

# Random Process (1/2)

---

- Introduction
- Mathematical Definition of a Random Process
- Stationary Processes
- Mean, Correlation, and Covariance Functions
- Ergodic Processes
- Transmission of a Random Process Through a Linear Time-Invariant Filter
- Power Spectral Density

1-1/34

# Random Process (2/2)

---

- Gaussian Process
- Noise
- Narrowband Noise
- Representation of Narrowband Noise in Terms of In-phase and Quadrature Components
- Representation of Narrowband Noise in Terms of Envelope and Phase Components
- Sine Wave Plus Narrowband Noise

1-2/34

# Introduction

## □ 數學模型的觀念用以描述物理現象

⊗ Deterministic：與時間相關的行為在任意時間瞬間皆無不確定性

⊗ Stochastic：因有用的物理現象常有未知因素，所以用機率方式來描述，稱為隨機

☞ 例如無線通訊系統

✍ 載資訊的訊號：隨機間隔的隨機區間之能量叢集

✍ 干擾：接收器鄰近的通訊系統所產生的假性電磁波

✍ 通道雜訊：最主要的為熱雜訊，由導體及接收器前端裝置之電子隨機運動所導致

✍ 雖無法預測，但可用統計參數來描述訊號，如平均功率及功率頻譜密度

1-3/34

## Mathematical Definition of a Random Process (1/2)

□ 隨機過程的兩個特性：為時間函數；不可能正確定義未來將觀察到的波形

### □ 隨機實驗的描述

⊗ 取樣點：每個實驗結果關聯至一個取樣點，為時間函數

⊗ 取樣空間(整體)：全部與此實驗所有結果有關的取樣點集合，為隨機過程

⊗ 機率分佈：給取樣空間內適當集合，使可以對各事件說明其機率

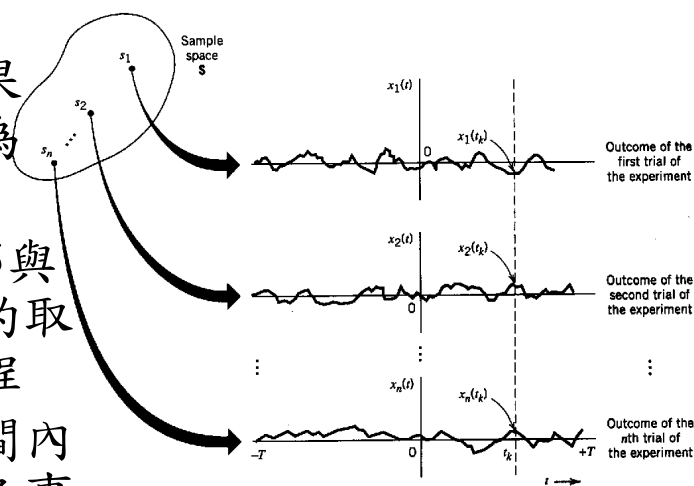


FIGURE 1.1 An ensemble of sample functions.

1-4/34

# Mathematical Definition of a Random Process (2/2)

## □ 隨機過程的表示

✿ 隨機過程  $X(t,s)$  or  $X(t)$ ,  $T \leq t \leq T$

☞  $s$  為每個取樣點， $2T$  為全部觀察區間

☞ 體現或取樣函數  $x_j(t)$  or  $X(t,s_j)$  對一固定取樣點  $s_j$

☞ 隨機變數  $X(t_k) = \{x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)\}$ : 所有取樣函數在一固定時間  $t_k$  的值所構成的集合

## □ 隨機過程的定義

✿ 時間函數的整體伴隨著一機率規則，此規則指定一機率給任何關聯一取樣函數之觀察中有意義的事件

✿ 隨機變數對隨機過程

☞ 隨機變數：隨機實驗結果對應至一個數

☞ 隨機過程：隨機實驗結果對應至時間函數的波形

1-5/34

# Stationary Processes (1/2)

## □ Stationary: 統計特性不相依於觀察起始時間

✿ Stationary in the strict sense (Strictly stationary, SS)

$$\text{☞ } F_{X(t_1+\tau), \dots, X(t_k+\tau)}(x_1, \dots, x_k) = F_{X(t_1), \dots, X(t_k)}(x_1, \dots, x_k)$$

☞ 相依於隨機變數相對時間分隔，而非絕對時間，即隨機過程在所有時間有相同的機率行為

☞ Jointly strictly stationary:  $X(t)$ ,  $Y(t)$  的一些隨機變數的聯合分佈不相依於起始時間

☞ Stationary  $X(t)$  兩常用的階層

✍  $F_{X(t)}(x) = F_{X(t+\tau)}(x) = F_X(x)$  : Stationary 隨機過程之第一階分佈函數不相依於時間

✍  $F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = F_{X(0), X(t_2-t_1)}(x_1, x_2)$ : Stationary 隨機過程之第二階分佈函數只相依於兩觀察時間差

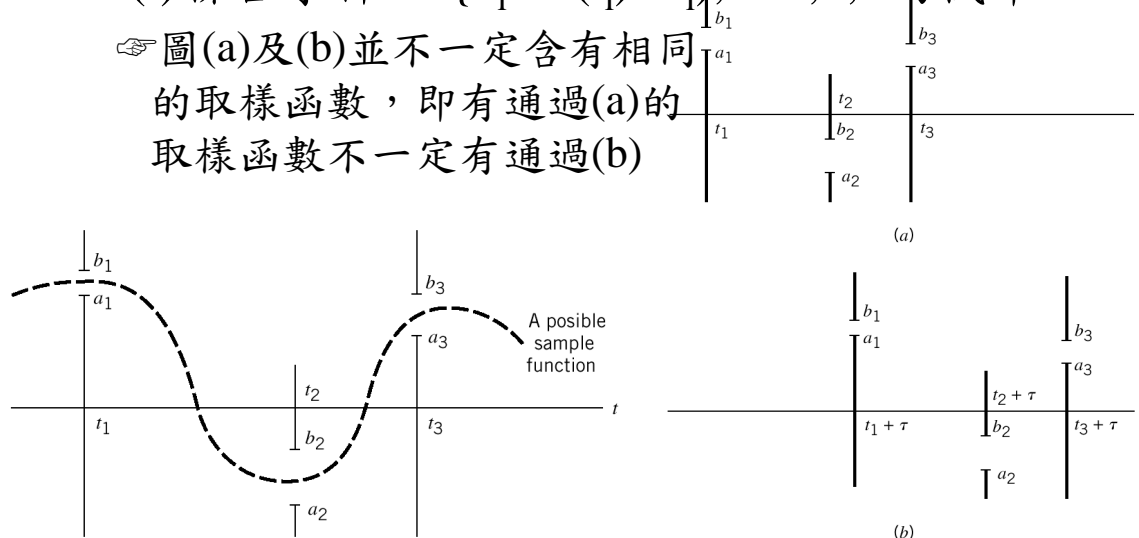
1-6/34

# Stationary Processes (2/2)

## □ 例子(說明stationarity的觀念)

✿  $P(A) = F_{X(t_1), X(t_2), X(t_3)}(b_1, b_2, b_3) - F_{X(t_1), X(t_2), X(t_3)}(a_1, a_2, a_3)$  : Stationary  
 $X(t)$  聯合事件  $A = \{a_i < X(t_i) \leq b_i\}, i=1,2,3$  的機率

☞ 圖(a)及(b)並不一定含有相同的取樣函數，即有通過(a)的取樣函數不一定有通過(b)



1-7/34

# Mean, Correlation, and Covariance Functions (1/5)

## □ 前言

✿ 在某t之Mean:  $\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_{X(t)}(x)dx$ ,  $f_{X(t)}(x)$  為第一階pdf

☞ SS則  $\mu_X(t) = \mu_X$  為定值

✿ Autocorrelation fun.  $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ ,  $f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$  為第二階pdf

☞ SS則  $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1)$  只相依於觀察時間的差

☞ SS之 Autocovariance fun.  $C_X(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X)(X(t_2) - \mu_X)] = R_X(t_2 - t_1) - \mu_X^2$

✍ 亦只相依於觀察時間的差

✍ 若  $\mu_X$  及  $R_X$  已知則  $C_X$  可得，即  $\mu_X$  及  $R_X$  足以描述過程的前兩個動量

✍ 兩個需注意的重點

\*  $\mu_X$  及  $R_X$  是提供  $X(t)$  的部分描述

\* 上述  $\mu_X$  及  $R_X$  等式不足以保證  $X(t)$  為 SS，但一定是 (WS)S

✿ WSS 不一定需要是 SS. SS 不一定有上述  $\mu_X$  及  $R_X$  等式，因為可能不存在。

1-8/34

# Mean, Correlation, and Covariance Functions (2/5)

## □ Properties of the autocorrelation function

✪ 因只相依於時間差，所以  $R_X(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)]$

✪  $\tau=0$  可得  $X(t)$  的均方值： $R_X(0) = E[X^2(t)]$

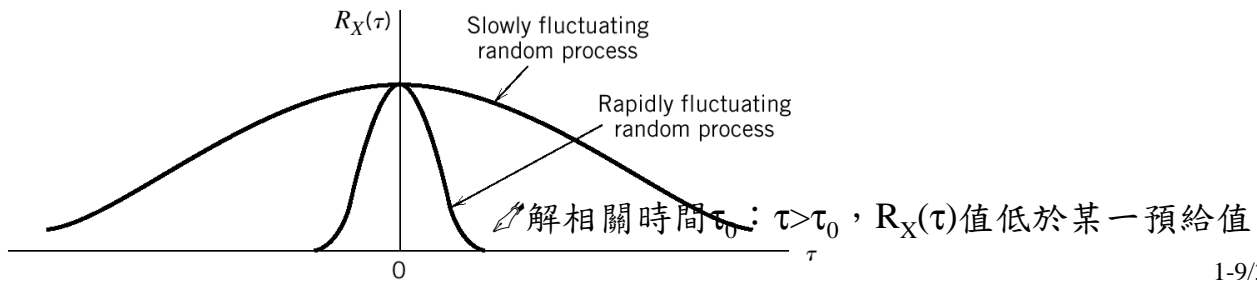
✪ 為偶函數： $R_X(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)] = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(-\tau)$

✪ 最大值在  $\tau=0$ ： $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ ，即  $-R_X(0) \leq R_X(\tau) \leq R_X(0)$

$$E[(X(t+\tau) \pm X(t))^2] = E[X^2(t+\tau)] \pm 2E[X(t+\tau)X(t)] + E[X^2(t)] = 2R_X(0) \pm 2R_X(\tau) \geq 0$$

✪ 物理意義：在  $X(t)$  兩分離  $\tau$  的隨機變數之間的相依性

✪  $X(t)$  隨時間改變愈快則當  $\tau$  增加  $R_X(\tau)$  從  $R_X(0)$  遞減較快



1-9/34

# Mean, Correlation, and Covariance Functions (3/5)

## □ Ex 1.2 Sinusoidal wave with random phase

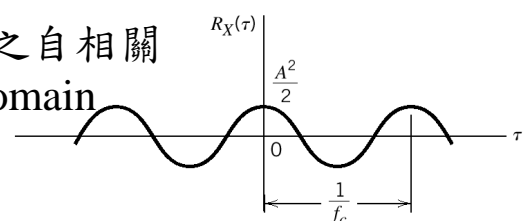
✪  $X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta)$ ,  $A$  及  $f_c$  為定值， $\Theta$  為均勻分佈， $f_\Theta(\theta) = 1/2\pi$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ; 0, o.w.

✪ 每個  $\Theta$  相對於  $X(t)$  的一個取樣函數

✪  $X(t)$  可以是接收器區域產生的載波， $\Theta$  為接收器與傳送器載波之相位差

✪  $R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau)$

✪ 總結：有隨機相位的弦波之自相關函數為另一弦波，但在  $\tau$  domain



1-10/34

# Mean, Correlation, and Covariance Functions (4/5)

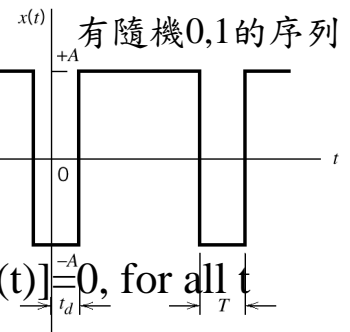
## □ Ex 1.3 Random binary wave

✿ 一些假設

✿ 1/0用振幅為+A/-A，持續時間T的脈衝

✿ 脈衝無同步，第一個完整脈衝的起始時間 $t_d$ 為均勻分佈[0,T]

✿  $(n-1)T < t - t_d < nT$ 之0/1值為相同機率  $\rightarrow E[X(t)] = 0$ , for all  $t$



✿ 求  $R_X(t_k, t_i) = E[X(t_k)X(t_i)]$

✿  $|t_k - t_i| > T$  即 $t_k$ 與 $t_i$ 不同脈衝，所以不相依，則

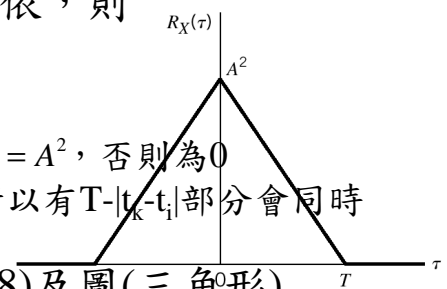
$$R_X(t_k, t_i) = E[X(t_k)X(t_i)] = E[X(t_k)]E[X(t_i)] = 0$$

✿  $|t_k - t_i| < T$  則 $t_k$ 與 $t_i$ 可能在同一脈衝

✿ 在某一 $t_d$ 時，若同脈衝則  $E[X(t_k)X(t_i)|t_d] = A^2$ ，否則為0

✿ [0,T]的 $t_d$ 中若 $t_d$ 在 $t_k \sim t_i$ 間則不同脈衝，所以有 $T - |t_k - t_i|$ 部分會同時脈，則  $E[X(t_k)X(t_i)] = A^2(1 - |t_k - t_i|/T)$

✿ 最後只與時間差 $\tau = t_k - t_i$ 有關，得(1.18)及圖(三角形)



1-11/34

# Mean, Correlation, and Covariance Functions (5/5)

## □ Cross-correlation functions

✿  $R_{XY}(t, u) = E[X(t)Y(u)], R_{YX}(t, u) = E[Y(t)X(u)]$

✿ Correlation matrix  $R(t, u) = \begin{bmatrix} R_X(t, u) & R_{XY}(t, u) \\ R_{YX}(t, u) & R_Y(t, u) \end{bmatrix}$

✿ 若個別及聯合皆stationary則  $R(\tau) = \begin{bmatrix} R_X(\tau) & R_{XY}(\tau) \\ R_{YX}(\tau) & R_Y(\tau) \end{bmatrix}$

✿ 一般非偶函數，也非在原點為最大值，但有對稱關係  $R_{XY}(\tau) = E[X(\tau)Y(0)] = E[Y(0)X(\tau)] = R_{YX}(-\tau)$

## □ Ex 1.4 Quadrature-modulated processes

✿  $X_1(t) = X(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta), X_2(t) = X(t) \sin(2\pi f_c t + \Theta), \Theta \sim [0, 2\pi]$

✿  $R_{12}(\tau) = -R_X(\tau) \sin(2\pi f_c \tau) / 2$  (1.23)

✿  $R_{12}(0) = E[X_1(t)X_2(t)] = 0$  即觀察相同時間的正交調後之  $X_1(t)$  及  $X_2(t)$  所得的隨機變數相互垂直

1-12/34

# Ergodic Processes

## □ 整體平均與時間平均

⊗ 期望值或整體平均是跨越過程的平均

⊗ 長期取樣平均或時間平均是沿著過程的平均

☞ 一個可用以估計整體平均的實際方法

☞ Stationary  $x(t)$  的DC值定義為時間平均  $\mu_x(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$

↗ 為一隨機變數相依於觀察區間及所選的取樣函數

↗ 其期望值  $E[\mu_x(T)] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[x(t)] dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mu_x dt = \mu_x$

↗ 結果時間平均為整體平均無偏壓的估測

□ 在平均為ergodic的兩個條件:  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_x(T) = \mu_x, \lim_{T \rightarrow \infty} \text{var}[\mu_x(T)] = 0$

□ 時間平均的自相關函數  $R_x(\tau, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t) dt$

⊗ 在自相關函數為ergodic:  $\lim_{T \rightarrow \infty} R_x(\tau, T) = R_x(\tau), \lim_{T \rightarrow \infty} \text{var}[R_x(\tau, T)] = 0$

□ 隨機過程要ergodic需是stationary，反之則不一定

1-13/34

# Transmission of a Random Process Through a Linear Time-Invariant Filter

## □ Mean

⊗  $\mu_Y(t) = E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)X(t-\tau_1)d\tau_1\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)E[X(t-\tau_1)]d\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)\mu_X(t-\tau_1)d\tau_1$

☞ Stationary:  $\mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)d\tau_1 = \mu_X H(0)$

☞ 輸出平均=輸入平均乘上DC響應(可想成直流)

## □ Autocorrelation

⊗  $R(t, u) = E[Y(t)Y(u)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)X(t-\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)X(u-\tau_2)d\tau_2\right]$   
 $= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)d\tau_2 E[X(t-\tau_1)X(u-\tau_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)d\tau_2 R_X(t-\tau_1, u-\tau_2)$

☞ Stationary  $R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau-\tau_1+\tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1d\tau_2$

☞ 均方值為常數  $E[Y^2(t)] = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau_2-\tau_1)d\tau_1d\tau_2$

□ 當  $X(t)$  為 stationary，由 mean 及 autocorrelation 可知  $Y(t)$  亦為 stationary

1-14/34

# Power Spectral Density (1/6)

□ 意義  $E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(j2\pi f\tau_1) df \right] h(\tau_2) R_X(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df H(f) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 h(\tau_2) \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau_2 - \tau_1) \exp(j2\pi f\tau_1) d\tau_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df H(f) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 h(\tau_2) \exp(j2\pi f\tau_2) \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df H(f) H^*(f) \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} df |H(f)|^2 S_X(f)$$

✿ 输出的均方值 = 功率频谱密度

乘上大小响应的平方积分所有频率

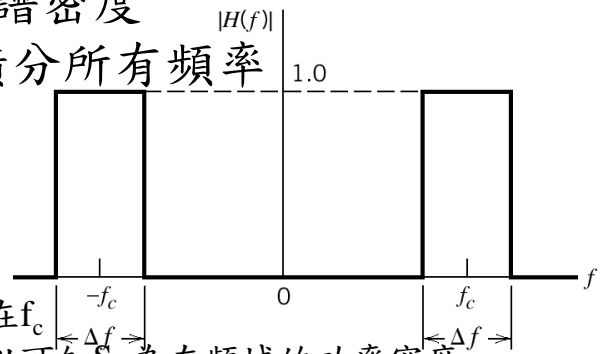
✿ 物理意义

✍ 假设如图且频宽够小则

$$\nearrow E[Y^2(t)] \approx (2\Delta f) S_X(f_c)$$

✍ 左为输出功率，右为  $S_X$  在  $f_c$  的值乘上频率范围，所以可知  $S_X$  为在频域的功率密度

✍ 功率频谱密度单位为 W/Hz



1-15/34

# Power Spectral Density (2/6)

## □ Properties of the power spectral density

✿ Einstein-Wiener-Khintchine 关系： $R_X(\tau) \leftrightarrow S_X(f)$

✍ Property 1:  $S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau$

✍ Property 2:  $E[X^2(t)] = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$  (意义：功率)

✍ Property 3:  $S_X(f) \geq 0$ ，因  $2\Delta f S_X(f_c) \approx E[Y^2(t)] \geq 0$  或说无负功率

✍ Property 4:  $S_X(f) = S_X(-f)$ ，利用  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

✍ 实数值之随机过程的功率频谱密度为偶函数

✍ Property 5: 适当正规化的功率频谱密度通常具功率密度函数特性(值为非负且全面积为1)

✍ 例以全面积做正规化： $p_X(f) = \frac{S_X(f)}{\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df}$

1-16/34

## Power Spectral Density (3/6)

### □ Ex 1.5 Sinusoidal Wave with Random Phase

✿  $X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta)$  ,  $\Theta \sim [-\pi, \pi]$  ,  $R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau)$

☞  $S_X(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$  , 其全面積為  $A^2/2$

### □ Ex 1.6 Random Binary Wave

✿ 1/0 用振幅為  $+A/-A$  , 持續時間  $T$  的脈衝

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2(1 - \frac{|\tau|}{T}), & |\tau| < T \\ 0, & |\tau| \geq T \end{cases}$$

☞  $S_X(f) = A^2 T \text{sinc}^2(fT)$  , 其全面積為  $A^2$

☞ 能量頻譜密度：Fourier 轉換大小的平方

✍ 振幅  $A$  時間  $T$  的方塊波之能量頻譜密度： $E_X(f) = A^2 T^2 \text{sinc}^2(fT) = S_X(f)T$

\* 功率頻譜密度為能量頻譜密度除以時間

1-17/34

## Power Spectral Density (4/6)

### □ Ex 1.7 Mixing of a Random Process with a Sinusoidal Process

✿ 混頻即相乘： $Y(t) = X(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta)$  ,  $\Theta$  物理意義表起始時間為任意選擇

☞  $R_Y(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos(2\pi f_c \tau)$  ,  $S_Y(f) = \frac{1}{4} [S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c)]$  (意義)

### □ Relation among the power spectral densities of the input and output random processes

$$S_Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau_1 d\tau_2 d\tau$$

$$= H(f) H^*(f) S_X(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

1-18/34

# Power Spectral Density (5/6)

## □ Relation among the power spectral density and the magnitude spectrum of a sample function

✿ 截段取樣函數之Fourier轉換  $X(f, T) = \int_{-T}^T x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$

✿  $\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{2T} |X(f, T)|^2$  (依定義, 變換變數)

✿ Periodogram  $\frac{1}{2T} |X(f, T)|^2$ : 統計學者用以尋找週期性, 但有點誤稱

✿  $R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} R_x(\tau, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} |X(f, T)|^2 \exp(j2\pi f\tau) df$

✿ Periodogram極限不收斂, 所以極限與積分不可互換

✿ 取期望值則可以互換

$$R_X(\tau) = E[R_X(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} E[|X(f, T)|^2] \exp(j2\pi f\tau) df = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X(f, T)|^2] \right\} \exp(j2\pi f\tau) df$$

✿ 最後得  $S_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X(f, T)|^2]$

## □ Cross-spectral densities

✿  $R_{XY}(\tau) \leftrightarrow S_{XY}(f), R_{YX}(\tau) \leftrightarrow S_{YX}(f)$ ,  $S_{XY}(f), S_{YX}(f)$  不一定是實數

✿  $S_{XY}(f) = S_{YX}(-f) = S_{YX}^*(f)$  (因  $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$ )

1-19/34

# Power Spectral Density (6/6)

## □ Example 1.8: X(t), Y(t) zero mean, stationary

✿  $Z(t) = X(t) + Y(t)$  則  $R_Z(t, u) = R_X(t, u) + R_{XY}(t, u) + R_{YX}(t, u) + R_Y(t, u)$

✿ 若 X(t), Y(t) 也聯合stationary  $R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) + R_Y(\tau)$

✿  $S_Z(f) = S_X(f) + S_{XY}(f) + S_{YX}(f) + S_Y(f)$

✿ 若 X(t), Y(t) uncorrelated:  $S_Z(f) = S_X(f) + S_Y(f)$ , 因  $S_{XY}(f) = 0, S_{YX}(f) = 0$

✿ 即多個 zero mean, stationary, uncorrelated 的隨機過程之和的功率頻譜密度等於各別功率頻譜密度之和

## □ Example 1.9: V(t) = X(t) \* h<sub>1</sub>(t), Z(t) = Y(t) \* h<sub>2</sub>(t)

✿  $R_{VZ}(t, u) = E[V(t)Z(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) h_2(\tau_2) R_{XY}(t - \tau_1, u - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$

✿ X(t), Y(t) 聯合stationary 則  $R_{VZ}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) h_2(\tau_2) R_{XY}(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$

✿ 取Fourier轉換則  $S_{VZ}(f) = H_1(f) H_2^*(f) S_{XY}(f)$  (使用同1.57的技巧)

1-20/34

# Gaussian Process (1/3)

## □前言

✿ 線性泛函數  $Y = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)X(t)dt$  VS. 線性函數  $Y = \sum_{i=1}^N a_i X_i$

☞ 一組  $X_i$  值即定一個線性函數值

✍ 值域為座標空間的一個範圍

☞ 泛函數的值則需視引數函數的整個過程

✍ 值域為一組允許函數

✿ 若任何  $g(t)$  使  $Y$  為高斯分佈，則  $X(t)$  為高斯程序

☞ 即若任何  $X(t)$  的線性泛函數為高斯隨機變數

☞ 高斯分佈 (1.80)，正規化成變異數=1，表為  $N(0,1)$

☞ 高斯過程的兩個優點：易分析、適合一般物理現象

1-21/34

# Gaussian Process (2/3)

## □Central limit theorem

✿ 觀察一組 iid 的  $X_i$ ，正規化  $Y_i = \frac{1}{\sigma_x}(X_i - \mu_x)$ ，定義  $V_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i$

☞ 中央極限定理：當  $N$  夠大時， $V_N$  趨近  $N(0,1)$

(若直接  $V_N = \sum_{i=1}^N X_i$ ，則趨近  $N(N\mu_x, N\sigma_x^2)$ )

## □Properties of a Gaussian process

✿ Property 1: 高斯輸入線性系統，輸出亦為高斯

$$\begin{aligned} \text{☞ } Z &= \int_0^{\infty} g_Y(t)Y(t)dt = \int_0^{\infty} g_Y(t) \int_0^T h(t-\tau)X(\tau)d\tau dt \\ &= \int_0^T X(\tau)d\tau \int_0^{\infty} g_Y(t)h(t-\tau)dt = \int_0^T g(\tau)X(\tau)d\tau \end{aligned}$$

☞ 不一定要非時變的系統

1-22/34

# Gaussian Process (3/3)

✿ Property 2: X(t) Gaussian則其取樣為聯合高斯

✎ pdf由 $\mu_{X(t_i)} = E[X(t_i)]$ 及 $C_X(t_k, t_i) = E[(X(t_k) - \mu_{X(t_k)})(X(t_i) - \mu_{X(t_i)})]$ 決定，為 $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \Delta^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$

✎ 可延伸至兩個以上的隨機過程：X(t)與Y(t)為聯合高斯，若其隨機變數的複合集合為聯合高斯

✎ 其pdf尚需 $E[(X(t_i) - \mu_{X(t_i)})(Y(u_k) - \mu_{Y(u_k)})] = R_{XY}(t_i, u_k) - \mu_{X(t_i)}\mu_{Y(u_k)}$

✿ Property 3: 若為stationary則為SS (由上可得)

✿ Property 4: 若取樣所得的隨機變數為不相關

( $E[(X(t_i) - \mu_{X(t_i)})(Y(u_k) - \mu_{Y(u_k)})] = 0, i \neq k$ )，則為不相依

✎ 不相關，所以 $\Sigma$  diagonal,  $\Delta = \sigma_1^2 \dots \sigma_n^2$ ,  $\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$

$= \exp\left[\prod_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right)\right]$ ,  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$

1-23/34

# Noise (1/6)

## □ 前言

✿ 雜訊：一般指在不要的訊號，其在通訊系統內會破壞訊號傳輸或處理且無法完全控制

✎ 系統外：大氣、銀河、人為

✎ 系統內：電路中電流或電壓的自然晃動

✎ 最常見的兩種：擊發雜訊及熱雜訊

## □ Shot noise

✿ 如在二極體及電晶體離散的電流本質

✎ 例如，光偵測器電路：由於固定強度來源的突然光線，使陰極射出一個電子而有一電流脈衝

✎ 電子在隨機時間 $\tau_k$ 射出，全部電流可模型成 $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - \tau_k)$ 為stationary稱為擊發雜訊，其中 $h(t - \tau_k)$ 為 $\tau_k$ 時的電流脈衝

1-24/34

# Noise (2/6)

✿ [0,t]射出的電子數N(t)

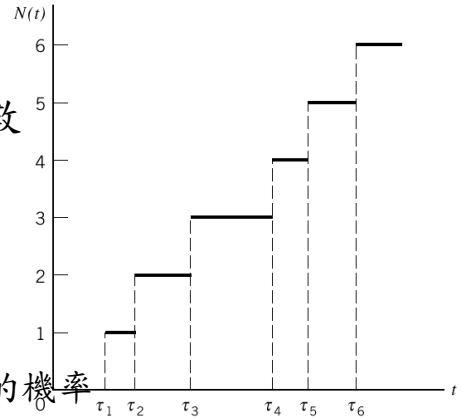
✎ 離散的隨機過程,圖為一取樣函數

✎ [t,t+t<sub>0</sub>]內的電子數v

✎  $E[v] = \lambda t_0$ ,  $\lambda$ 為此過程之速率

✎  $v = N(t+t_0) - N(t)$ 為Poisson分佈, 平均值等於 $\lambda t_0$

✎  $P(v=k) = \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} e^{-\lambda t_0}$ 為[t,t+t<sub>0</sub>]內射出k個的機率



✿ X(t)詳細的統計特性不好求,前兩個動量如下

✎ 平均值  $\mu_x = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$

✎ 自相變異數(Campbell's定理)  $C_x(\tau) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t+\tau) dt$

✎ 若h(t)為方形波,振幅A,持續時間T,則平均值為 $\lambda AT$ , 自相變異數  $C_x(\tau) = \begin{cases} \lambda A^2(T-|\tau|), & |\tau| < T \\ 0 & |\tau| \geq T \end{cases}$ , 圖形類似圖1.7

# Noise (3/6)

## □ Thermal noise

✿ 電子雜訊源於導體內電子的隨機運動

✎ 在頻寬 $\Delta f$  Hz內,量跨在電阻R ohms之熱雜訊電壓 $V_{TN}$  volts, 其均方值  $E[V_{TN}^2] = 4kTR\Delta f$  volts<sup>2</sup>

✎ T為絕對溫度, k為Boltzmann's常數 $1.38 \times 10^{-23}$  j/°K

✎ Thevenin等效電路: 無雜訊電阻R及電源具均方值 $E[V_{TN}^2]$

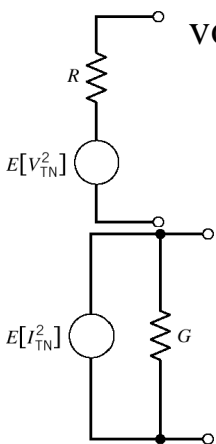
✎ Norton等效電路:  $E[I_{TN}^2] = E[V_{TN}^2]/R^2 = 4kTG\Delta f$  amps<sup>2</sup>, 電導 $G=1/R$

✎ 電阻內電子數非常多且獨立,依中央極限定理,熱雜訊為具0均值的高斯分佈

✎ 可得的雜訊功率= $kT\Delta f$

\* 最大功率傳輸定理: 具內阻R之電源,傳輸功率至負載電阻 $R_l$ ,最大可能傳輸功能發生在 $R=R_l$

\* 可得功率: 在匹配條件下,送至負載的功率



# Noise (4/6)

## White noise

☞ 通訊系統的雜訊分析常用稱為白雜訊的理想形式

☞ 功率頻譜密度  $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$  與頻率不相依

☞  $\frac{N_0}{2}$  形容詞白來自白光在所有可見光頻率具等量

☞  $N_0$  (W/Hz) =  $kT_e$ : 對應指在通訊系統接收器的輸入級

\* 等效雜訊溫度: 使在一雜訊阻抗在系統輸出產生的可得雜訊功率與真正系統所有雜訊源產生的相同。只與系統參數相依

☞ 自相關函數  $R_w(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ : 只在  $\tau=0$  有  $\delta(\tau)$ , 其餘無值

\* 白雜訊任二個不同取樣為不相關, 若高斯則不相依, 所以白高斯雜訊代表 randomness

☞ 其平均功率為無限大, 故實際上不存在

☞ 數學特性單純, 所以在統計系統的分析上有用

☞ 如同 delta 函數在線性系統分析, 需經有限頻寬系統才能顯出效果

☞ 結果, 只要輸入雜訊的頻寬真的大於系統的頻寬, 則可模型雜訊過程為白雜訊

1-27/34

# Noise (5/6)

## Ex 1.10 Ideal low-pass filtered white noise

☞ 具 0 均值的白雜訊其功率頻譜密度  $N_0/2$

☞ 低通濾波器頻寬為  $B$ , 大小響應為 1

☞ 輸出雜訊  $n(t)$  的功率頻譜密度  $S_N(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}(\frac{f}{2B})$

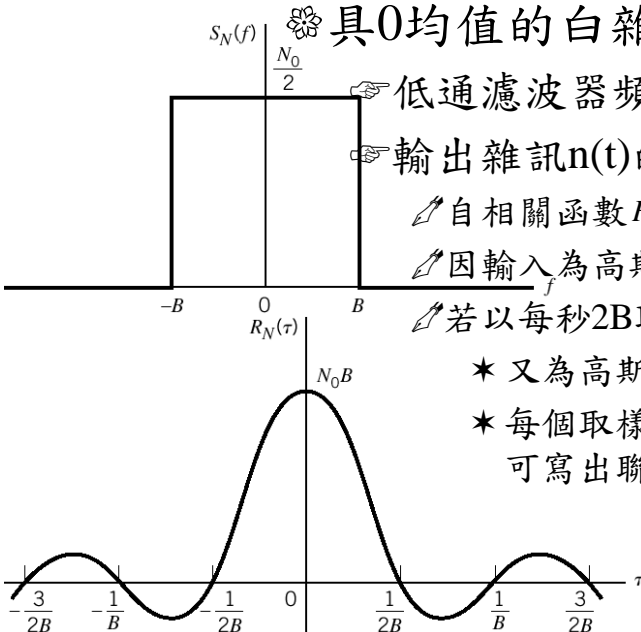
☞ 自相關函數  $R_N(\tau) = N_0 B \text{sinc}(2B\tau)$

☞ 因輸入為高斯, 所以輸出亦為高斯 (高斯 property 1)

☞ 若以每秒  $2B$  取樣, 由自相關圖可知其不相關

\* 又為高斯, 所以不相依, 則聯合 pdf = 個別 pdf 乘積

\* 每個取樣之 mean = 0, variance (= correlation) =  $N_0 B$  (則可寫出聯合 pdf)



1-28/34

# Noise (6/6)

## □ Ex 1.11 Correlation of white noise with a sinusoidal wave

✿ 相關器白高斯雜訊  $W(t)$  之功率頻譜密度  $N_0/2$  與  $\sqrt{2/T} \cos(2\pi f_c t)$ ，輸出為  $w'(t) = \sqrt{2/T} \int_0^T w(t) \cos(2\pi f_c t) dt$

☞ 因  $W(t)$  均值 = 0，所以  $W'(t)$  均值亦為 0

☞  $W'(t)$  的自相變異數：其中假設  $f_c$  為  $1/T$  的整數倍

$$\begin{aligned} C_{W'}(t_1, t_2) &= E[W'(t_1)W'(t_2)] = \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^T R_w(t_1, t_2) \cos(2\pi f_c t_1) \cos(2\pi f_c t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^T \delta(t_1 - t_2) \cos(2\pi f_c t_1) \cos(2\pi f_c t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{2}{T} \int_0^T \cos^2(2\pi f_c t_2) dt_2 = \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

1-29/34

# Narrowband Noise

## □ 通訊系統的接收器常用提供預先處理

✿ 可以是窄頻濾波器

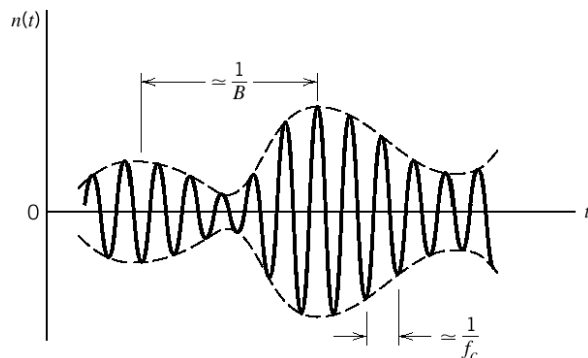
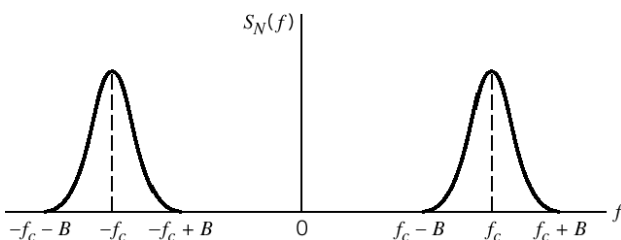
☞ 頻寬夠大足以讓調後訊號通過而無失真

☞ 但不可以太大以致引入額外的雜訊

✍ 如此輸出的雜訊過程為窄頻雜訊，如圖

✍ 其雜訊分析可用兩種表示法

- \* 同向及正交
- \* 外封及相位



1-30/34

# Representation of Narrowband Noise in Terms of In-phase and Quadrature Components (1/2)

## 前言

窄頻雜訊  $n(t)$  可以  $n_I(t)$  及  $n_Q(t)$  表為標準形式

Analyzer 與 Synthesizer

$n_I(t)$  及  $n_Q(t)$  重要特性

$n_I(t)$  及  $n_Q(t)$  均值為 0

若  $n(t)$  為高斯，則  $n_I(t)$  及  $n_Q(t)$  為聯合高斯

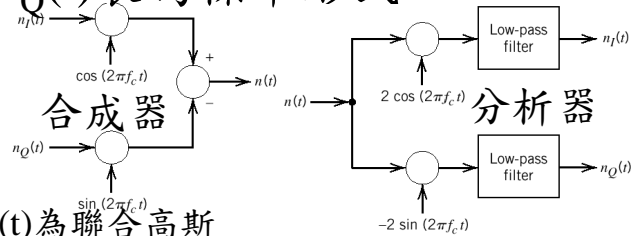
若  $n(t)$  為 stationary，則  $n_I(t)$  及  $n_Q(t)$  為聯合 stationary

$n_I(t)$  及  $n_Q(t)$  的功率頻譜密度(由分析器)皆為  $S_N(f-f_c) + S_N(f+f_c)$ ,  $-B \leq f \leq B$ ; 0, otherwise.  $S_N(f)$  頻帶為  $f_c - B \leq |f| \leq f_c + B$  且  $f_c > B$

$n_I(t)$  及  $n_Q(t)$  的變異數與  $n(t)$  相同  $\sigma^2 = R(0) = \int S(f) df$

$n_I(t)$  及  $n_Q(t)$  交叉頻譜密度為虛數  $S_{N_I N_Q}(f) = -S_{N_Q N_I}(f) = j[S_N(f+f_c) - S_N(f-f_c)]$   $-B \leq f \leq B$ ; 0, otherwise

若  $n(t)$  為高斯且  $S_N(f)$  對稱於  $f_c$ ，則  $n_I(t)$  及  $n_Q(t)$  不相依



1-31/34

# Representation of Narrowband Noise in Terms of In-phase and Quadrature Components (2/2)

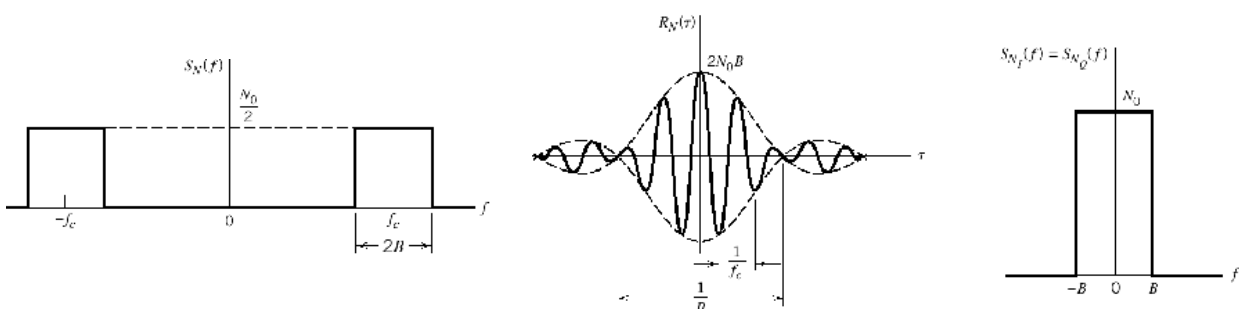
## Ex 1.12 Ideal band-pass filtered white noise

白高斯雜訊均值 0，功率頻譜密度  $N_0/2$

經大小響應為 1 之帶通濾波器，輸出如圖

自相關函數： $R_N(\tau) = N_0 B \text{sinc}(2B\tau) [\exp(-j2\pi f_c \tau) + \exp(j2\pi f_c \tau)] = 2N_0 B \text{sinc}(2B\tau) \cos(j2\pi f_c \tau)$

$n_I(t), n_Q(t)$  的自相關函數： $S_N(f) \rightarrow S_{N_I}(f), S_{N_Q}(f) \rightarrow R_{N_I}(\tau) = R_{N_Q}(\tau) = 2N_0 B \text{sinc}(2B\tau)$



1-32/34

# Representation of Narrowband Noise in Terms of Envelope and Phase Components

$$n(t) = r(t) \cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

$r(t)$  是外封， $\psi(t)$  是相位，其機率分佈由  $N_I, N_Q$  求得

$N_I$  與  $N_Q$  為獨立高斯，pdf 為  $f_{N_I, N_Q}(n_I, n_Q) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{n_I^2 + n_Q^2}{2\sigma^2}\right]$

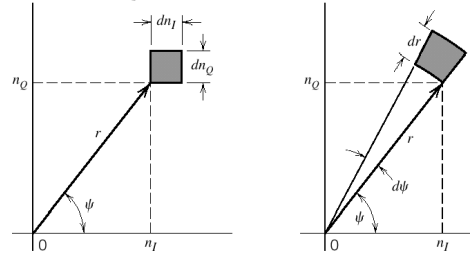
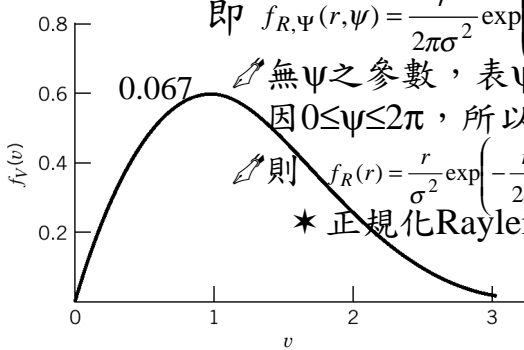
座標轉換： $n_I = r \cos \psi$ ， $n_Q = r \sin \psi$ ， $dn_I dn_Q = r dr d\psi$ ，則

$$f_{N_I, N_Q}(n_I, n_Q) dn_I dn_Q = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] r dr d\psi = f_{R, \Psi}(r, \psi) dr d\psi$$

即  $f_{R, \Psi}(r, \psi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right]$   
 無  $\psi$  之參數，表  $\psi$  之 pdf 為常數，  
 因  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ，所以  $f_\psi(\psi) \sim [0, 2\pi]$

則  $f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right]$ ， $r \geq 0$ ；otherwise. 此即 Rayleigh 分佈

\* 正規化 Rayleigh 分佈：
$$\begin{cases} v = \frac{r}{\sigma} \\ f_V(v) = \sigma f_R(r) \end{cases} \Rightarrow f_V(v) = \begin{cases} v \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right), & v \geq 0 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$



# Sine Wave Plus Narrowband Noise

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t) + n(t) = n'_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t), \text{ where } n'_I(t) = A + n_I(t)$$

$n(t)$  為高斯，均值 0，變異數  $\sigma^2$

$n'_I(t)$  and  $n_Q(t)$  為高斯且不相依

$n'_I(t)$  and  $n_Q(t)$  的均值分別為 A 及 0

$n'_I(t)$  and  $n_Q(t)$  的變異數皆為  $\sigma^2$

聯合 pdf： $f_{N'_I, N_Q}(n'_I, n_Q) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(n'_I - A)^2 + n_Q^2}{2\sigma^2}\right]$

變數變換  $r(t) = \{(n'_I(t))^2 + n_Q^2(t)\}^{1/2}$ ， $\psi(t) = \tan^{-1}\left[\frac{n_Q(t)}{n'_I(t)}\right]$   $f_{R, \Psi}(r, \psi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2 + A^2 - 2Ar \cos \psi}{2\sigma^2}\right]$

$R$  和  $\Psi$  相依， $f_R(r)$  為 Rician 分佈

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R, \Psi}(r, \psi) d\psi = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma^2}\right] \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{Ar}{\sigma^2} \cos \psi\right) d\psi = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{Ar}{\sigma^2}\right)$$

正規化 Rician  $v = \frac{r}{\sigma}$ ， $a = \frac{A}{\sigma}$ ， $f_V(v) = \sigma f_R(r) \Rightarrow f_V(v) = v \exp\left(-\frac{v^2 + a^2}{2}\right) I_0(av)$

\* 當  $a=0$ ，Rician 變成 Rayleigh

\* 當  $a$  夠大，在  $v=a$  處趨近高斯

