Prof. José J.Lunazzi UNICAMP-IF

FUNDAMENTOS BÁSICOS SOBRE ERROS

A norma básica para o tratamento dos erros de medição é considerar que SEMPRE EXISTEM, porque TODA MEDIÇÃO TEM ERRO. Mesmo elementar, as vezes podemos esquece-la e achar que os valores que manipulamos são perfeitos. É que estamos acostumados a aprender a física por meio de explicações que envolvem valores já suficientemente testados onde foi visto que os erros não podiam alterar conceitualmente as conclusões obtidas das medições. Portanto não é necessário nesses casos carregar junto os valores das incertezas. Em muitos outros casos também esses valores não são fornecidos, no que a pessoa que declara os resultados "assina embaixo" uma garantia de que já realizou todas as análises necessárias de maneira a não haver incerteza nas conclusões. A análise de erros é uma tarefa sempre trabalhosa e, como mesmo os grandes especialistas podem ter deixado de considerar algum fator, nunca é aceito um resultado de grande importância sem que este tenha sido verificado experimentalmente em mais de um laboratório. Os valores das constantes fundamentais usadas em metrologia devem ser homologados por três laboratórios específicos de diferentes países.

Até que ponto podemos confiar em valores e aparelhos fornecidos por terceiros?. Essa questão não tem resposta, apenas disser que, quanto mais critérios tenhamos aplicado para verificar nos mesmos nossos resultados, mais certos estaremos deles. Sobre os aparelhos, convém disser que além da confiabilidade em sua origem, as mudanças geradas pelo transporte e diversidade de ambiente podem ser suficientes para invalidar os testes realizados antes do embarque.

Os antigos só filosofavam, não mediam?. Mediam sim. Já séculos antes de Cristo um grego mediu o diâmetro da terra. Teve de medir distância entre duas cidades em passos, e não sei se fez estimativa de erros, mas o valor achado foi importante para a humanidade. A ciência de Galileo começou a definir bem o universo não apenas porque mediu os efeitos da gravidade com suas pulsações arteriais, no que obteve relações de proporção muito boas, senão também porque teve medições astronômicas realizadas por seu contemporâneo Tycho Brahe com cuidado e dedicação instrumental únicos na época.

Na medida em que as medições são feitas com menor erro vê-se que as teorias necessitam ser acrescidas de mais termos ou novas formulações que contemplem novos detalhes que são detectados. Einstein não teria como provar que sua teoria estava certa, se vivesse na época de Newton.

ERROS SISTEMÁTICOS E ERROS ALEATÓRIOS

A primeira classificação geral chama de sistemáticos os que sempre acontecem da mesma maneira, enquanto os aleatórios podem ter valores positivos ou negativos, grandes e pequenos, com a mesma probabilidade ("distribuição gaussiana") ou seguindo alguma outra lei estatística em casos especiais.

Tomemos exemplos disto no caso dos erros de leitura num instrumento de escala com agulha como o galvanômetro. Temos que definir primeiramente o zero da escala fazendo alineação visual da agulha com a primeira divisão.
A posição dessa primeira divisão respeito das outras não pode ser perfeitamente regular senão o mais regular que o fabricante pode fazer. Se um erro afetasse essa posição ele ia afetar todas as leituras. Se, P.es., a primeira divisão está algo a direita do lugar certo , todas as leituras serão algo maiores que o valor certo dando um erro sistemático de valor positivo e constante. Temos então que a precisão da construção da escala afeta as medições, de uma maneira que o fabricante calcula e inclui em sua avaliação do erro final.
No exemplo anterior o erro foi sistemático, mas podemos pensar que o erro de posicionamento variasse aletoriamente para cada divisão, ou que houvesse uma combinação dos dois tipos de erros. Atribuindo a todos os erros o valor do erro máximo
pode-se ganhar em simplicidade perdendo em precisão, que é o caso mais prático.

A calibração da posição inicial passa também pela qualidade do ajuste visual ao considerar que a linha de uma divisão está perfeitamente coincidente com a linha da agulha. É fácil entender que isto depende da precisão de nosso sistema visual e também da espessura das linhas, dois fatores de erro claramente aleatórios. Se as linhas forem grossas o aparecimento da divisão pela lateral da agulha influencia menos o aspecto global da imagem (**Figura 1**). De todas maneiras o fator básico vem dado pelo menor detalhe que podemos visualizar, menor que uma décima de milímetro, mas que varia de uma pessoa para outra.

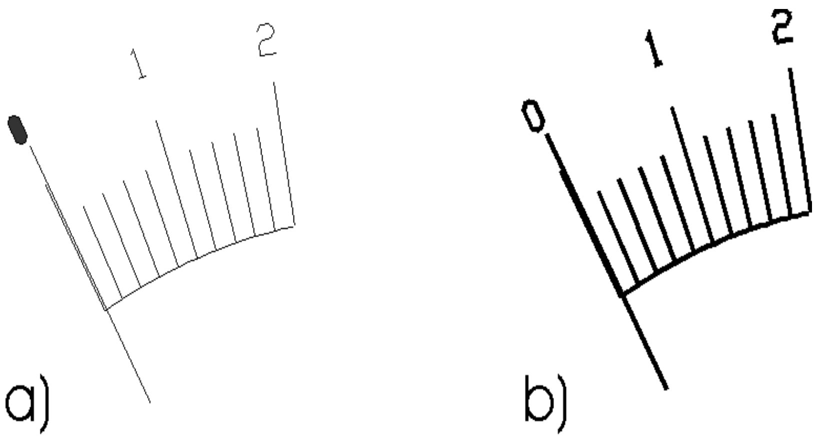

Fig.1: Aparência do erro de alinhamento em duas situações idênticas

a) no caso de linhas finas.

b) no caso de linhas grossas.

A leitura na posição final da agulha não acontece exatamente pela sobreposição da agulha com uma divisão, e o valor estimado para a leitura é mais afetado de erro. Quanto?. **O VALOR MÁXIMO DO ERRO SEMPRE PODE SER ESTIMADO**. Tomemos o caso da **Figura 2**, onde a agulha se encontra na posição mais desfavorável.

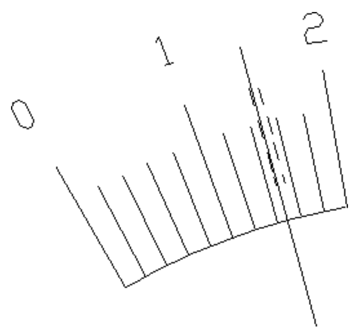

Fig.2: Estimativa do erro máximo de leitura visual numa escala.Duas linhas divisórias imaginarias aparecem tracejadas.

Se fizermos uma subdivisão mental do espaço entre as divisões, em quanto poderíamos faze-lo?. Dividamos o espaço em três e veremos que, certamente, se a agulha está próxima do centro, não poderemos disser que está em algum dos outros terços, se está de um lado, também não. Assim, o erro seria 1/3 da menor divisão. Poderíamos afirmar que a divisão mental do espaço entre divisões seria possivelmente mais precisa?. Talvez sim, mas para isto o esforço mental passa a ser maior e a situação menos natural. Somando então o valor de 1/3 a algum erro do ajuste do zero, temos a regra muito conhecida que diz "o erro é metade da menor divisão do instrumento". Em geral, o fabricante define as divisões e o desenho do instrumento de maneira a atender essa norma, mas atenção, isto é certo sempre apenas respeito do erro visual e assume que a escala é sempre uniforme, o que, no caso de um ohmimetro P.es., não é verdade. Se o instrumento estiver descalibrado ou outros fatores externos afetassem a leitura, como uma instabilidade ou um erro sistemático, devidos p.es. a flutuações na tensão da rede elétrica ou a mudanças na temperatura que afetam os componentes, a regra deixa de valer.

O ERRO NÃO VALE SEMPRE METADE DA MENOR DIVISÃO, APENAS O ERRO DE LEITURA VISUAL PODERIA VALER ISTO, MAS NÃO É BOM GENERALIZAR PARA TODA A EXPERIÊNCIA DE MEDIÇÂO SEM REFLETIR ANTES SOBRE A SITUAÇÃO.

Assim, não devemos nos entusiasmar demais pela alta <u>precisão</u> na leitura ao ponto de não perceber a presença de outros erros que estejam prejudicando a <u>exatidão</u> da medida. Embora a palavra <u>exatidão</u> seja a correta para definir o resultado final, a palavra <u>precisão</u>, que corresponderia estritamente à fineza da leitura, é usada frequentemente no mesmo sentido de <u>exatidão</u>.

Outros termos que não devem ser confundidos são <u>precisão</u> e <u>sensibilidade</u>. Uma alta sensibilidade não garante a estabilidade (repetição de uma mesma leitura) nem a linearidade da resposta. É conhecido o caso do detetor de infravermelho para astronomia defendido por Edison. Ele era baseado em grãos de carvão e extremamente sensível. Com seu grande prestigio Edison conseguiu a aprovação oficial para seu projeto , que nunca deu certo, prejudicando um outro que finalmente ficou consagrado.

Podemos ainda analisar mais um tipo de erro, o chamado "erro de paralaxe" (erro gerado pela mudança de perspectiva de uma cena). Como a agulha está um pouco acima do plano da divisão, se o observador está de lado verá a coincidência acontecer quando, na visão frontal, não acontece. Se sempre observasse desde a mesma posição (e não muito perto do painel), teríamos o caso feliz de um erro sistemático se cancelando na posição inicial e na posição final. Mas como não é garantido o posicionamento fixo do observador, alguns instrumentos trazem junto da escala um pequeno e espelho onde deve-se alinhar a agulha com sua imagem refletida antes de medir. desta maneira obriga-se o observador a ter uma visão frontal.

Temos deixado de considerar se o fenômeno seria realmente linear, com o campo magnético do imã uniforme e a agulha girando perfeitamente sobre seu eixo. Vale agora a pergunta: será que toda esta análise sobre os instrumentos de medição por agulha faz sentido nesta época de eletrônica digital?.

Aparelhos eletrônicos:

Os medidores eletrônicos são diferentes dos elétricos. São mais delicados e incorporam elementos ativos, por isto necessitam de uma fonte de energia. São mais instáveis e sujeitos a mudanças dos materiais por causa do uso, clima ou simplesmente do tempo. São mais indicados para o caso de se querer medir sinais de pequena amplitude sem realizar correções pelo efeito da resistência interna dos equipamentos de medição. O medidor de bobina móvel necessita de uma certa quantidade de corrente para ser acionado, que retira do elemento sob medição. Isto é uma consequência do principio universal de que toda medição afeta aquilo que pretende medir. Para reduzir isto, usa-se o efeito amplificador da corrente elétrica, que foi inventado a partir da introdução de mais eletrodos numa lâmpadinha elétrica de filamento, gerando primeiramente o diodo e depois o triodo, que ao evoluir foi chamado de válvula eletrônica (de Forest, 1925). Um amplificador é um elemento que permite controlar um fluxo grande de energia com um gasto mínimo. É como no caso de se dirigir um carro ou regular uma torneira, com pouca energia controlamos a aplicação de um a quantidade bem maior. Uma válvula elétrica (ainda hoje usada nos transmissores das estações de radio e TV)ou os modernos transistores introduzem o potencial do sinal controlador de maneira a criar uma barreira que freie o fluxo da corrente elétrica desenvolvida a partir de uma fonte. Temos assim o multímetro eletrônico, que pode ter leitura por bobina móvel ou por mostradores de cristal líquido, onde cada número é composto por meio de sete segmentos que escurecem quando uma corrente (muito pequena) é aplicada. Um multímetro digital acostuma ser fabricado de maneira que o erro do instrumento coincida com o valor correspondente ao digito que não é mostrado, introduzindo geralmente um processo de arredondamento (si >0,5 -->1, si <0,5 --> 0 . Como ele incorpora amplificadores possui mais sensibilidade e pode ter mais precisão. Mesmo assim, podemos verificar em nosso laboratório de ensino que alguns valores são melhor medidos pelos instrumentos convencionais, também chamados de analógicos. De outro lado, o aparelho eletrônico tem mais tendência a mudar suas características por envelhecimento.

Comparação de medições:

Se, medindo uma mesma fonte, notamos uma diferença de leituras entre um instrumento analógico e um digital, NÃO É CORRETO disser que o analógico é o errado. Qualquer um dos dois pode estar.
Se medimos um valor de x por um método e obtemos o resultado $\mathbf{x_1}$, depois por outro método obtendo $\mathbf{x_2}$, não faz sentido comparar $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}$ e disser que esse é o erro. Vejam que, por acaso, poderia ser nulo, e medição sempre tem erro (pense bem nisso). Posso comparar $\Delta \mathbf{x_1}$ com $\Delta \mathbf{x_2}$, para saber qual método é melhor. Observe de passo que os dois métodos, se tiveram o erro bem calculado, devem oferecer uma região de valores comuns, ou seja que as faixas de incerteza devem ter sobreposição e seria nessa região de sobreposição onde o valor correto deve se encontrar.

Padrões para aferição:

A única saída para avaliar completamente um instrumento é aferi-lo com instrumentos mais estáveis desenhados especificamente para aferições, ou por meio de elementos como pilhas e resistores do tipo chamado "padrão". A UNICAMP possui um laboratório específico apenas para aferir instrumentos de medição elétrica. O IPT (no campus da USP) e o INMETRO (no Rio de Janeiro) também. Os padrões usados são geralmente de terceira ou quarta geração, quer dizer que foram aferidos por padrões de terceira ou segunda geração, e assim por diante, até chegar nos padrões primários que são guardados nos principais institutos de metrologia do mundo (como no caso do metro padrão, feito de platina, P.es.) mas que cada vez mais conseguem ter uma definição que permitiria sua reconstrução a partir de propriedades físicas básicas e não pela cópia de uma peça que poderia eventualmente até desaparecer. Temos assim o padrão de tempo pelo relógio atômico, o de comprimento pelo comprimento de onda de uma certa luz de laser, ou, mais recentemente, pela distância percorrida pela luz numa fração muito bem definida de tempo, e outros.

Testes de linearidade:

Podemos provar um instrumento com testes de linearidade, como P.es., se uma pilha é lida como tendo 1,5 $\pm$ 0,05 V e outra 1,6 $\pm$ 0,05 V , devemos esperar que ao coloca-las em serie a leitura seja 3,1 $\pm$ 0,1 V, se não fosse, perceberíamos assim o defeito (mas não poderíamos corrigi-lo).

Caso de escalas com diferente constante:

Cada escala do instrumento pode ser linear, mais uma delas corresponder a uma constante que não é a correta. Nesse caso, é possível até que algum valor lido seja o mesmo nas duas escalas, por acaso.

Valores relativos e absolutos:

Em muitas experiências o conhecimento do valor absoluto medido não é necessário, porque somente observam-se variações relativos sobre referências conhecidas. Se, p.es., medimos levantando uma curva que tem picos gerados por fenômenos conhecidos e já medidos, basta tomar a distância a esses picos como referência, o que nos livra de uma trabalhosa aferição. Mesmo assim, as experiências que um físico deve desenvolver necessitam de conceitos criteriosos sobre erros. Imaginemos também um físico trabalhando no desenho ou aferição de instrumentos ou em experiências para as quais não instrumentos prontos para medição.

O uso rigoroso dos valores absolutos é importante na industria, p.es. quando os componentes não são produzidos numa mesma planta, ou seja, não são controlados pelos mesmos instrumentos. Componentes que saem de uma fábrica tem de se corresponder com os que vem de outra. A nível internacional isto gera o gerenciamento de normas rigorosas.

Aplicação da estatística no cálculo do erro:

Se o fenômeno oferece variações maiores que o erro de leitura, os valores lidos serão diferentes ao repetir a medição, podendo se aplicar estatística tirando a média <**x**> e o desvio quadrático (σ). A média representa o valor mais provável e o desvio o erro mais provável. Para isto o numero de medições precisa ser grande. Quanto?. Até que o valor da média e do desvio deixem de ter variações apreciáveis (vide explicação por extenso na Ref.1). Quanto é uma variação apreciável? A resposta sai da mesma consideração que define quanto é o erro tolerável, como veremos mais adiante.

$$\mathbf{x} \cong \langle \mathbf{x} \rangle \pm \sigma$$

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x} = \sum \mathbf{x}_i / \mathbf{N} \quad , \quad \sigma = \sqrt{\sum (\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)^2 / \mathbf{N}} \qquad \mathbf{(1)}$$

Assim, usamos como erro absoluto $\Delta\mathbf{x}$ o valor de σ , mas isto implica numa probabilidade baixa de o erro estar fora dessa faixa. Esta modalidade é usada em física porque dá o erro mais provável e em engenharia onde permite baixar os custos de produção.

PROPAGAÇÃO DOS ERROS

De maneira absoluta:

Uma magnitude resulta geralmente da medição de varias outras, combinadas numa fórmula. Os erros de leituras das magnitudes primárias afetam ao resultado de maneira diversa, segundo seja a fórmula. Chamamos isto de propagação do erro da magnitude primária no resultado final. Assim, se a magnitude **A** vem definida por uma fórmula como P.es.:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} / \mathbf{D}$$

e as magnitudes **B**, **C** e **D** são medidas com erros $\Delta\mathbf{B}$, $\Delta\mathbf{C}$ e $\Delta\mathbf{D}$, o erro $\Delta\mathbf{A}$ vem de obter o valor máximo possível de **A**:

$\mathbf{A_M} = (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})\,(\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C}) / (\mathbf{D} - \Delta\mathbf{D})$ e subtrai-lo do mínimo:

$$\mathbf{A_m} = (\mathbf{B} - \Delta\mathbf{B})\,(\mathbf{C} - \Delta\mathbf{C}) / (\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D})$$

Assim, damos como valorde **A** a media e o desvio $\Delta\mathbf{A}$ segundo as relações:

$$\mathbf{A} = \langle \mathbf{A} \rangle \pm \Delta\mathbf{A}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle = (\mathbf{A_M} + \mathbf{A_m})/2 \qquad \Delta\mathbf{A} = (\mathbf{A_M} - \mathbf{A_m})/2 \qquad \mathbf{(2)}$$

que é o valor do erro, sem usar nenhuma aproximação.

Na aproximação diferencial:

Se a fórmula for muito complexa pode ser difícil manipula-la, ficando sempre disponível o resultado por cálculo numérico (calculadora, computador). Uma outra maneira de obter fórmulas semelhantes, muito usada nos textos, surge de aproximar os resultados do cálculo diferencial. Se é possível aceitar que o erro é pequeno (de novo a questão: quanto?) frente ao valor medido, pode-se aproximar o erro $\Delta \mathbf{x}$ ao valor diferencial d**x**, igualando o incremento da função pela derivada da curva:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \;\text{---->}\quad \Delta y \approx \Delta y^* = d\mathbf{y}/dx \;.\; \Delta \mathbf{x} \qquad \mathbf{(3)}$$

que corresponde ao caso da **Figura 3.**

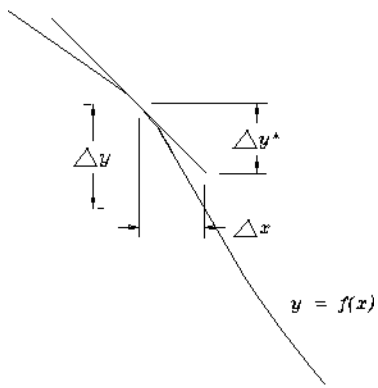

Fig.3: Aproximação do incremento de uma curva por meio da derivada. Observe o segmento tangente a curva representando a derivada.

Para saber quando isto é possível necessitamos de uma evaluação que também não é simples, mas aceitando que alguém já testou o critério, teremos uma fórmula como:

$$\Delta A = \left|\frac{\partial A}{\partial B}\right| \Delta B + \left|\frac{\partial A}{\partial C}\right| \Delta C + \left|\frac{\partial A}{\partial D}\right| \Delta D \qquad \mathbf{(4)}$$

onde não usamos o sinal da derivada porque, não sabendo o sinal do erro, escolhemos a situação mais desfavorável, a de que os erros sempre acontecem em nossa contra (algo como a "Lei de Murphy").
Experimente usar agora uma fórmula de uma experiência das realizadas calculando o erro por **(2)** e por **(3)**.
Calculo do erro propagado aplicando estatística:

Se o numero de magnitudes (fatores de erro) for grande (quanto?), podemos pensar que não seriamos tão azarados como para cair sempre no caso pior, e pensar que alguns dos erros poderiam aparecer de maneira favorável, diminuindo algo o valor do erro final(caduca a "lei de Murphy"). Nisto entra a estatística, calculando essa probabilidade. No caso normal, gaussiano, somamos os erros de maneira algo parecida à da soma de vetores:

$$\Delta A = \sqrt{\left|\frac{\partial A}{\partial B}\right|^2 \Delta B^2 + \left|\frac{\partial A}{\partial C}\right|^2 \Delta C^2 + \left|\frac{\partial A}{\partial D}\right|^2 \Delta D^2} \qquad \mathbf{(5)}$$

Vejamos *aproximadamente* como isto funciona na **Figura 4**, onde (1), (2) e (3) representam os termos dentro da raiz quadrada na equação 5.

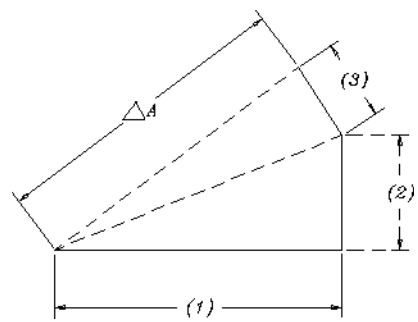

Fig.4: Soma estatística de erros (figura aproximada). Os segmentos tracejados representam a soma.

O erro cresce, mas não tanto quanto sua soma direta. Lembremos que este caso é independente da estatística nos erros de leitura, mas que os dois assumem uma probabilidade de não serem certos, que talvez poderia se chamar de probabilidade de erro do valor estimado para o erro.

Valor permitido para um erro:

Quanto de erro é bom? 1%, 5%? ... depende de cada caso. Se perguntarmos: "5 reais é muito dinheiro?, não haveria resposta possível sem conhecimento do contexto da situação. Conhecer o tamanho de um ser extraterrestre com exatidão de 200% seria muito bom, já para medir o consumo de eletricidade de uma casa essa precisão seria seguramente insuficiente.

Consequência do erro nos gráficos:

Ao colocar as faixas de erro na representação de valores medidos num gráfico, lembre sempre que a curva esperada pode passar por qualquer ponto dentro dessa faixa, não necessariamente pelo valor medido. Lembre também que o fato de um ponto medido ser superior (ou inferior) aos outros não indica que esse seja o máximo (ou o mínimo) da curva, visto que falta conhecer todos os outros pontos na vizinhança. No caso da interseção de duas curvas, observe que a extensão da largura delas até a faixa de erro determina uma possibilidade de deslocamento do ponto de interseção no sentido das abcissas, dando uma faixa de erro para o ponto de interseção.

Obs.: *As figuras foram realizadas com o programa AUTOCAD R10, muito apropriado para o desenho técnico porque o objeto pode ser definido por suas coordenadas. E também de maneira tridimensional, oferecendo depois a vista (perspectiva) mais conveniente. Ele pode funcionar num PC 286, mas necessita de co-processador matemático. O programa compactado cabe num único disquete. A versão mais atual é a R13, para DOS ou Windows. É produzido pela firma AutoDesk e pode ser acoplado ao programa 3DStudio para fazer animações.*

Referências bibliográficas:

1) Apostilas de curso semelhantes dessenvolvidas desde 1989. Procurar em http://geocities.com/prof_lunazzi/f329/f329.htm

2)*“Mecánica Elemental”,* Roederer, Juan G., cap.1, Editorial Universitária de Buenos Aires- EUDEBA, 1963, p.17-39.(vide copia fornecida na pasta da disciplina na biblioteca do IFGW).

3) *“Problemas experimentais de Física”,* Guimaraes, Roversi, Hennies, ed. UNICAMP,1984, vol.2 e suplemento sobre “Algaritmos significativos, erros e desvios”, ou edições mais atuais.