

O Teorema de Gödel

Rafael von Gehlen

5 de agosto de 2006

Resumo

A intenção do presente texto é apresentar uma descrição clara e informal do teorema de Gödel. Faremos, inicialmente, uma análise dos fatos históricos e das motivações que levaram Kurt Gödel a escrever, em 1931, seu famoso artigo "Sobre proposições formais indecidíveis de Principia Mathematica e sistemas correlatos"

1 A geometria euclidiana

Como sabemos, a geometria euclidiana não é uma ciência experimental. Os teoremas são obtidos por derivação dos axiomas, e não por concordarem com fatos empíricos. O fato de proposições poderem ser estabelecidas por provas lógicas remonta aos gregos. A isso damos o nome de "método axiomático". Partindo de poucas definições iniciais(axiomas), podemos deduzir uma série de verdades(teoremas), usando regras de inferência. O método axiomático ficou conhecido como o que a ciência tem de melhor, pois, se pudéssemos comprovar a veracidade dos axiomas, a consistência de todos os teoremas deles derivados estaria garantida. Como os axiomas da geometria euclidiana pareciam ser verdades óbvias do espaço, a consistência desse sistema era então vista como inatacável. Entretanto, com o advento da geometria Rimaniana, começou a ficar claro que Euclides não era a última palavra em geometria. A antiga idéia que os axiomas devem ser escolhidos por serem intuitivamente óbvios revelou-se equivocada. Muitas áreas da matemática começaram a receber uma fundamentação axiomática, e grandes níveis de abstração foram atingidos. Um problema crítico então surgiu: como provar a consistência dos axiomas desses sistemas, ou seja, como provar que não podemos extrair dos axiomas um teorema e sua negação?

2 O Programa de Hilbert

O matemático alemão David Hilbert imaginou um processo chamado "Prova absoluta de consistência". Inicialmente, devemos formalizar um sistema dedutivo, ou seja, drenar todo tipo de significado dos símbolos usados. Utilizamos então regras fixas de inferência. Desse modo, a matemática torna-se simplesmente uma manipulação tipográfica mecânica. A vantagem disso é que não temos o perigo de utilizar qualquer tipo de raciocínio "equivocado", que poderia levar-nos a contradições.

Embora no chamado "cálculo formalizado" os símbolos utilizados não tenham significado próprio, podemos fazer afirmações altamente significativas sobre os padrões que emergem da combinação desses símbolos. A linguagem que descreve esses mosaicos tipográficos foi chamada por Hilbert de "Metamatemática". Sua idéia era que, através da análise estrutural desses mosaicos, poderia-se mostrar que era impossível deduzir teoremas contraditórios. Uma exigência do programa de Hilbert era que não se poderia fazer menção a um número infinito de propriedades estruturais das fórmulas, nem realizar-se um número infinito de operações com as mesmas. Outra exigência era a de não se fazer referência à consistência de outros sistemas axiomáticos. O sistema deveria provar sua consistência utilizando seus próprios recursos! É possível gerar uma prova absoluta para um pequeno fragmento dos Principia, entretanto Gödel mostrou que se tivermos um sistema suficientemente complexo, complexo o suficiente para representar toda a aritmética, o programa de Hilbert estará fadado ao insucesso. Além disso, ele mostrou algo mais grave. Na hipótese dos axiomas serem consistentes, existem sentenças verdadeiras que não podem ser extraídas dos axiomas, ou seja, são formalmente indecidíveis. O sistema é então dito incompleto.

3 O núcleo Prova

A idéia principal na prova de Gödel é a idéia de mapeamento. Podemos associar a cada símbolo no cálculo formal determinado número. Podemos fazer o mesmo para cada sentença e até mesmo para demonstrações. Esses números são conhecidos como "Números de Gödel". A vantagem disso é que podemos aritmetizar o cálculo, ou seja, espelhá-lo dentro da própria aritmética. Com isso, afirmações metamatemáticas sobre fórmulas podem ser expressas como relações aritméticas sobre números (os números godelianos que representam as fórmulas). Utilizando essa técnica, Gödel construiu uma fórmula aritmética G , que espelhava o enunciado metamatemático: "a fórmula G é não-demonstrável". G é uma fórmula que diz de si mesma não ser demon-

strável. Ele então provou que se G é demonstrável, a negação formal de G é demonstrável. Logo, se o cálculo for consistente, G é indecidível. Entretanto pode-se mostrar que G é uma verdadeira fórmula aritmética, no sentido que expressa uma propriedade válida de algum inteiro, não importando qual inteiro é examinado. Mas se G é ao mesmo tempo indecidível e uma verdade, significa que o sistema é incompleto. Além disso, o sistema é "essencialmente incompleto", pois mesmo que se utilize G como axioma, pode-se gerar nova fórmula verdadeira, porém indecidível. Por fim, Gödel mostrou como construir a fórmula aritmética "A" do enunciado metamatemático: "A aritmética é consistente" e provou que A é não-demonstrável.

3.1 Idéias envolvidas na prova

Imaginemos a seguinte afirmação metamatemática: "A prova de número de Gödel x demonstra o teorema y ". Podemos traduzi-la numa relação aritmética bem definida entre x e y , ou seja, $f(x, y) = 0$. Para fins menemônicos, utilizaremos a notação $Dem(x, y)$. Sua negação formal é $\sim Dem(x, y)$. Tomemos agora a fórmula " $(\exists x)(x = sy)$ " que significa: "existe um x , tal que x é sucessor de y ". Digamos que essa fórmula possua número de Gödel m e que o número de Gödel da variável y seja 13. Se substituirmos nessa fórmula para a variável de número Gödel 13, o numeral por m obtmos: $(\exists x)(x = sm)$. Qual o número godeliano dessa nova fórmula? Poderíamos calculá-lo, entretanto podemos estabelecê-lo também por uma descrição metamatemática: é o número que obtemos substituindo na fórmula de número m , para a variável de número 13, o numeral por m . Por sua vez, esse enunciado pode ser espelhado dentro da aritmética através de uma relação entre os números 13 e m . A função pode ser representada no cálculo formalizado. Representaremos esse número então por $sub(m, 13, m)$, por motivos menemônicos. Vamos construir agora a sentença " $\forall(x) \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$ ", cujo número de Gödel seja n . Ela pertence ao cálculo aritmético, mas significa metamatemáticamente: "Para todo x a demonstração de número x não demonstra a fórmula cujo número é $sub(y, 13, y)$. Ou seja, a fórmula de números $sub(y, 13, y)$ é não-demonstrável. Vamos construir agora a famosa fórmula G .

$$\forall(x) \sim Dem(x, sub(n, 13, n))$$

Qual o número de Gödel dessa fórmula? Se pensarmos um pouco, podemos observar que é justamente $sub(n, 13, n)$. Logo, essa fórmula aritmética, quando interpretada metamatemáticamente, afirma de si mesma que não é demonstrável.

Gödel também tomou o seguinte enunciado metamatemático: "Se a aritmética

é consistente, então ela é incompleta”, e mostrou como construir uma fórmula dentro do formalismo do cálculo que representasse essa afirmação. A primeira parte do enunciado pode ser colocada como:”existe ao menos uma fórmula aritmética que não pode ser demonstrada”. Para mostrar porque isso é assim, teríamos de fazer uma longa digressão. Entretanto, diremos apenas que se temos um sistema inconsistente, então podemos provar que toda e qualquer fórmula pode ser extraída dos axiomas(ou seja,toda fórmula é um teorema). Logo, de modo inverso, se conseguirmos achar pelo menos uma fórmula que não seja um teorema, teremos provado que o sistema é consistente. A segunda parte do enunciado ”Se a aritmética é consistente, então ela é incompleta”, pode ser representado pela nossa conhecida fórmula G. Sendo assim temos:

$$\exists(y)\forall(x) \sim Dem(x, y) \Rightarrow \forall(x) \sim Dem(x, sub(n, 13, n))$$

Que significa:SE (existe um y tal que para todo x, a prova de número de gödel x não demonstra a fórmula de número de gödel y), então (para todo x, a prova de número x não demonstra a fórmula de número $Sub(n, 13, n)$). Podemos escrever essa fórmula compactamente como:

$$A \Rightarrow G$$

Gödel então mostrou que essa fórmula é formalmente demonstrável. Para mostrar que A é não-demonstrável devemos nos lembrar que existe uma regra de derivação chamada ”Regra de Separação”. Essa regra afirma que se tivermos $p \Rightarrow q$ e p , então podemos obter q . Como Gödel provou $A \Rightarrow G$ como sendo formalmente demonstrável, vamos supor o que aconteceria se A fosse demonstrável. Se A fosse demonstrável, poderíamos usar a regra de separação para obter G , mas isso é impossível, pois G é não demonstrável(se os axiomas forem consistentes). Logo, chegamos à conclusão que A é não demonstrável. Mas lembrando: A fórmula A representa dentro do cálculo o enunciado metamatemático ”A aritmética é consistente”. Sendo assim, vemos que a idéia de ”Prova absoluta de consistência”, como Hilbert tinha em mente, não pode ser realizada para um sistema complexo o suficiente para representar toda a aritmética.

4 Conclusão

Utilizando a idéia de mapeamento, Gödel criou os números godelianos para que se pudesse aritmetizar completamente um cálculo formal. Dessa forma, enunciados metamatemáticos sobre fórmulas poderiam ser espelhados em relações aritméticas sobre números.Ou seja, os enunciados metamatemáticos

poderiam ser espelhados dentro do próprio formalismo que descreviam. Gödel provou então duas coisas:

1. Se a aritmética for consistente, então é impossível provar sua consistência por um raciocínio metamatemático representável no formalismo do sistema.
2. Se a aritmética for consistente, então existem verdades que não podem ser deduzidas de seus axiomas, logo o sistema é incompleto, e essencialmente incompleto.

É possível criar provas de consistência não-finitárias para a aritmética, entretanto essas não satisfazem o program original de Hilbert. Gödel Mostrou que a mecanização completa da matemática é uma tarefa impossível

Referências

- [1] Nagel Newmann, Prova de Gödel