# AULA 9 - POTENCIAL ELÉTRICO

A lei de Newton da Gravitação e a lei de Coulomb da eletrostática são matematicamente idênticas, então os aspectos gerais discutidos para a força gravitacional podem ser aplicadas para o caso da força eletrostática.

Como a força eletrostática é uma **FORÇA CONSERVATIVA**, podemos atribuir uma energia potencial elétrica U para o sistema.

$$\Delta U = U_f - U_i = -W.$$

Quando o sistema muda de uma configuração inicial para um estado final, a força eletrostática realiza um **TRABALHO** sobre as partículas.

O trabalho realizado pela força eletrostática independe do caminho. Ao invés de trabalharmos com a energia potencial eletrostática, definimos a energia potencial por unidade de carga

$$V = \frac{U}{q}.$$

A diferença de potencial entre dois pontos

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f}{q} - \frac{U_i}{q} = \frac{\Delta U}{q}.$$

que equivale a escrever

$$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{W}{q}$$

Por conveniência, se adotarmos $U_i=0$ no infinito como nossa energia potencial de referência, então o potencial no infinito também será nulo.

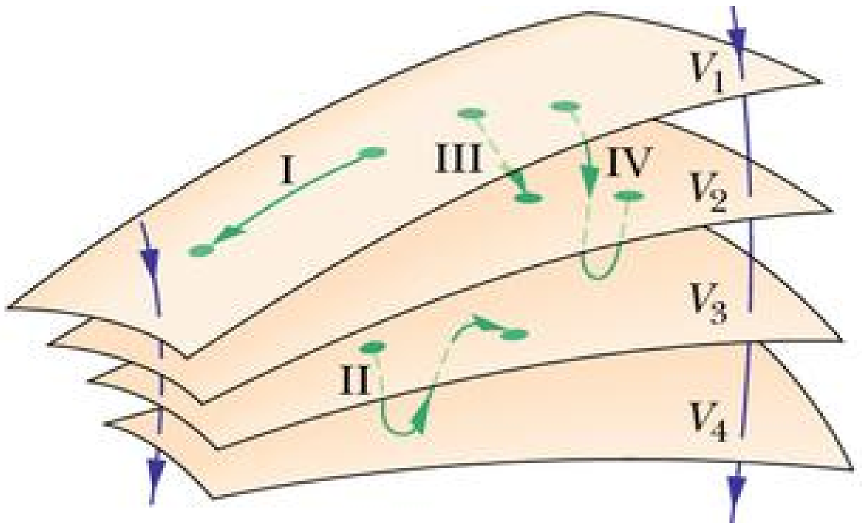
$$V = -\frac{W_\infty}{q}$$

Trabalho realizado pelo campo elétrico sobre uma particula carregada quando se move do infinito ate uma posição final.

# SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS

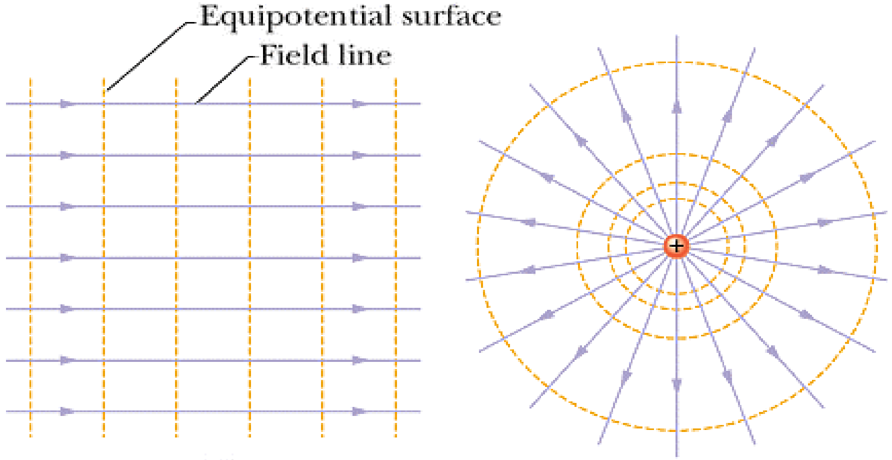
Pontos que possuem o mesmo potencial elétrico formam uma **SUPERFÍCIE EQUIPOTENCIAL**. O trabalho realizado por um campo elétrico sobre uma partícula quando ela se move entre dois pontos localizados sobre a mesma equipotencial é nulo.

Considere uma família de superfícies equipotenci-ais associada a um campo elétrico devido a uma distribuição de cargas.



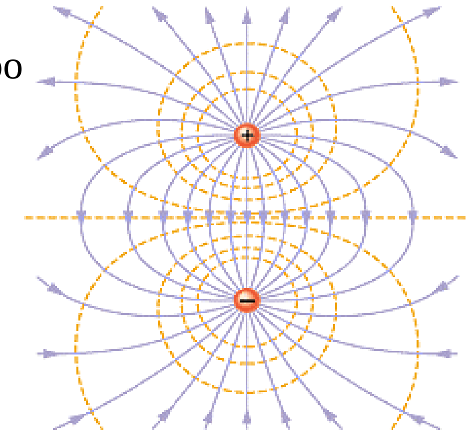

Trabalho realizado pelo campo elétrico sobre uma partí-cula carregada quando  se move de um extremo a outro.

As superfícies equipotenciais são sempre perpendiculares às linhas de campo elétrico.




(a)  (b)

Linhas de campo elétrico (linha cheia) e cortes transversais de superfícies equipotenciais (linhas tracejadas)



(c)

(a) Campo: Uniforme

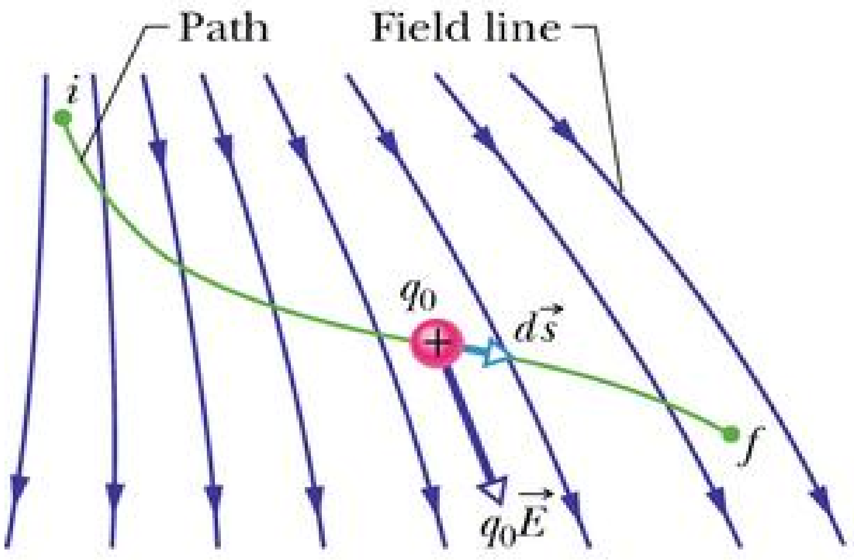
(b) carga pontual

(c) dipólo elétrico

# CÁLCULO DO POTENCIAL A PARTIR DO CAMPO ELÉTRICO

Pode-se calcular a diferença de potencial elétrico entre dois pontos em um campo elétrico se conhecermos o vetor campo elétrico ao longo de qualquer trajetória que ligue esses pontos.

Considere um campo elétrico arbitrário e uma carga de prova $q_0$, que se move em uma trajetória entre os pontos i e f.




Em qualquer ponto da trajetória atua uma força F.

O trabalho realizado pelas partículas no deslocamento ds

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

$$dW = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

$$W = q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

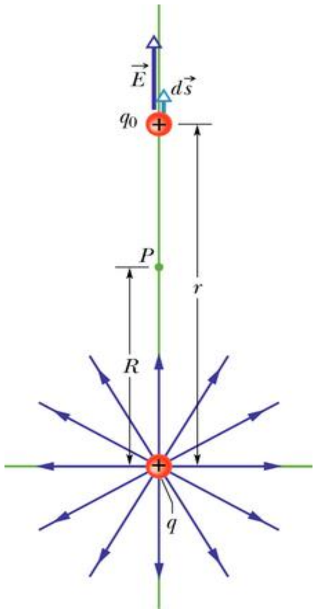
A diferença de potencial elétrico entre dois pontos quaisquer em um campo elétrico

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Assim, se o campo elétrico for conhecido em todos os pontos de uma certa região do espaço, podemos calcular a diferença de potencial entre dois pontos quaisquer.

# POTENCIAL DEVIDO A UMA CARGA PUNTIFORME

A carga positiva *q* produz um campo elétrico **E** e um potencial elétrico V no ponto P. Considere um ponto P distante r da carga fixa q. Suponha que movemos a carga de prova $q_0$ desde um ponto inicial até um ponto final




$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cos\theta \, ds.$$

$\theta = 0$ e $\cos \theta = 1$

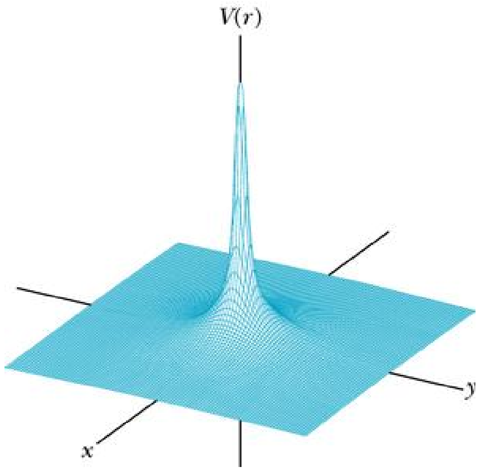
$$V_f - V_i = -\int_R^\infty E \, dr.$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

$$0 - V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r}\right]_R^\infty$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Potencial elétrico *V(r)* devido a uma carga pontual localizada na origem de um plano xy.




**Potencial devido a um grupo de cargas puntiformes**

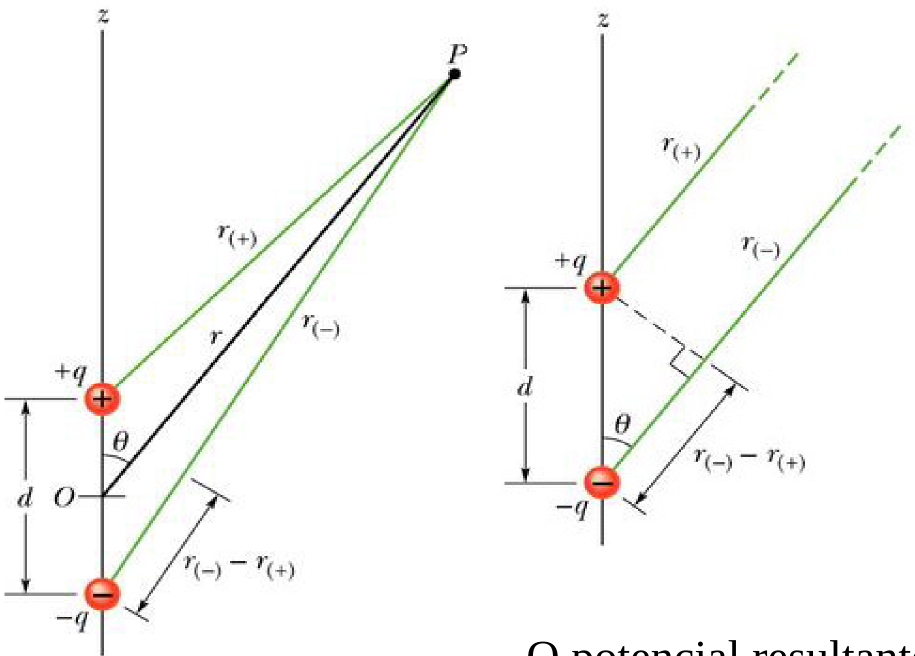
Pode ser encontrado através do **PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO**

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}$$

$q_i$ é o valor da i-ésima carga pontual

# POTENCIAL DEVIDO A UM DIPÓLO ELÉTRICO

Agora vamos determinar o potencial em um ponto P arbitrário devido a um campo elétrico.




O potencial resultante

$$V = \sum_{i=1}^{2} V_i = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_{(+)}} + \frac{-q}{r_{(-)}}\right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}.$$

Os dipólos que ocorrem na natureza, como o de algumas moléculas são bem pequenos, por isto estamos interessados apenas em pontos que estão bem distantes do dipólo, de modo que *r* >> *d*.

Nestas condições,

$$r_{(-)} - r_{(+)} \approx d\cos\theta \qquad r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2.$$

Se substituirmos as aproximações

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

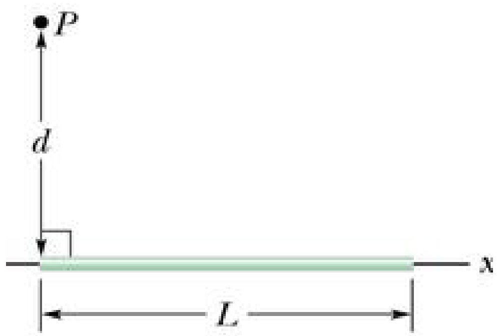
# POTENCIAL DEVIDO A UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE CARGA

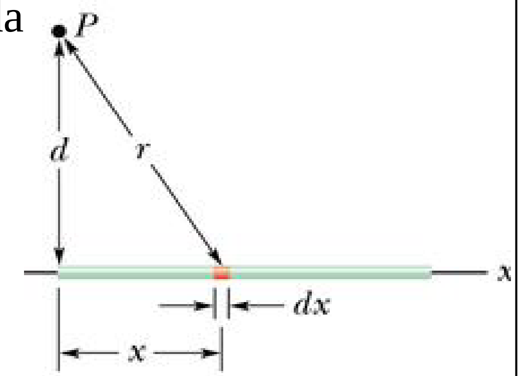
Se uma distribuição de carga q é contínua, escolhe-se um elemento diferencial de carga dq, e determina-se o potencial dV em um ponto P devido à dq, e então integra-se sobre toda a distribuição de carga.

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r}$$

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}.$$

**Linha de Carga** - Uma haste fina não condutora de comprimento L possui uma carga positiva de densidade linear uniforme λ. Determine o potencial elétrico no ponto P, a uma distância perpendicular d da extremidade esquerda da




Considere um elemento diferencial *dx* da haste, com carga diferencial *dq* = λ*dx*. O potencial

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{\left(x^2 + d^2\right)^{1/2}}.$$

Tomando *V* = *0* no infinito

$$V = \int dV = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{\left(x^2 + d^2\right)^{1/2}}dx$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx}{\left(x^2 + d^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln\left(x + \left(x^2 + d^2\right)^{1/2}\right)\right]_0^L$$

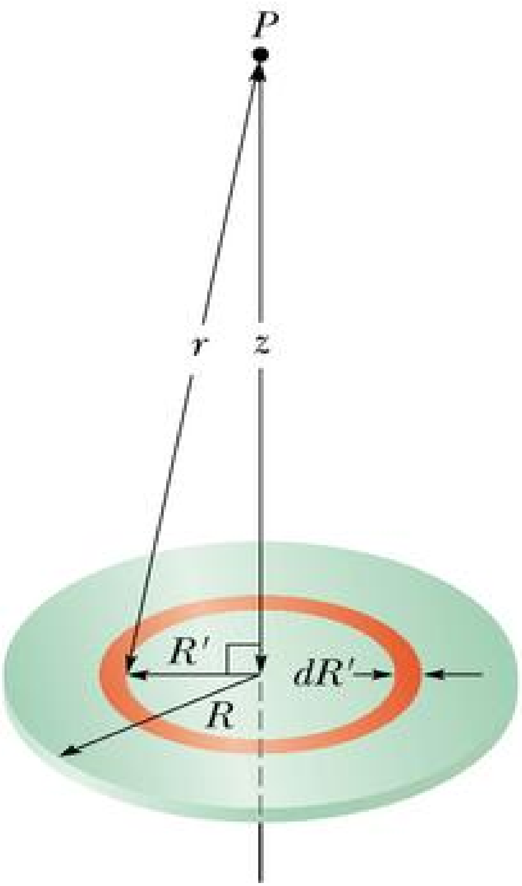
$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln\left(L + \left(L^2 + d^2\right)^{1/2}\right) - \ln d\right].$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{L + \left(L^2 + d^2\right)^{1/2}}{d}\right].$$

# POTENCIAL DEVIDO A UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE CARGA

**Disco carregado**

Vamos deduzir uma expressão para *V(z)*, o potencial elétrico em qualquer ponto do eixo central.




Considere um elemento diferencial formado por um anel plano de raio R' e espessura radial dR'

$$dq = \sigma\left(2\pi R'\right)\left(dR'\right),$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\left(2\pi R'\right)\left(dR'\right)}{\sqrt{z^2 + R'^2}}.$$

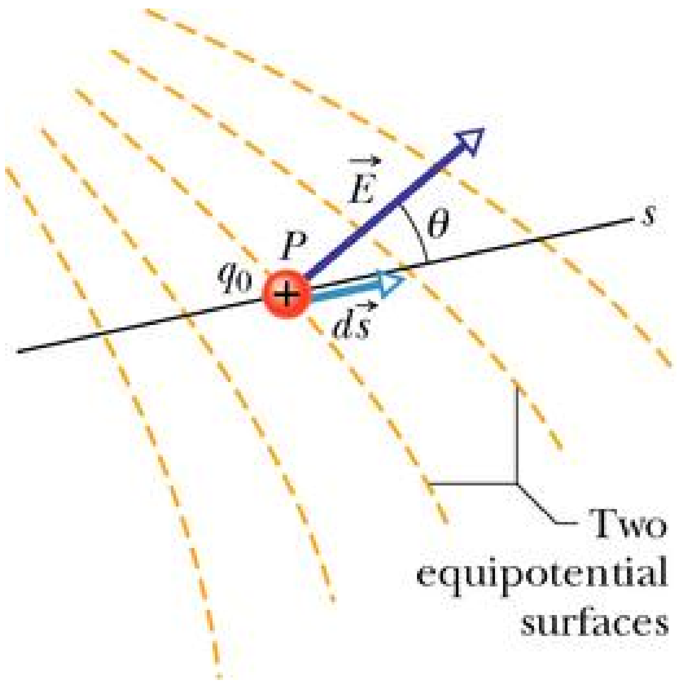
Para determinarmos o potencial resultante em P somando as contribuições de todas as fatias de *R' = 0* até *R' = R.*

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{R'\,dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right).$$

# CALCULANDO O CAMPO A PARTIR DO POTENCIAL

Suponha que a carga de prova $q_0$ se move em um deslocamento **ds** de uma superfície equipotencial até outra superfície adjacente.




O trabalho que o campo realiza durante o deslocamento é $dW = - q_0\, dV$. Por outro lado, o trabalho também pode ser escrito como $q_0$ ***E . ds***

$$-q_0 dV = q_0 E(\cos\theta) ds,$$

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{ds}.$$

Como E $\cos\theta$ é a componente de **E** na direção de d**s**, então

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Se assumirmos o eixo s como sendo sucessivamen-te os eixos *x*, *y e z*

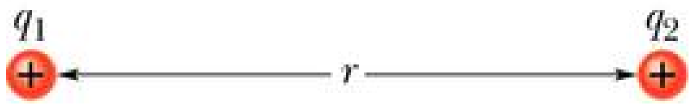
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

*Assim, se conhecermos V(x,y,z) para todos os pontos na região ao redor de uma distribuição de carga, podemos determinar as componentes de E em qualquer ponto, tomando as suas derivadas parciais.*

# ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA DE UM SISTEMA DE CARGAS

A energia potencial elétrica de um sistema de cargas pontuais fixas é igual ao trabalho que deve ser realizado por um agente externo para reunir o sistema, trazendo cada carga de uma distância infinita.

Suponha o sistema de duas cargas fixas mostrada abaixo.




Para determinarmos a energia potencial elétrica deste sistema de duas cargas precisamos construir mentalmente o sistema, partindo de duas cargas infinitamente distantes, e em repouso.

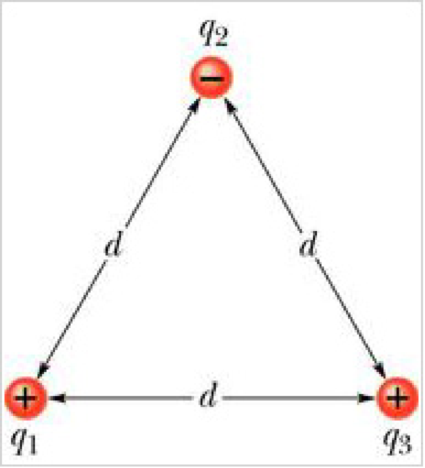
Quando trazemos $q_1$ do infinito e fixamos não realizamos nenhum trabalho, pois nenhuma força eletrostática atua sobre $q_1$. Quando trazemos a carga $q_2$, precisamos realizar um certo trabalho, W = $q_2$V uma vez que $q_1$ exerce força eletrostática sobre $q_2$. V é o potencial criado por $q_1$ no ponto onde colocamos $q_2$

$$U = W = q_2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}.$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r}.$$

## Para um sistema de três cargas

Considere o sistema de três cargas pontuais mantidas por forças fixas não indicadas.




A energia potencial é igual ao trabalho realizado para reunir o sistema, trazendo cada carga de uma distância infinita. Começamos a construir o sistema trazendo uma das cargas pontuais, $q_1$. Trazemos em seguida a carga $q_2$. A energia potencial associada ao par $q_1$ e $q_2$ é $U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d}$.

O trabalho realizado para trazer $q_3$ do infinito é igual a soma do trabalho que devemos realizar para trazer $q_3$ para perto de $q_2$ e $q_1$

$$W_{13} + W_{23} = U_{13} + U_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 q_3}{d}.$$

A energia potencial total do sistema de três cargas é a soma das energia potenciais associadas aos três pares de cargas.

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$