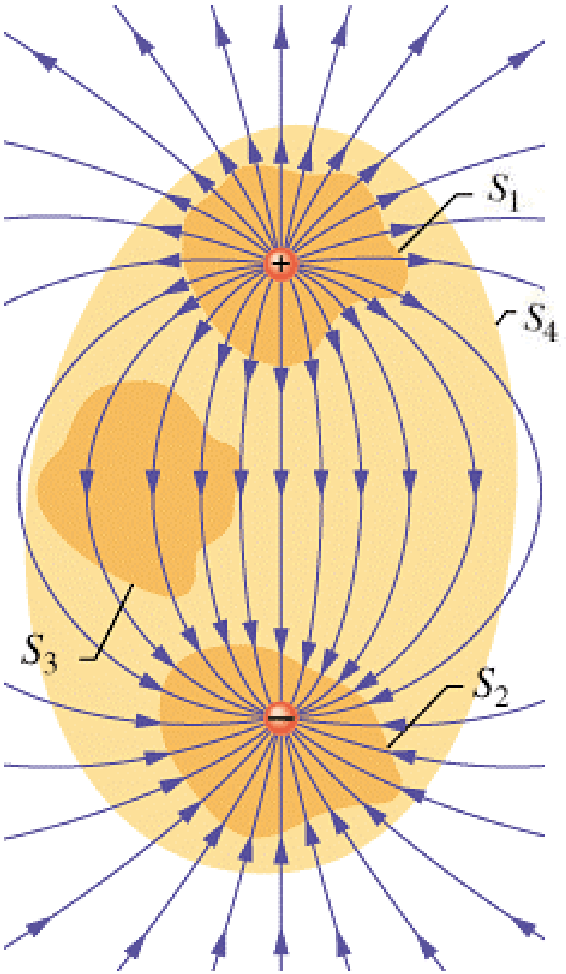
AULA 5 – LEI DE GAUSS

Vimos até o momento, que podemos utilizar a Lei de Coulomb para encontrar E em diversos pontos, desde que se conheça o suficiente sobre a distribuição de cargas responsáveis pelo campo.

Este método funciona sempre, mas é muito trabalhoso.

A Lei de Coulomb pode ser expressa sob uma outra forma chamada de Lei de Gauss. Empregando-se esta nova formulação os cálculos não são tão trabalhosos, porém o número de problemas que pode ser resolvido através dela é muito pequeno.



Considere uma superfície de forma arbitrária em torno de um dipólo. O número de linhas do campo elétrico que provém da carga positiva, cortam a superfície e é exatamente igual ao número de linhas do campo que terminam na carga negativa.

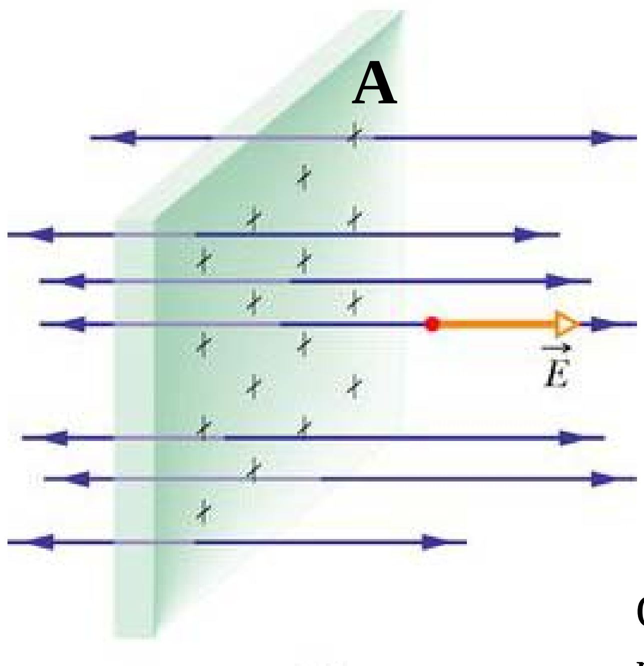
Se contarmos o número de linhas do campo elétrico que saem através da superfície como positivo, e o número das que entram negativo, o número líquido das que saem e entram é nulo.

Quando a superfície envolve outros tipos de distribuição de carga, o número líquido das linhas que saem de qualquer superfície envolvendo as cargas é sempre proporcional à carga líquida envolvida pela superfície.

Este é o enunciado qualitativo da lei de Gauss.

A grandeza matemática relacionada ao número de linhas de campo que cortam uma superfície é o ***fluxo elétrico Ø.***

Considere uma superfície de área A perpendicular a um campo elétrico uniforme



O fluxo elétrico Ø através da superfície A se define como

$$\text{Ø} = E.\ A$$

Uma vez que o campo elétrico é proporcional ao número de linhas por unidade de área, o fluxo é proporcional ao número de linhas que passam através da área.

O fluxo elétrico através de uma superfície que não seja perpendicular a E se define como

$$\text{Ø} = \mathbf{E.n}A = E.A \cos\theta = E_n A$$

Onde θ é o ângulo entre **E** e o vetor unitário **n,** perpendicular à superfície de área A e E_n é a componente do vetor campo elétrico perpendicular à superfície.

O fluxo do campo elétrico através de um elemento de área Δ A

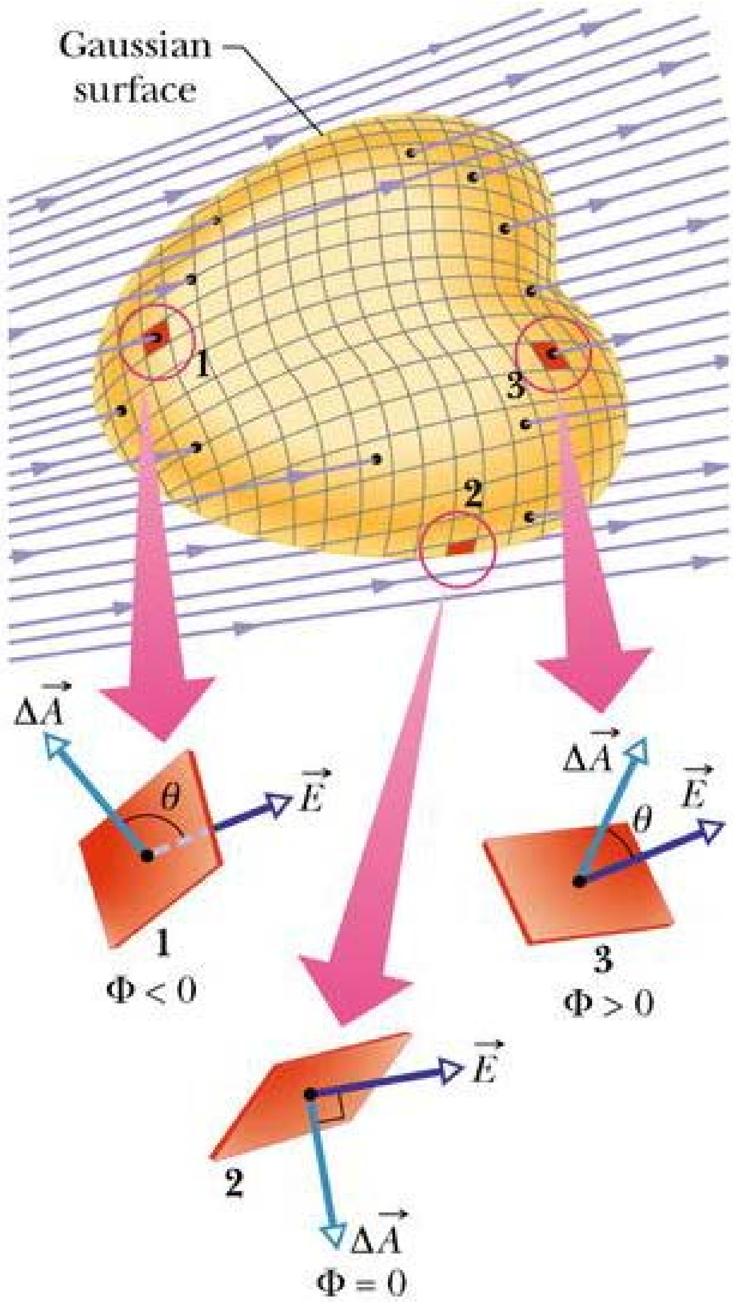
$$\Delta\Phi_i = \sum \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}.$$

O fluxo total através da superfície é a soma de todos os $\Delta\Phi_i$

No limite, quando o número de elementos tende ao infinito e a área de cada um tende à zero, e esta soma se transforma numa integral.

Muitas vezes estamos interessados no fluxo de um campo elétrico através de uma superfície fechada.

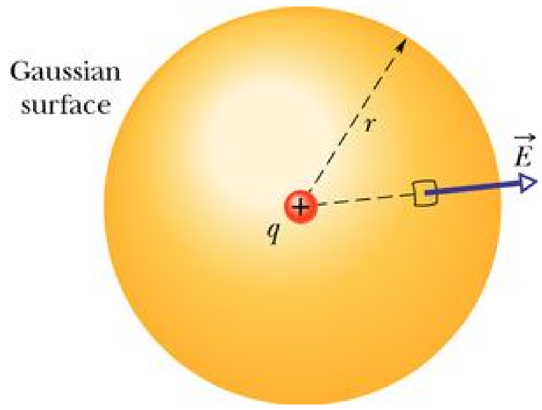
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



Considere uma superfície esférica de raio r em torno de uma carga puntiforme q.

O campo elétrico em qualquer ponto desta superfície é perpendicular à superfície e tem módulo

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$



O fluxo líquido através da superfície esférica é

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

tiramos E para fora da integral, uma vez que esta componente de campo é constante em qualquer ponto da superfície.

$$\Phi = E\oint dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}.\oint dA \Longrightarrow \epsilon_0\Phi = q_{en}$$

A integral de dA sobre a superfície é igual à área total da superfície esférica ($4\pi r^2$)

O fluxo líquido através de qualquer superfície fechada que envolva uma carga puntiforme Q é igual à $4\pi kQ$

Assim, a Lei de Gauss pode ser escrita como

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Porém, é usual escrevermos a constante de Coulomb *k*

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

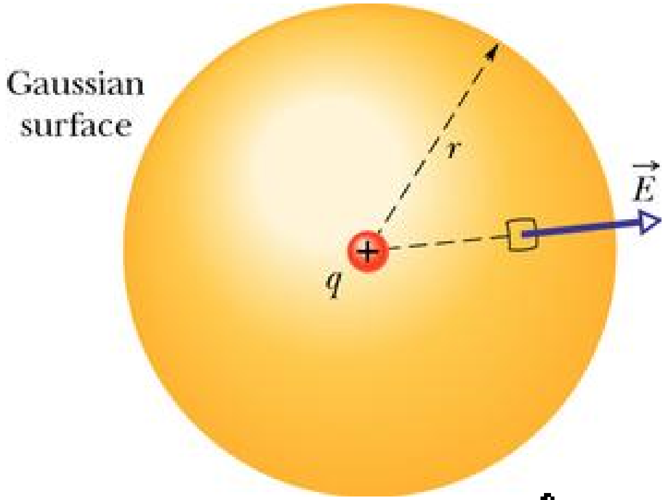
com ϵ_0 a permissividade do vácuo, dada por

$$\epsilon_0 = 8.85.10^{-12}\ C^2/Nm^2$$

➢ Lei de Gauss é válida para todas as superfícies e todas as distribuições de cargas com elevado grau de simetria.

➢ Porém, a Lei de Gauss somente pode ser usada para calcular o campo elétrico de distribuições de cargas com elevado grau de simetria.

<u>Exemplo</u>: Campo **E** nas vizinhanças de uma carga puntiforme.
Calcule o campo elétrico E a uma distância r de uma carga puntiforme q através da Lei de Gauss



- Por simetria deve ser radial.
- A superfície escolhida é esférica

$$\epsilon_0 \Phi = q_{en}$$

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

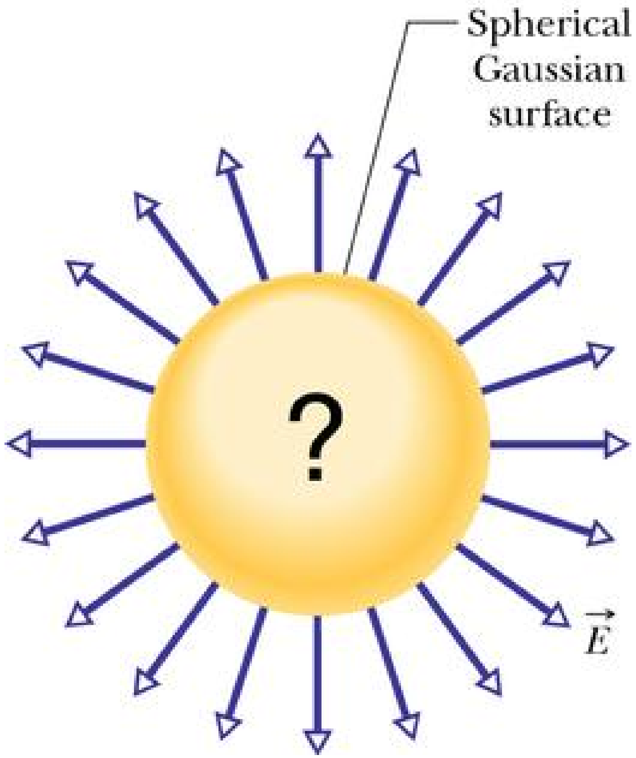
$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \oint E\,dA = q_{en}$$

$$\epsilon_0 E \oint dA = q. \Longrightarrow \epsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

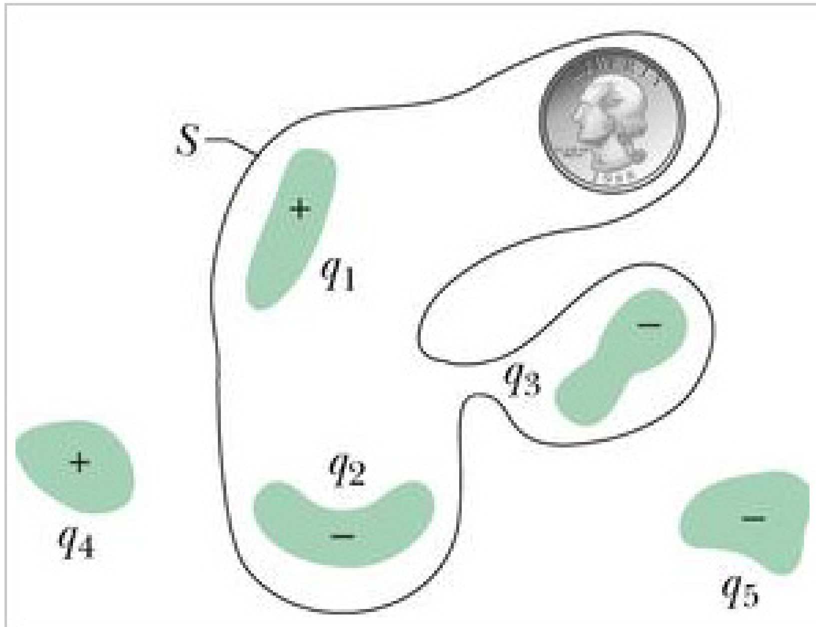
Assim, deduzimos a Lei Coulomb da Lei de Gauss. Como obtivemos a Lei de Gauss a partir da Lei de Coulomb, mostramos que as duas são equivalentes.

A Lei de Gauss relaciona os campos elétricos em pontos sobre uma superfície Gaussiana (fechada) com a carga resultante envolta por essa superfície.



$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

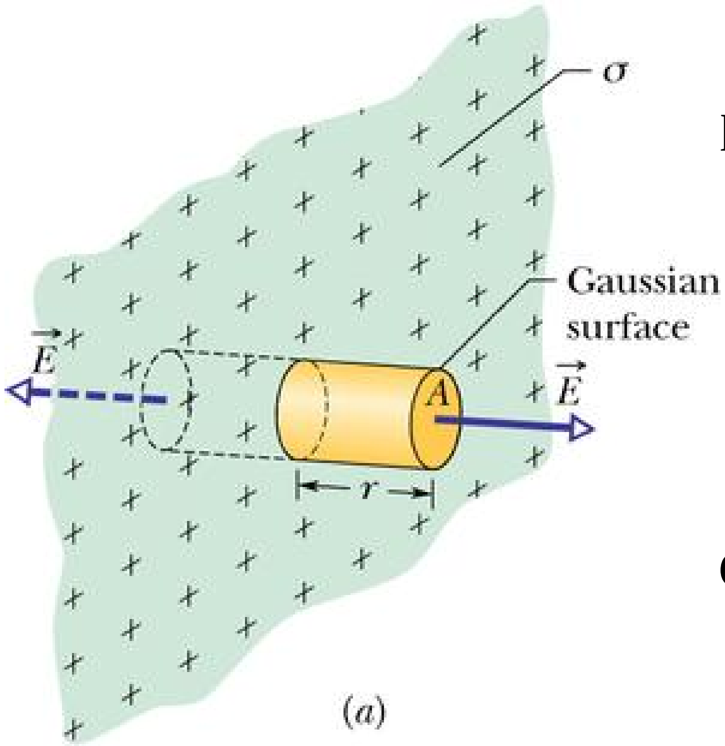
Qual o fluxo eétrico resultante ?



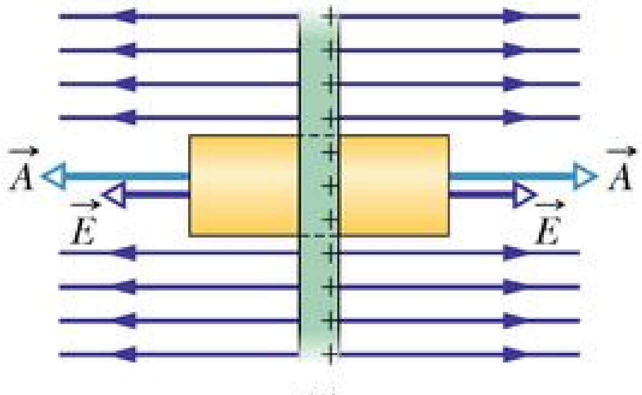
$q_1 = q_4 = +3.1$ nC, $q_2 = q_5 = -5.9$ nC, e $q_3 = -3.1$ nC

$$\Phi = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\epsilon_0}$$
$$= \frac{+3.1 \times 10^{-9}\mathrm{C} - 5.9 \times 10^{-9}\mathrm{C} - 3.1 \times 10^{-9}\mathrm{C}}{8.85 \times 10^{-12}\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}$$
$$= -670\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}.$$

Aplicando a Lei de Gauss: Simetria Plana



(a)



(b)

- A figura ao lado mostra uma porção de uma placa fina, infinita e não condutora com densidade superficial de carga uniforme σ.
- Uma superfície Gaussiana conveniente é um cilindro fechado com bases A, posicionado de modo a atravessar perpendicularmente a placa.
- Por simetria E deve ser perpendicular às bases. Como E é positivo o campo está dirigido para fora da placa. Portanto, as linhas do E atravessam as duas bases da Gaussiana saindo do cilindro.
- Como as linhas não atravessam a superfície curva, a lateral do cilindro, o fluxo é nulo na lateral.

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc},$$

$$\epsilon_0 (EA + EA) = \sigma A,$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$