$$

VF = Valor futuro;

PGT = Pagamento mensal ou depósito mensal;

i = Taxa de juros em %;

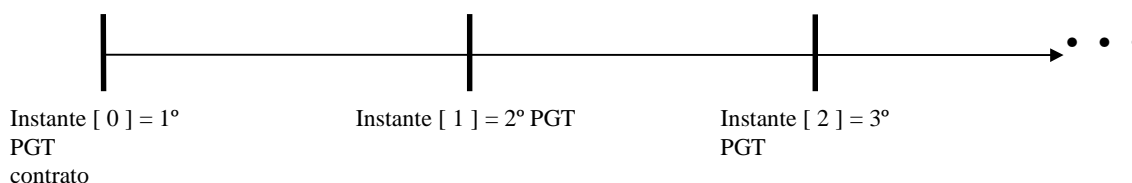
ANUIDADE ANTECIPADA COM VALOR FUTURO (VF):

Difere do fundo de amortização apenas no fato que já no instante zero [0] existe o 1º pagamento, daí a palavra antecipada.

CARACTERÍSTICAS:

- Não existe gozo de empréstimo;
- Os pagamentos ou depósitos são feitos no início de cada período;
- Quando a incógnita desconhecida for i , então recomenda-se o método das cordas ou o de Newton Raphson, embora as cordas seja mais lento o mesmo foge da derivada $f'(i)$ presente no método de Newton.

É um fundo destinado a acumular uma quantia de dinheiro em uma data especificada. Essa quantia é um valor futuro de uma anuidade comum, sendo que os pagamentos serão efetuados no início de cada período, e pode ser calculada com:



$$VF = PGT (1 + i) \frac{(1 + i)^N - 1}{i}$$

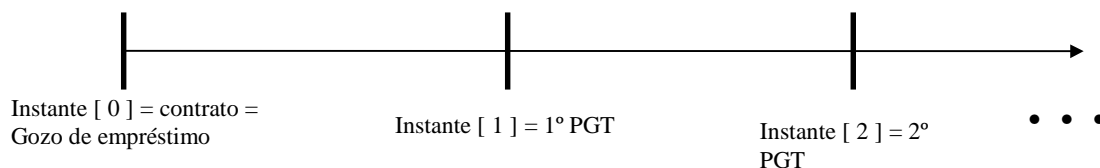
VF = Valor futuro;

PGT = Pagamento mensal ou depósito mensal;

i = Taxa de juros em %;

ANUIDADE COMUM COM VALOR ATUAL(VA):**CARACTERÍSTICAS:**

- Existe gozo de empréstimo inicial;
- Os pagamentos serão periódicos e pagos no final de cada período;
- Quando a incógnita desconhecida for i , então recomenda-se o método das cordas ou o de Newton Raphson, embora as cordas seja mais lento o mesmo foge da derivada $f'(i)$ presente no método de Newton.



Um empréstimo comum como a hipoteca de uma casa é um exemplo dessa situação de anuidade. Hoje também essa situação é muito freqüente pelas concessionárias de veículos que fornecem o veículo imediatamente ao usuário (valor do empréstimo = veículo à vista). Onde este último goza do empréstimo (carro) e começa pagar postecipadamente, isto é, no fim de cada período uma série grande de parcelas.

Os problemas desta espécie podem ser resolvidos por:

$$VA = PGT \frac{1 - (1 + i)^{-N}}{i}$$

Às vezes para diminuir o saldo devedor um plano destes oferece ao tomador a possibilidade de pagar um valor maior que a parcela (PGT) em determinado período, (Em consórcios = lance); neste caso pode-se usar a mesma expressão acima com um adendo:

$$VA = PGT \frac{1 - (1 + i)^{-N}}{i} + PI (1 + i)^{-N}$$

onde:

VA = Valor atual;
 PGT = Pagamento ou parcela periódica;
 i = Taxa de juro;
 n = períodos ;
 PI = Valor > PGT para diminuir saldo devedor;

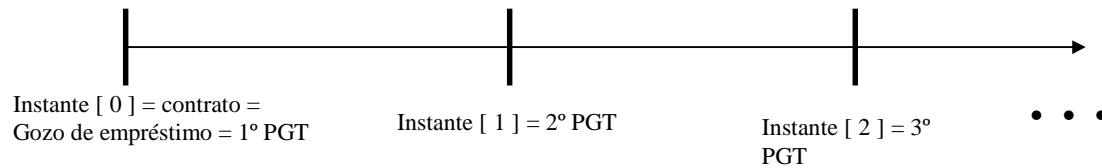
ANUIDADE ANTECIPADA COM VALOR ATUAL (VA):

Difere da anuidade comum apenas no que no gozo do empréstimo o tomador já paga a 1ª parcela, daí o nome antecipada.

CARACTERÍSTICAS:

- Existe gozo de empréstimo inicial ;
- Os pagamentos serão periódicos e pagos no início de cada período;

- Quando a incógnita desconhecida for i , então recomenda-se o método das cordas ou o de Newton Raphson, embora as cordas seja mais lento o mesmo foge da derivada $f'(i)$ presente no método de Newton.



$$VA = PGT (1 + i) \frac{1 - (1 + i)^{-N}}{i} + PI (1 + i)^{-N}$$

Situações de aluguel ou arrendamento são exemplos comuns desse tipo de anuidade.

Por exemplo: Qual é o valor atual de um arrendamento que envolverá pagamentos fixos para um certo número de períodos, se a exigência da taxa de juros do arrendatário for conhecida. Um pagamento de parcela intermediária (lance) no fim do período pode estar envolvido com a finalidade de diminuir o saldo devedor.

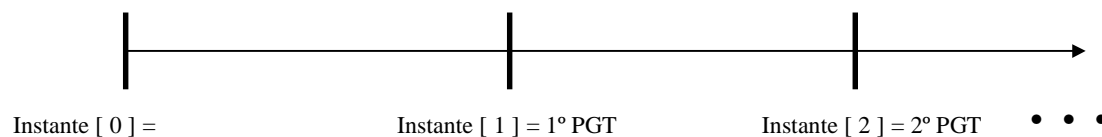
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1º - Uma empresa adota que no final de cada mês depositará R\$ 25.00 em um fundo para a substituição de uma máquina no fim de um período de 10 anos. Se o fundo é administrado por um banco que oferece 0,4374% ao mês; Quanto haverá no fundo no fim de 10 anos de depósitos mês a mês?

Solução:

CARACTERÍSTICAS:

- Não existe gozo de empréstimo;
- Os pagamentos ou depósitos são feitos no final de cada período;



Trata-se de uma poupança com depósitos iguais e periódicos durante 10 anos = Fundo de amortização.

$$VF = PGT \frac{(1+i)^N - 1}{i}$$

VF = ?

n = 10 x 12 meses = 120

i = 0,4375 % = 0,004375

PGT = R\$ 25,00

$$VF = 25 \times (1,004375^{120} - 1) / 0,004375 = \text{R\$ } 3.934,42$$

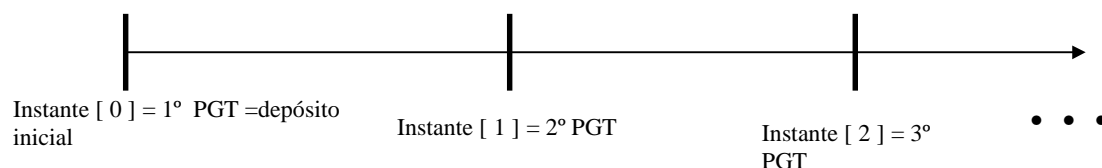
* * *

2º - Sílvia quer economizar R\$ 10.000,00 nos próximos 10 anos para liquidar a hipoteca de sua casa. Se ele poupar R\$ 50,00 todo início de mês (período) numa poupança qual deverá ser a taxa de juro mensal para acumular nessa poupança os R\$ 10.000,00 no final de 10 anos ?

Solução:

CARACTERÍSTICAS:

- Não existe gozo de empréstimo;
- Os pagamentos ou depósitos são feitos no início de cada período;
- Quando a incógnita desconhecida for i, então recomenda-se o método das cordas ou o de Newton Raphson, embora as cordas seja mais lento o mesmo foge da derivada $f'(i)$ presente no método de Newton.



Trata-se de uma anuidade antecipada:

$$VF = PGT (1+i) \frac{(1+i)^N - 1}{i}$$

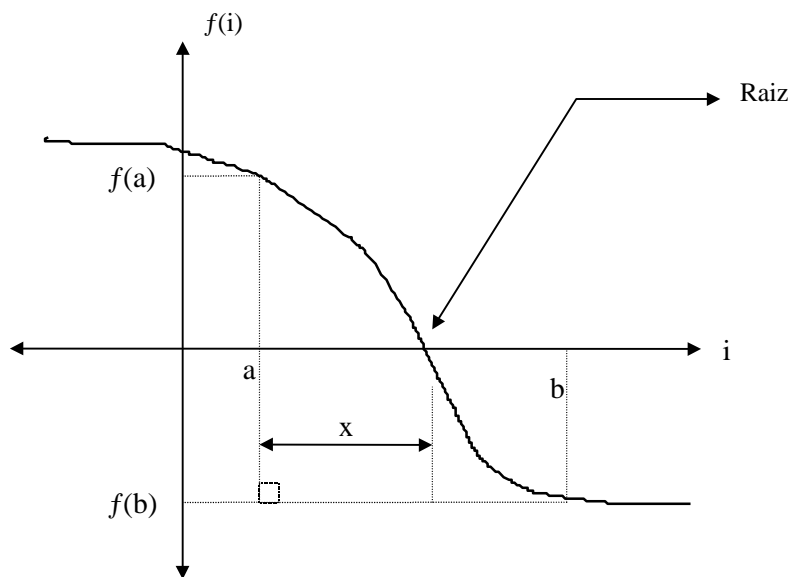
$$(VF/PGT) - (1+i) \{ (1+i)^n - 1 \} / i = 0 \text{ (equação exponencial)}$$

$$(10.000,00/50,00) - (1+i) \{ (1+i)^n - 1 \} / i = 0$$

$$200 - (1+i) \{ (1+i)^n - 1 \} / i = 0$$

Solução numérica pelo método das cordas:

$$f(i) = 200 - (1+i) \{ (1+i)^n - 1 \} / i$$



Raiz = a + x, onde o valor de x pode ser obtido por semelhança de triângulos:

$$x / (b - a) = f(a) / (f(a) - f(b)), \text{ portanto}$$

$$x = f(a) (b - a) / (f(a) - f(b)), \text{ desta forma :}$$

$$\text{Raiz} = a + f(a) (b - a) / (f(a) - f(b))$$

Voltando ao exercício da equação exponencial:

$$f(i) = 200 - (1+i) \{ (1+i)^n - 1 \} / i$$

$$f(0,7\%) = f(0,007) = 11,60..... > 0$$

$$f(0,8\%) = f(0,008) = -1,819.... < 0$$

$$f(0,75\%) = f(0,0075) = 5,034.... > 0$$

portanto definimos como início o intervalo [0,0075 ; 0,008];

$$f(0,0075) > 0$$

$$f(0,008) < 0 ; \text{ portanto: } \exists i \in \mathbb{R}, a = 0,0075 \quad b = 0,008$$

1ª Iteração:

$$i_1 = 0,0075 + [f(0,0075)(0,008 - 0,0075)] / [f(0,0075) - f(0,008)]$$

$$i_1 = 0,0078672803$$

$$f(i_1) = 0,0283... > 0, \text{ portanto } i_1 = \text{novo } a$$

2ª Iteração:

$$i_2 = i_1 + [f(i_1)(0,008 - i_1)] / [f(i_1) - f(0,008)] = 0,0078693153$$

$$f(i_2) = 0,000156... > 0, \text{ portanto } i_2 = \text{novo } a$$

3ª Iteração:

$$i_3 = i_2 + [f(i_2)(0,008 - i_2)] / [f(i_2) - f(0,008)] = 0,0078693265$$

$$f(i_3) = 0,0000008614... > 0 \text{ e } \approx 0, \text{ portanto paramos o método.}$$

Portanto $i = i_3 = 0,0078693265 = 0,78693265 \%$

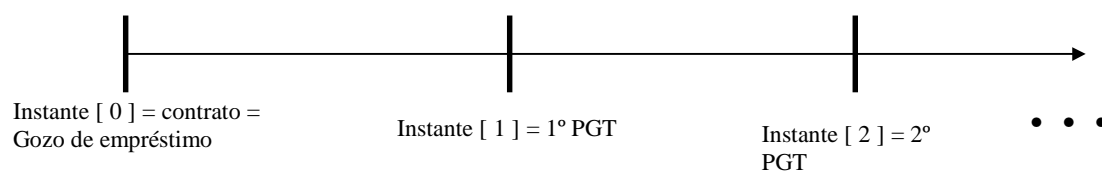
* * *

3º - Calcule os pagamentos mensais postecipados (no final de cada período) durante 30 anos para um empréstimo de R\$ 32.000,00 com a taxa de juro = 8,75 / 12 % ao mês.

Solução:

CARACTERÍSTICAS:

- Existe gozo de empréstimo inicial;
- Os pagamentos serão periódicos e pagos no final de cada período;



Portanto se trata de um problema de Anuidade Comum:

$$VA = PGT \frac{1 - (1 + i)^{-N}}{i}$$

$$32.000,00 / \{ (1 - 1,007291667^{-360}) / 0,007291667 \} = \text{R\$ } 251,74$$

ou pode ser resolvido por:

$$VA \{ i (1 + i)^n / [(1 + i)^n - 1] \} = PGT$$

$$32.000,00 (0,007291667 \times 1,007291667^{360}) / (1,007291667^{360} - 1) = PGT = \text{R\$ } 251,74$$

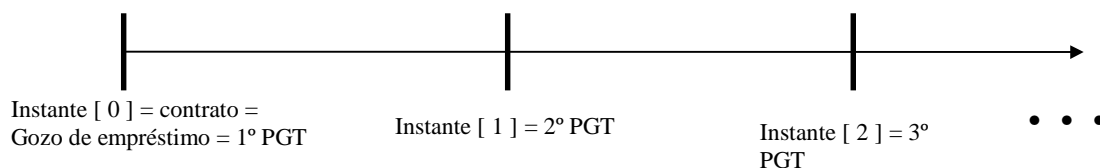
* * *

4º - Uma firma copiadora aluga sua copiadora de alta capacidade que custa R\$ 45.000,00 por 2 anos por R\$ 2.000,00 por mês no 1º dia de cada período a terceiros. A firma espera vender a copiadora por R\$ 10.000,00 depois de dois anos. Que lucro pode ser esperado ?

Solução:

CARACTERÍSTICAS:

- Existe gozo de empréstimo inicial : arrendamento da copiadora x PGT x depreciação;
- Os pagamentos serão periódicos e pagos no início de cada período;
- Quando a incógnita desconhecida for i, então recomenda-se o método das cordas ou o de Newton Raphson, embora as cordas seja mais lento o mesmo foge da derivada $f'(i)$ presente no método de Newton.



O aluno pode-se confundir em relação ao gozo do empréstimo neste exercício. Basta entender como tomador do empréstimo o cliente da firma que goza dos R\$ 45.000,00 da máquina que aluga da mesma. Em contrapartida a firma não perde a máquina, apenas se deprecia, porém recebe um aluguel mensal.

$$VA = PGT (1 + i) \frac{1 - (1 + i)^{-N}}{i} + PI (1 + i)^{-N}$$

$$45.000,00 = 2.000,00 (1 + i) \{ (1 - (1 + i)^{-24}) / i \} + 10.000,00 (1 + i)^{-24}$$

$$2.000,00 (1 + i) \{ (1 - (1 + i)^{-24}) / i \} + 10.000,00 (1 + i)^{-24} - 45.000,00 = 0 \text{ Equação exponencial}$$

$$f(i) = 2.000,00 (1 + i) \{ (1 - (1 + i)^{-24}) / i \} + 10.000,00 (1 + i)^{-24} - 45.000,00$$

Resolvendo pelo método das cordas, visto no 2º exercício, tem-se que **$i = 1,9637\%$ ao mês = lucro**,
Dica inicial:

$$f(0,01) > 0$$

$$f(0,02) < 0 \text{ portanto } \exists i \in \mathbb{R}, a = 0,01 \quad b = 0,02 \text{ (ou seja o juro está entre 1\% e 2\%)}$$

* * *

5º - Um empréstimo a 45% ao mês Quanto será pago efetivamente ao final de 10 dias ?

Solução:

CARACTERÍSTICAS:

- Pequeno financiamento envolvendo juro composto;
- Nada a ver com anuidades nem suas características;

$$1/3$$

10 dias = 1/3 do mês financeiro, portanto resposta = $1,45^{1/3} = 1.13185 = \mathbf{13,18\%}$

6º - Uma taxa de juros de 35% ao mês de um empréstimo por 45 dias, é mais vantajoso cobrar juros simples ou juros compostos ?

Solução:

CARACTERÍSTICAS:

- Problema envolvendo pequeno financiamento (baixo valor de n);
- Nada a ver com anuidades nem suas características;

$$45/30$$

$$1.35 = 1,568558255214 = 56,85\% \text{ (cálculo por juro composto).}$$

$$45-30 = 15 \text{ dias} = 0,5 \text{ mês}, \begin{array}{ccc} 35\% & \longleftrightarrow & 1 \text{ mês} \\ X\% & \longleftrightarrow & 1,5 \text{ mês} \end{array} \text{ , portanto } X = 52,5\%$$

Portanto para o fornecedor do empréstimo é mais interessante cobrar juro composto.

7º - Num empréstimo de 57 dias pagou-se uma taxa de 1000% ao ano. Qual foi a taxa efetiva ao mês ?

Solução:

CARACTERÍSTICAS:

- Problema envolvendo pequeno financiamento (baixo valor de n);
- Nada a ver com anuidades nem suas características;

$$(1 + i)^{\text{mês / ano}} = (1 + 1000/100)^{57 / 360} = 1,221188550312 = \mathbf{22.12 \%}$$

↖ ↗
Deve-se usar em dias

* * *

8º - Para o exercício anterior como seria o juro se cobrado antecipadamente ?

$$(1 + 10)^{57 / 360} = 1,461797366514 = 46,1797 \%$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longleftrightarrow & 57 \\ 100 & & 146,18 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longleftrightarrow & 57 \\ X & & 100 \end{array}$$

$146,18 X = 100 \times 100$, $X = 68.41$, antecipadamente = $100 - 68.41 = 31,59 \%$ no período.

* * *

9º - Suponha que você queira ter R\$ 47.899,92 no final de oito meses. Se a taxa de juros for de 4% ao mês , qual deve ser o valor a aplicar hoje ?

- Problema envolvendo pequeno financiamento (baixo valor de n);
- Nada a ver com anuidades nem suas características;

$$VF = VP (1 + i)^n$$

$$47.899,92 = VP (1,04)^8 \text{ , portanto } \mathbf{VP = 35.000,00}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS COM RESULTADO ANEXOS:

1º - Um empréstimo a 35 % ao mês em 23 dias o que seria mais atrativo ao fornecedor do empréstimo: Cobrar linearmente (juro simples) ou exponencialmente (juro composto) ?

Resposta: Linearmente $i = 26,83 \%$

Exponencialmente $i = 25,87 \%$

Para o fornecedor seria mais interessante cobrar linearmente !

Para o tomador seria mais interessante exponencialmente !

* * *

2º - Uma taxa de juros de 42 % ao semestre, é preferível cobrar juros simples ou compostos para um empréstimo de 112 dias ?

Resposta: Linear = 26,13 % Exponencial = 24,38 %, preferível o juro linear.

* * *

3º - 30 % ao mês = a que taxa efetiva por 59 dias ?

Resposta $i = 67,52 \%$

4º - Se você tem R\$ 1.000,00 para aplicar por um prazo de 2 anos a uma taxa de 5 % por semestre, sem depósitos periódicos, qual será o valor a resgatar ?

Resposta: R\$ 1.215,50

* * *

5º - Um capital de R\$ 2.000.000,00 é aplicado durante um ano e 3 meses a uma taxa de 2 % ao mês. Quais os juros estimados no período ?

Resposta: R\$ 34,58 %

6º - Se uma pessoa que ganhava um salário de CR\$ 30.000,00 no dia 1º de Janeiro de 1990 e no dia 1º de Janeiro de 1991 o salário dessa mesma pessoa = CR\$ 193.000,00. Calcule se aumentou ou diminuiu o poder aquisitivo dessa pessoa se a inflação no período foi = 500 %

Resposta: $i = 16,78 \%$ ao mês = 543 % ao ano > 500 %, portanto ganhou poder aquisitivo!

* * *

7º - Se uma empresa deposita numa conta remunerada (poupança ou similar) a importância de R\$ 25,00 todo final de período (mês) durante 54 meses espera resgatar R\$ 1.519,08. Qual será a taxa de juro mensal envolvido nesse fundo ?

Resposta: $i = 0,4375 \%$ (Utilizar o método das cordas)

8º - Se durante 20 anos pagou-se no final de todo período a importância de R\$ 282,79 a um sistema financeiro de habitação para gozar de um imóvel avaliado em R\$ 32.000,00. Qual foi a taxa de juro ao mês cobrado pela financiadora ?

Resposta : $i = 0,7291667\%$ ao mês (Resolver pelo método das cordas)

“ A coisa mais difícil de entender no mundo é o imposto de renda”
(Albert Einstein)



Há quatro tipos de ignorância: não saber o que se devia saber; Saber mal o que se devia saber; Saber o que não se devia saber e colar de um papel do colega sem saber o que está escrito.