Aula 4 de Exercícios

.

Exercício 1:

Uma carga q está uniformemente distribuída no segmento de reta de $x = 0$ a $x = L$ sobre o eixo x, com densidade linear $\lambda = q/L$. Qual o campo elétrico gerado por este segmento de reta num ponto P sobre o eixo dos x, em $x = x_0$.

O ponto P está a uma distância

$$x = x_o,\ x_o > L \Rightarrow r = x_o - x$$

O campo do ponto P está a uma distância do elemento de carga está dirigido ao longo do eixo x e tem módulo.

$$\begin{aligned}
dE_x &= \frac{kdq}{(x_o - x)^2} = \frac{k\ \lambda dx}{(x_0 - x)^2} \\
&= \int_{Ex(0)}^{Ex} dEx = \int_0^L k\lambda \frac{dx}{(x - x_0)^2} = k\lambda \left[\frac{1}{x_0 - x}\right]_0^L \\
&= k\lambda\{\frac{1}{x. - L} - \frac{1}{x_0}\} = k\lambda\{\frac{L}{x.\,(x_0 - L)}\}
\end{aligned}$$

Como $\lambda = q/L$

$$E_x = \frac{kq}{x_0\,(x_0 - L)}, \qquad se\ \ L < < x_0 \implies E_x \simeq \frac{k\varphi}{x_0^2}$$

Exercício 2:

Calcule o campo elétrico $\overrightarrow{E}$ num ponto r sobre a mediatriz de um segmento de reta de comprimento L carregado com carga total q.

O elemento de carga dq provoca um campo elétrico d∈ em P.

$$\begin{aligned}
dE_x &= |d\overrightarrow{E}|sen\theta \quad dE_y = |d\overrightarrow{E}|cos\theta \\
d\overrightarrow{E} &= -dE_x\overrightarrow{i} + dE_y\overrightarrow{j} \\
|d\overrightarrow{E}| &= \frac{k\ dq}{r^2} = \frac{k\lambda dx}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} \\
d\overrightarrow{E} &= |d\overrightarrow{E}|sen\theta\overrightarrow{i} + |dE|\cos\theta\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

$$sen\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$d\overrightarrow{E} = \left(\frac{k\lambda dx}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{k\lambda dx}{\left(\sqrt{x^2}+y^2\right)^2}.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\overrightarrow{j}$$

$$d\overrightarrow{E} = k\lambda\left[\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\overrightarrow{j}\right]\overrightarrow{i} + \left(\frac{k\lambda dx}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}.\frac{y}{x^2+y^2}\right)\overrightarrow{j}$$

$$d\overrightarrow{E} = k\lambda\left[\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\overrightarrow{i} + \frac{ydx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\overrightarrow{j}\right]$$

$$\int_{E\left(x=-\frac{1}{2}\right)=0}^{E_{(x)}} d\overrightarrow{E} = k\lambda\left[\int\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\overrightarrow{i} + y\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\overrightarrow{j}\right]$$

integrais:

$$I_1 = \int\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int\frac{du}{2}.\frac{1}{u^{3/2}} = \frac{1}{2}\int u^{-3/2}du$$

$$u = x^2+y^2 \implies du = 2xdx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^{-1/2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}.2u^{-1/2} = \left(x^2+y^2\right)^{-1/2}$$

$$I_1 = \int_{-1/2}^{1/2} ... = \left(x^2+y^2\right)^{-1/2} /_{-1/2}^{1/2} = \left((L/2)^2+y^2\right)^{-1/2} - \left((-L/2)^2+y^2\right)^{-1/2}$$

$$I_2 = \int -\frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$I_2 = [...]_{-1/2}^{1/2} = \frac{(1/2)}{y^2\sqrt{(1/2)^2+y^2}} - \frac{(-1/2)}{y^2\,(1/2)^2+y^2} = \frac{L}{y^2\sqrt{\left((1/2)^2+y^2\right)}}$$

$$\overrightarrow{E}\,(y) = k\lambda y \frac{L}{y^2\sqrt{(1/2)^2+y^2}}\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{E}\,(y) = \frac{k\lambda}{y}\frac{L}{\sqrt{(1/2)^2+y^2}}\overrightarrow{j}$$

Dá para ver pela simetria da distribuição de cargas que cada elemento de carga que esteja à direita da origem, há um outro que está à esquerda e que provoca uma componente paralela de campo elétrico d$\overrightarrow{E}$ que é igual e oposta à do campo do primeiro elemento. Então, se somarmos as componentes paralelas de todos os elementos de carga, estas componentes terão soma nula. Portanto, somente a componente de campo perpendicular ao segmento de reta contribui para o campo total.

$$qdo \quad y \ll L \implies \overrightarrow{E}\,(y) = \frac{k\lambda L}{y^2}\overrightarrow{j}$$

$$y \ll L \implies \overrightarrow{E}\,(y) = \frac{2k\lambda}{y}\overrightarrow{j}$$

* campo $\overrightarrow{E}$ sobre o eixo de um anel de cargas

* campo $\overrightarrow{E}$ sobre o eixo de um disco uniformemente carregado.

Exercício 3:

Considere um anel uniforme de cargas, com o raio a e carga total Q. Calcule o campo elétrico num ponto P sobre o eixo do anel a uma distância x do centro anel.

Tomemos um elemento de carga dq que provoca o campo d$\overrightarrow{E}$ num ponto P sobre o eixo x

$$d\overrightarrow{E} = dE_x\overrightarrow{i} + dE_1\overrightarrow{j}$$

$$\int d\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E} = \int dE_x\overrightarrow{i} + \int dE_1\overrightarrow{j}$$

$dE_\perp$: componente perpendicular ao eixo x

Pela simetria da distribuição de carga, vemos que a soma das componentes perpendiculares ao eixo deve ser nula, pois a soma de todos os elementos de carga com os elementos de carga diametralmente opostos, anulam-se.

$$\int dE_\perp = 0$$

Assim, resta apenas a componente de campo axial.

$$dE_x = \frac{kdq}{r^2}.\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + a^2} \Rightarrow r = \left(x^2 + a^2\right)^{1/2}$$

$$dE_x = \frac{kdq}{r^2}.\frac{x}{r} = \frac{kdqx}{r^3} = \frac{kdqx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

O campo do anel é:

$$\int dE_x = E_x = \int \frac{kxdq}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

x não se altera, vamos integrar sobre os elementos de carga e remover todos os termos constantes.

$$E_x = \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int dq$$

$$\int dq = Q$$

$$E_x = \frac{kxQ}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} \Longrightarrow \overrightarrow{E} = \frac{kxQ}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} \overrightarrow{i}$$

Exercício 4:

Considere um disco uniformemente carregado, com o raio R e carga total Q. Calcule o campo elétrico sobre o eixo do disco.

Podemos aqui fazer uma analogia com o caso anterior e considerar o disco como se fosse um conjunto de anéis concêntricos. Devido a simetria do problema o campo elétrico sobre o eixo do disco será paralelo ao eixo. Consideremos um anel de carga de raio a, um elemento de disco de espessura da

A área do anel é

$$dA = 2\pi a da$$

a área do disco total é

$$A = \pi R^2 \qquad Q = \sigma \pi R^2$$

O campo do anel de cargas é dado por

$$\overrightarrow{E} = \frac{kxQ}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} \overrightarrow{i}$$

um elemento de disco

$$dE_x = \frac{kxdq}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi a da$$

$$dE_x = \frac{2\pi k\sigma adax}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

O campo total provocado pelo disco pode ser encontrado

$$E_x = \int dE_x = \int_o^R \frac{2\pi k\sigma xada}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = 2\pi k\sigma x \int_o^R \frac{ada}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}}$$

resolvendo a integral

$$\int \frac{ada}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = \int \frac{du}{2}.\frac{1}{u^{3/2}} = \frac{1}{2}\int u^{-3/2}du =$$

$$u = x^2 + a^2 \implies du = 2ada$$

$$\int ... = \frac{1}{2}\frac{u^{-1/2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = -u^{-1/2} = -\left(x^2+a^2\right)^{-1/2}$$

$$\int \frac{ada}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int_o^R ... = -\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x^2}}}\right] = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$E_x = 2\pi k\sigma x\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$

$$E_x = 2\pi k\sigma\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$

$$\overrightarrow{E} = 2\pi k\sigma\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]\overrightarrow{i}$$

muito afastados do disco x$\gg R$ podemos achar uma aproximação para a expressão (1) conhecendo-se o desenvolvimento do binômio.

$$(1+\in)^n \approx 1 + n\in, \in\ll 1$$

Podemos escrever:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)}} = \frac{x}{\sqrt[x]{1+\frac{R^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}} = \left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2} \qquad n=-1/2$$

$$\in = \frac{R^2}{x^2} \implies \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \simeq 1 + \left(-\frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2}\right)$$

de modo que, quando estivermos muito afastados do disco $R/x \ll 1$ e

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \simeq 1 - \frac{R^2}{2x^2}$$

substituindo agora os resultados

$$\overrightarrow{E} = 2\pi k\sigma\left[1-1+\frac{R^2}{2x^2}\right]\overrightarrow{i}$$

$$\overrightarrow{E} = \frac{2\pi k\sigma R^2}{2x^2}\overrightarrow{i}$$

mas Q $= \sigma\pi R^2$, logo

$$\overrightarrow{E} = \frac{kQ}{x^2}\overrightarrow{i}$$

ou seja, quando estamos muito afastados do disco, o campo elétrico gerado pelo disco parece àquele gerado por uma carga puntiforme Q.

Exercício 5:

Se o campo elétrico gerado por um disco num ponto P localizado no eixo do disco é dado por

$$\overrightarrow{E} = 2\pi k\sigma\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]\overrightarrow{i}$$

então, encontre o valor do campo num ponto P muito afastado do disco

Solução:

$$\overrightarrow{E} = \frac{2\pi l\sigma}{4\pi\varepsilon o}\left[1-\left(1+\left(\frac{R}{x}\right)^2\right)^{-1/2}\right]$$

conhecendo-se a expansão:

$$(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$$

com $\varepsilon \ll 1$ condição que ocorre se x $\gg$ R, ou seja, para pontos muito afastados

$$\varepsilon = \frac{R}{x} \ll 1, \text{ então } n = -\frac{1}{2}$$

$$\left(1+\left(\frac{R}{x}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\ \left(\frac{R}{x}\right) = 1-\frac{R^2}{2x^2}$$

$$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon o}\left[1-1+\frac{R^2}{2x^2}\right]\widehat{e}$$

$$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon o x^2}\widehat{e}$$

mas como $Q = \sigma\pi R^2 \Longrightarrow$

$$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\varepsilon o x^2} = \frac{kQ}{x^2}\ \widehat{e}$$

ou seja, quando estamos muito afastados do disco, o campo elétrico gerado pelo disco parece aquele gerado por uma carga puntiforme Q. Por outro lado, para pontos muito próximos do centro do disco, isto é, $R \gg x$, temos

$$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon o}\{1-\left(1+\left(\frac{R}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\}\widehat{e}$$

$$\widehat{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon o}\widehat{e}$$

Exercício 6:

A que distância, ao longo do eixo central de um disco de plástico de raio R, uniformemente carregado, o módulo do campo elétrico é igual à metade do seu valor no centro da superfície do disco?

Solução:

Um ponto no eixo de um disco carregado uniformemente a uma distância z acima do centro do disco é

$$E = 2\pi k\sigma \left[1 - \frac{x}{x^2 + R^2}\right]$$

$$E = 2\pi \frac{1}{4\pi\varepsilon o}\sigma \left[1 - \frac{x}{x^2 + R^2}\right]$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon o}\left[1 - \frac{z}{z^2 + R^2}\right]$$

A magnitude do campo elétrico no centro $z = 0 \Longrightarrow E_c = \frac{\sigma}{2\varepsilon o}$

Queremos encontrar z que satisfaz $\frac{E(z)}{E_c} = \frac{1}{2}$

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon o}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right] = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{2\varepsilon o} = \frac{\sigma}{4\varepsilon o}$$

$$1 - \frac{z}{z^2 + R^2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{z^2}{z^2 + R^2} = \frac{1}{4} \Longrightarrow 4z^2 = z^2 + R^2 \Longrightarrow 3z^2 = R^2 \qquad \Longrightarrow z = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

Exercício 7:

Duas barras finas de plástico, uma de carga +q e a outra de carga -q, formam um círculo de raio R num plano xy. Um eixo x passa pelos pontos que unem as duas barras e a carga em cada uma delas está uniformemente distribuída. Qual o módulo, direção e sentido do campo elétrico $\overrightarrow{E}$ criado no centro do círculo?

Solução:

$$dq = \lambda ds$$

$$ds = Rd\theta \Longrightarrow dq = \lambda R d\theta$$

$$d\overrightarrow{E} = \frac{kdq}{R^2}\widehat{r}$$
$$dE_y = |dE|\cos\theta$$

$$dE_y = \frac{k\lambda R d\theta}{R^2} = \frac{k\lambda\cos\theta d\theta}{R}$$

$$E = \int dE_y = \frac{k\lambda}{R}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = .\frac{k\lambda}{R\pi R}\pi R$$

como

$$q = \lambda\pi R$$

o campo pode ser escrito como

$$\overrightarrow{E} = \frac{k}{R^2}.\frac{q}{\pi}\widehat{j}$$

Levando-se em conta os 4 quadrantes obtemos

$$\overrightarrow{E} = \frac{4kq}{R^2}\widehat{j}$$

no sentido dos y's positivos.