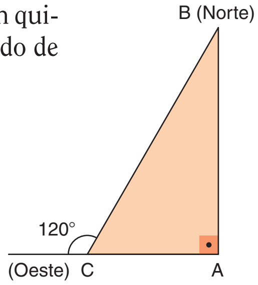
M2 - Trigonometria nos Triângulos

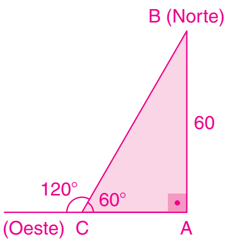
1 (Vunesp-SP) Um pequeno avião deveria partir de uma cidade *A* rumo a uma cidade *B* ao Norte, distante 60 quilômetros de *A*. Por um problema de orientação, o piloto seguiu erradamente rumo ao Oeste. Ao perceber o erro, ele corrigiu a rota, fazendo um giro de 120° à direita em um ponto *C*, de modo que o seu trajeto, juntamente com o trajeto que deveria ter sido seguido, formaram, aproximadamente, um triângulo retângulo ABC, como mostra a figura.



Com base na figura, a distância em quilômetros que o avião voou partindo de *A* até chegar a *B* é:

a) $30\sqrt{3}$
b) $40\sqrt{3}$
X c) $60\sqrt{3}$
d) $80\sqrt{3}$
e) $90\sqrt{3}$

Temos a figura:



Assim,

$\text{sen } 60° = \frac{60}{BC} \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{BC}$

$\therefore BC = 40\sqrt{3}$

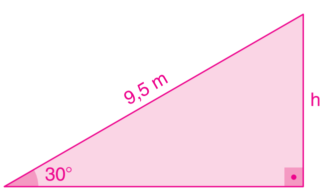
$\text{tg } 60° = \frac{60}{AC} \therefore \sqrt{3} = \frac{60}{AC}$

$\therefore AC = 20\sqrt{3}$

$AC + BC = 20\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$

2 (EEM-SP) Quantos degraus de 19 cm de altura são necessários para substituir uma rampa de 9,5 m de extensão com inclinação de 30°?

Fazendo a figura, vem:



$\text{sen } 30° = \frac{h}{9{,}5} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{9{,}5}$

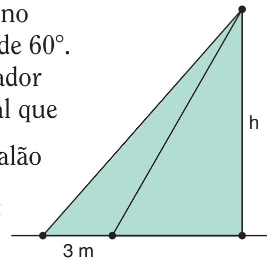
$h = 4{,}75 \text{ m}$

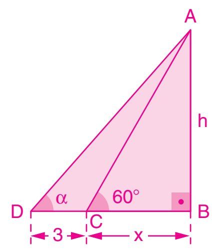
Logo, o número de degraus é:

$N = \frac{4{,}75}{0{,}19} = 25$

N = 25 degraus

3 (UEM-PR) Um balão parado no céu é observado sob um ângulo de 60°. Afastando-se 3 metros, o observador passa a vê-lo sob um ângulo α tal que $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}$. Então, a altura do balão multiplicada por $11(6 - \sqrt{3})$ é:





No triângulo ABC, temos:

$\text{tg } 60° = \frac{h}{x} = \sqrt{3} \rightarrow h = \sqrt{3}x$ (1)

No triângulo ABD, temos:

$\text{tg } \alpha = \frac{h}{x + 3} = \frac{1}{2} \rightarrow 2h = x + 3$

$2h - 3 = x$ (2)

Substituindo (2) em (1), vem:

$h = \sqrt{3}(2h - 3) \rightarrow h = 2\sqrt{3}h - 3\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}h - h = 3\sqrt{3}$

$h(2\sqrt{3} - 1) = 3\sqrt{3}$

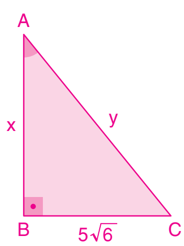
$h = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{2\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3} + 1} = \frac{3(6 + \sqrt{3})}{11}$

Portanto, $11(6 - \sqrt{3})h = \frac{\cancel{11}(6 - \sqrt{3}) \cdot 3 \cdot (6 + \sqrt{3})}{\cancel{11}} = 3(36 - 3) = 99 \rightarrow 99 \text{ m}$

4 (UFMG) No triângulo ABC, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto, $BC = 5\sqrt{6}$ e $\cos(B\hat{A}C) = \frac{3}{\sqrt{15}}$.

Considerando esses dados, calcule o comprimento do cateto AB.

Representando o triângulo ABC, temos:



$y^2 = x^2 + (5\sqrt{6})^2 \rightarrow y^2 = x^2 + 150$ (1)

$\cos(B\hat{A}C) = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{x}{y} \rightarrow x = \frac{3y}{\sqrt{15}}$ (2)

Substituindo (2) em (1), temos:

$y^2 = \frac{9y^2}{15} + 150 \rightarrow y^2 = 375 \rightarrow y = 5\sqrt{15}$

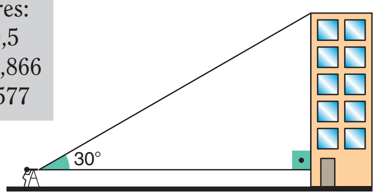
Portanto:

$x = \frac{3 \cdot 5\sqrt{15}}{\sqrt{15}} \rightarrow x = 15$

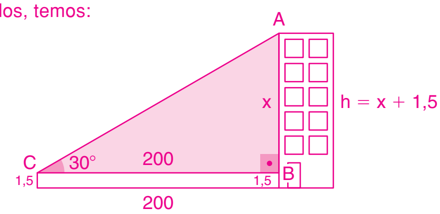
5 (UFJF-MG) Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento ótico para medir ângulos) a 200 metros do edifício e mediu um ângulo de 30°, como indicado na figura abaixo. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,5 metro do solo, pode-se concluir que, dentre os valores abaixo, o que melhor aproxima a altura do edifício, em metros, é:

a) 112
b) 115
X c) 117
d) 120
e) 124

Use os valores:
sen 30° = 0,5
cos 30° = 0,866
tg 30° = 0,577



Pelos dados, temos:



No triângulo retângulo ABC, temos:

$\text{tg } 30° = \frac{x}{200} \rightarrow 0{,}577 = \frac{x}{200}$

$x = 115{,}4$ m

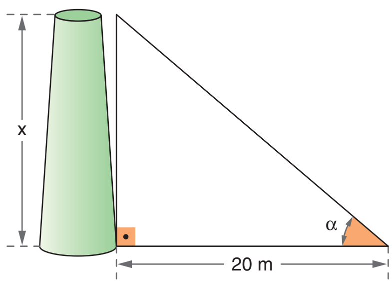
Logo:

$h = x + 1{,}5 \rightarrow h = 115{,}4 + 1{,}5$

$h = 116{,}9$ m

Portanto, a altura do edifício é aproximadamente 117 m.

6 (UCSal-BA) A autora alegrava-se em conseguir estimar o comprimento de objetos inacessíveis como, por exemplo, a altura *x* da torre mostrada na figura abaixo.



A partir do conhecimento de *relações trigonométricas* e sabendo que sen α = 0,6428 e cos α = 0,7660, ela podia encontrar que *x*, em metros, era aproximadamente igual a:

a) 16 X b) 17 c) 18 d) 19 e) 20

Observando a figura, temos:

$\text{tg } \alpha = \frac{x}{20}$ (1)

Mas, $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{0{,}6428}{0{,}7660}$

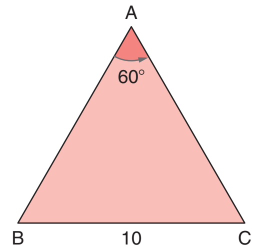
$\text{tg } \alpha \simeq 0{,}84$ (2)

Substituindo (2) em (1), vem:

$\frac{x}{20} = 0{,}84 \rightarrow x = 16{,}8$ m

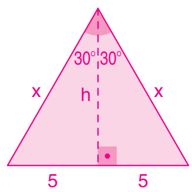
Portanto, a altura da torre era aproximadamente 17 m.

7 (UFAC) Se a medida do ângulo BÂC é igual a 60°, AB = AC e BC = 10, então a área do triângulo ABC da figura vale:



a) 10
b) $\sqrt{3}$
X c) $25\sqrt{3}$
d) $10\sqrt{3}$
e) $5\sqrt{3}$

Usando a figura, temos:



$\text{sen } 30° = \frac{5}{x} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{x} \rightarrow x = 10$

Assim, $\cos 30° = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{10} \rightarrow h = 5\sqrt{3}$

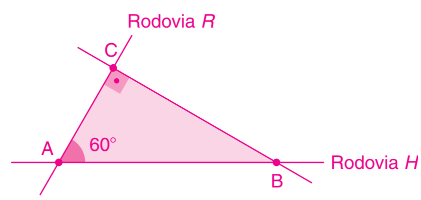
A área do triângulo é:

$S = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow S = \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$

8 (UEM-PR) No problema a seguir, considere que qualquer trajetória do ciclista é feita em linha reta e com velocidade constante e igual a 10 m/s.

Duas rodovias, *H* e *R*, cruzam-se em um ponto *A*, segundo um ângulo de 60°. Um ciclista parte do ponto *A* pela rodovia *H* e, após um terço de hora, atinge um ponto *B*, de onde é possível seguir para a rodovia *R*, percorrendo o menor caminho, atingindo-a no ponto *C*. Para retornar de *C* ao ponto *A* de origem, pela rodovia *R*, a distância que o ciclista deve percorrer, em quilômetros, é:

Pelos dados do problema, temos:



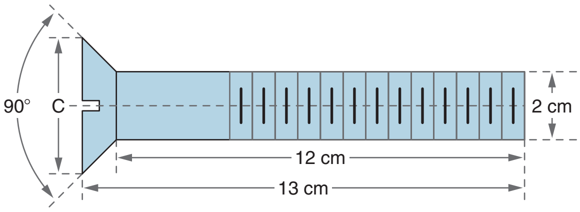
O ciclista tem velocidade constante de 10 m/s e demorou de *A* até *B* $\frac{1}{3}$ hora $= \frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ minutos.

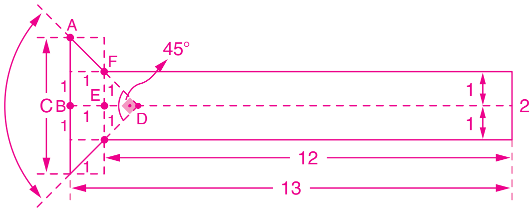
Logo, ele percorreu $10 \cdot 60 \cdot 20 = 12\,000 \rightarrow 12\,000$ m = 12 km.

Portanto:

$\cos 60° = \frac{AC}{AB} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{12} \rightarrow AC = 6$ km

9 (UFMT) Um rebite é produzido com as dimensões indicadas na figura. Calcule o valor, em cm, da dimensão C.





No $\triangle$DEF, temos:

$\text{tg } 45° = \frac{EF}{ED} \rightarrow 1 = \frac{1}{ED} \rightarrow ED = 1 \rightarrow 1 \text{ cm}$

Portanto: $BD = BE + ED \rightarrow BD = 1 + 1 = 2 \rightarrow 2 \text{ cm}$

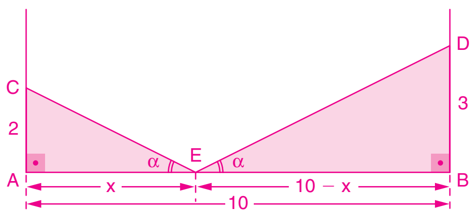
No $\triangle$ABD, temos:

$\text{tg } 45° = \frac{AB}{BD} \rightarrow 1 = \frac{AB}{2} \rightarrow AB = 2 \rightarrow 2 \text{ cm}$

Logo: $C = 2AB = 2 \cdot 2 = 4 \rightarrow 4 \text{ cm}$

10 (EEM-SP) Pelas extremidades A e B de um segmento $\overline{AB}$, traçam-se perpendiculares, e sobre elas tomam-se os segmentos AC = 2 cm e BD = 3 cm. Em $\overline{AB}$ toma-se o ponto E tal que os ângulos $A\hat{E}C$ e $B\hat{E}D$ sejam congruentes. Calcule os comprimentos dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BE}$, sabendo-se que AB = 10 cm.

Pelos dados do problema, temos:



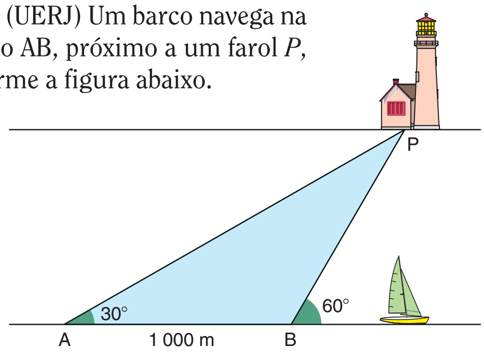
$$\left.\begin{array}{l} \text{No triângulo CEA, temos tg } \alpha = \frac{2}{x} \\ \text{No triângulo DEB, temos tg } \alpha = \frac{3}{10 - x} \end{array}\right\}$$

Logo:

$\frac{2}{x} = \frac{3}{10 - x} \rightarrow x = 4$

Portanto, AE = 4 cm e BE = 6 cm.

11 (UERJ) Um barco navega na direção AB, próximo a um farol P, conforme a figura abaixo.

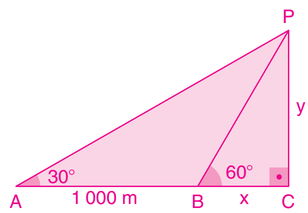


(Adaptado de BONGIOVANNI, Vincenzo *et alii*. *Matemática e Vida*. São Paulo: Ática, 1990.)

No ponto A, o navegador verifica que a reta AP, da embarcação ao farol, forma um ângulo de 30° com a direção AB. Após a embarcação percorrer 1 000 m, no ponto B, o navegador verifica que a reta BP, da embarcação ao farol, forma um ângulo de 60° com a mesma direção AB. Seguindo sempre a direção AB, a menor distância entre a embarcação e o farol será equivalente, em metros, a:

a) 500 x b) $500\sqrt{3}$ c) 1 000 d) $1\,000\sqrt{3}$

Da figura, temos:



A menor distância é *y*.

$\text{tg } 30° = \frac{y}{x + 1\,000}$ e $\text{tg } 60° = \frac{y}{x}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{x + 1\,000}$ ① e $\sqrt{3} = \frac{y}{x}$ ②

De ②, vem: $y = \sqrt{3}x$

De ①, vem:

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}x}{x + 1\,000} = 500 \rightarrow x = 500 \text{ m}$

Logo:

$y = \sqrt{3} \cdot 500 = 500\sqrt{3} \rightarrow y = 500\sqrt{3} \text{ m}$

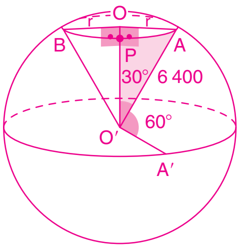
12 (Unicamp-SP) Os pontos A e B estão, ambos, localizados na superfície terrestre a 60° de latitude norte; o ponto A está a 15°45′ de longitude leste e o ponto B a 56°15′ de longitude oeste.

a) Dado que o raio da Terra, considerada perfeitamente esférica, mede 6 400 km, qual é o raio do paralelo de 60°?

b) Qual é a menor distância entre os pontos A e B, medida ao longo do paralelo de 60°?

$\left(\text{Use } \dfrac{22}{7} \text{ como aproximação para } \pi.\right)$

a) Do enunciado, temos:



$\overset{\frown}{PA} = 15°45'$
$\overset{\frown}{PB} = 56°15'$

Os pontos O e O' são, respectivamente, os centros do paralelo e da Terra, e r é a medida do raio do paralelo.
No triângulo retângulo AOO′, temos:

$\text{sen } 30° = \dfrac{r}{6\,400} \rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{r}{6\,400}$

$r = 3\,200$ km

b) Temos que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB}$

$\overset{\frown}{AB} = 15°45' + 56°15' \rightarrow \overset{\frown}{AB} = 72°$

Logo, a distância pedida é igual a:

ângulo		distância
360°	—	$2\pi r$
72°	—	x

$\rightarrow \dfrac{360°}{72°} = \dfrac{2\pi r}{x}$

$5 = \dfrac{2\pi r}{x}$

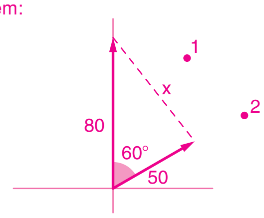
$x = \dfrac{2\pi r}{5}$

$x = \dfrac{2 \cdot \dfrac{22}{7} \cdot 3\,200}{5}$

$x \simeq 4\,022{,}86$ km

13 (UFMT) Considere que os ponteiros menor e maior de um relógio medem, respectivamente, 50 cm e 80 cm. Calcule a distância entre suas extremidades quando o relógio estiver marcando 14 h.

Fazendo a figura, vem:



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$x^2 = (50)^2 + (80)^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos 60°$

$x^2 = 2\,500 + 6\,400 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \dfrac{1}{2}$

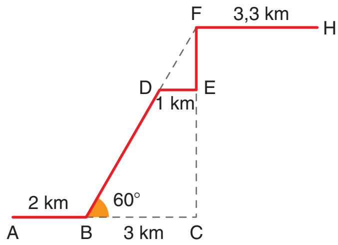
$x^2 = 2\,500 + 6\,400 - 4\,000$

$x^2 = 4\,900$

$x = \sqrt{4\,900}$

$x = 70$ cm

14 (Vunesp-SP) Ao chegar de viagem, uma pessoa tomou um táxi no aeroporto para se dirigir ao hotel. O percurso feito pelo táxi, representado pelos segmentos AB, BD, DE, EF e FH, está esboçado na figura, onde o ponto A indica o aeroporto, o ponto H indica o hotel, BCF é um triângulo retângulo com o ângulo reto em C, o ângulo no vértice B mede 60° e DE é paralelo a BC.

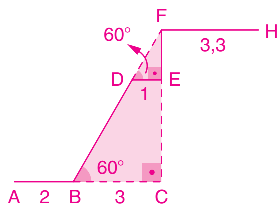


Assumindo o valor $\sqrt{3} = 1{,}7$ e sabendo-se que AB = 2 km, BC = 3 km, DE = 1 km e FH = 3,3 km, determine:

a) as medidas dos segmentos BD e EF em quilômetros

b) o preço que a pessoa pagou pela corrida (em reais), sabendo-se que o valor da corrida do táxi é dado pela função $y = 4 + 0{,}8x$, sendo x a distância percorrida em quilômetros e y o valor da corrida em reais

a) Do enunciado, temos a figura:



No triângulo retângulo BCF, temos:

$\cos 60° = \dfrac{3}{BF} \therefore BF = 6$

No triângulo retângulo DEF, temos:

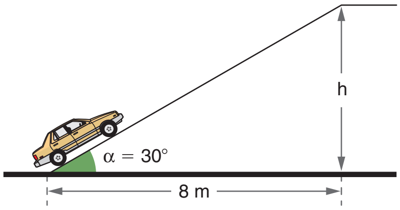
$\text{tg } 60° = \dfrac{EF}{1} \therefore EF = \sqrt{3} = 1{,}7 \rightarrow 1{,}7$ km

$\cos 60° = \dfrac{1}{DF} \therefore DF = 2$

Como BD = BF − DF, vem:
BD = 6 − 2 ∴ BD = 4 → 4 km

b) A distância percorrida x é:
$x = 2 + 4 + 1 + 1{,}7 + 3{,}3 = 12$
Então, $y = 4 + 0{,}8 \cdot 12 \therefore y = 13{,}60 \rightarrow$ R$ 13,60

15 (Unemat-MT) A rampa de acesso a um estacionamento de automóveis faz um ângulo de 30° com o solo e, ao subi-la, um carro desloca-se horizontalmente 8 m de distância, conforme o desenho.



Dados:
sen 30° $= \frac{1}{2}$
cos 30° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

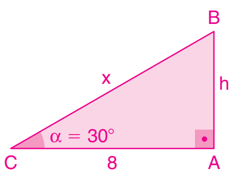
Sobre os dados, julgue os itens:

1. A altura da rampa, representada por h, no desenho, é de $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ m.

2. O comprimento da rampa inclinada, por onde sobem os carros, é o dobro da altura h.

3. Na mesma rampa, se o ângulo formado com o solo fosse de 60°, ou seja, o dobro de α, então a altura h também seria o dobro.

Do enunciado, temos:



1. No triângulo retângulo ABC, temos:

$$\text{tg } 30° = \frac{h}{8} \rightarrow \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} = \frac{h}{8}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{h}{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{8}$$

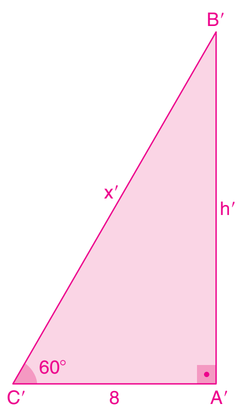
$$h = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ m (verdadeira)}$$

2. No triângulo retângulo ABC, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{x}$$

$$x = 2h \text{ (verdadeira)}$$

3.



No triângulo retângulo A'B'C', temos:

$$\text{tg } 60° = \frac{h'}{8} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{h'}{8}$$

$$h' = 8\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{h'}{x'} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{x'}$$

$$x' = 16 \text{ m (falsa)}$$

16 (UERJ) A extremidade A de uma planta aquática encontra-se 10 cm acima da superfície da água de um lago (figura 1). Quando a brisa a faz balançar, essa extremidade toca a superfície da água no ponto B, situado a $10\sqrt{3}$ cm do local em que sua projeção ortogonal C, sobre a água, se encontrava inicialmente (figura 2). Considere $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{BC}$ segmentos de retas e o arco $\overset{\frown}{AB}$ uma trajetória do movimento da planta.

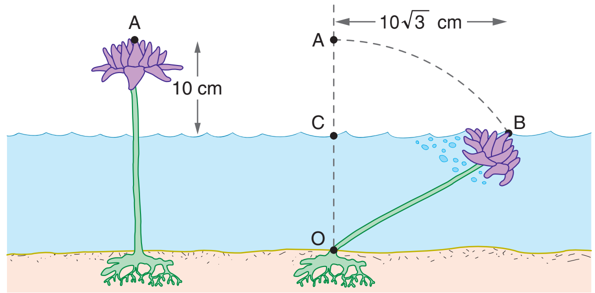


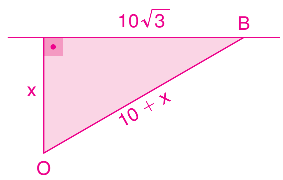
Figura 1 Figura 2

Determine:

a) a profundidade do lago no ponto O em que se encontra a raiz da planta

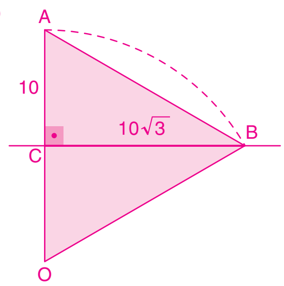
b) o comprimento, em cm, do arco $\overset{\frown}{AB}$

a)



$$(10 + x)^2 = (10\sqrt{3})^2 + x^2$$
$$100 + 20x + x^2 = 300 + x^2$$
$$20x = 200$$
$$x = 10 \text{ cm}$$

b)



Como $\overline{OA} = \overline{OB}$ (raio), o △ABO é isósceles (ou seja, $\hat{A} = \hat{B}$).
No △ACB, temos:

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{CB}{AC} \rightarrow \text{tg } \hat{A} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$$
$$\hat{A} = \hat{B} = 60°$$

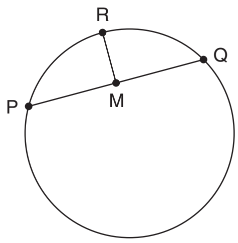
Daí, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{O} = 180° \rightarrow 60° + 60° + \hat{O} = 180°$
$\hat{O} = 60°$

O △ABO é eqüilátero.

O arco $\overset{\frown}{AB}$ está contido em uma circunferência de centro O e raio $R = \overline{OA} = \overline{OB} = 20$ cm.

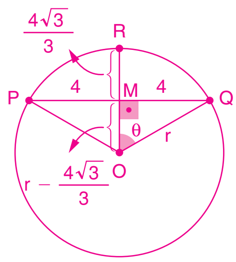
$$\text{med } (\overset{\frown}{AB}) = \frac{1}{6} \cdot 2\pi R = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 20 = \frac{20\pi}{3} \rightarrow \frac{20\pi}{3} \text{ cm}$$

17 (Fuvest-SP) Na figura, M é o ponto médio da corda $\overline{PQ}$ da circunferência e $PQ = 8$. O segmento $\overline{RM}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$ e $RM = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Calcule:



a) o raio da circunferência

b) a medida do ângulo $P\hat{O}Q$, onde O é o centro da circunferência



a) No triângulo retângulo OMQ, tem-se:

1) $OM = r - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $MQ = 4$, $OQ = r$ e

$(OQ)^2 = (OM)^2 + (MQ)^2$

Assim sendo, $r^2 = \left(r - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4^2$

$r = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

2) $\text{sen}\ \theta = \dfrac{4}{r} = \dfrac{4}{\frac{8\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60°$

b) A medida do ângulo $P\hat{O}Q$ é $2 \cdot \theta = 120°$

18 (UEMA) Em um triângulo de vértices A, B e C, $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 10$ m e o ângulo interno formado pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ mede 60°. A medida do cosseno do ângulo interno formado pelos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{19}}$

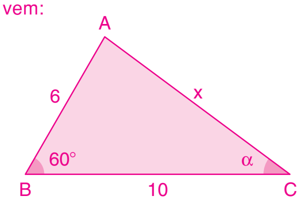
b) $\dfrac{3}{\sqrt{19}}$

X c) $\dfrac{7}{2\sqrt{19}}$

d) $\dfrac{5}{3\sqrt{19}}$

e) $\dfrac{1}{5\sqrt{19}}$

Fazendo a figura, vem:



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB) \cdot (BC) \cdot \cos 60°$

$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 36 + 100 - 60 \Rightarrow x^2 = 76 \Rightarrow x = 2\sqrt{19}$

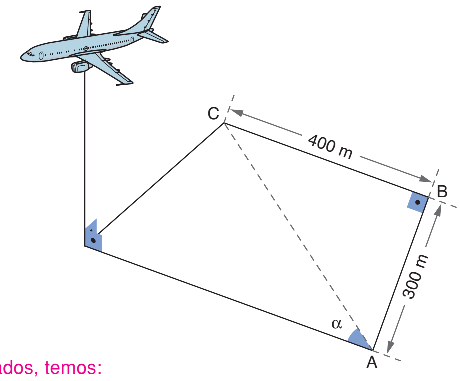
Aplicando novamente a lei dos cossenos, vem:

$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 - 2(BC) \cdot (AC) \cdot \cos \alpha$

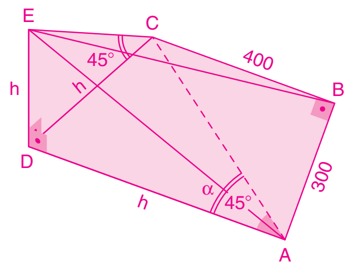
$6^2 = 10^2 + (2\sqrt{19})^2 - 2 \cdot 10 \cdot 2\sqrt{19} \Rightarrow 36 = 100 + 76 - 40\sqrt{19} \cdot \cos \alpha$

$40\sqrt{19}\ \cos \alpha = 140 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{140}{40\sqrt{19}} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{7}{2\sqrt{19}}$

19 (UFU-MG) No instante do impacto com a torre sul do *World Trade Center*, o avião da *United Airlines* foi fotografado simultaneamente por três fotógrafos, cujos tripés estão representados na figura abaixo pelos pontos A, B e C. Os três fotógrafos tinham suas máquinas fotográficas colocadas sobre esses tripés de 1,70 m de altura cada um. Sabendo-se que as inclinações das máquinas fotográficas, em relação ao solo, nos tripés A e C eram de 45° e que $\cos \alpha = \dfrac{5}{7}$, determine a altura em que o avião estava naquele momento.



Pelos dados, temos:



O triângulo EDA é isósceles, logo $ED = DA = h$.

O triângulo EDC é isósceles, logo $ED = DC = h$.

Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \rightarrow (AC)^2 = (300)^2 + (400)^2$

$(AC)^2 = 90\,000 + 160\,000 = 250\,000$

$AC = 500$ m

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ACD, temos:

$(CD)^2 = (AC)^2 + (AD)^2 - 2 \cdot (AC) \cdot (AD) \cdot \cos \alpha$

$\cancel{h^2} = 250\,000 + \cancel{h^2} - 2 \cdot 500 \cdot h \cdot \dfrac{5}{7}$

$5\,000\ h = 1\,750\,000$

$h = 350$ m

Como as máquinas fotográficas estavam sobre tripés de altura de 1,70 m, temos:

$350 + 1{,}70 = 351{,}70 \rightarrow 351{,}70$ m

Em questões como a 20, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

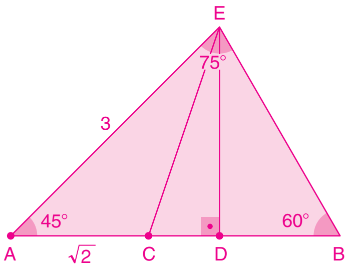
20 (UFPR) Em um triângulo ABE, a medida do lado $\overline{AE}$ é 3, a do ângulo *E* é 75°, e a do ângulo *A* é 45°. Dois pontos, *C* e *D*, pertencem ao lado $\overline{AB}$. Sabe-se que a distância AC é $\sqrt{2}$ e que o segmento $\overline{ED}$ é perpendicular a $\overline{AB}$. Nessas condições, é correto afirmar:

(01) A medida do ângulo *B* é igual a 60°.

(02) AD > ED

(04) $EB = \sqrt{6}$

(08) $EC = \sqrt{5}$



01. $\hat{A} + \hat{E} + \hat{B} = 180° \rightarrow 45° + 75° + \hat{B} = 180° \rightarrow \hat{B} = 60°$ (verdadeira)

02. $\left.\begin{array}{l} \text{sen } 45° = \dfrac{ED}{AE} \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{ED}{3} \rightarrow ED = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45° = \dfrac{AD}{AE} \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{AD}{3} \rightarrow AD = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}$ AD = ED (falsa)

04. No triângulo retângulo ADB, temos:

$\text{sen } 60° = \dfrac{ED}{EB} \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{EB} \rightarrow EB = \sqrt{6}$ (verdadeira)

08. Usando a lei dos cossenos no triângulo AEC, temos:

$(EC)^2 = (AE)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot AE \cdot AC \cdot \cos 45°$

$(EC)^2 = 3^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

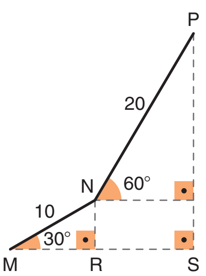
$(EC)^2 = 9 + 2 - 6$

$(EC)^2 = 5$

$EC = \sqrt{5}$ (verdadeira)

Portanto: 01 + 04 + 08 = 13

21 (UFRN) Ao se tentar fixar as extremidades de um pedaço de arame reto, de 30 m de comprimento, entre os pontos *M* e *P* de um plano, o arame, por ser maior do que o esperado, entortou, como mostra a figura abaixo.



A partir desses dados, calcule, em metros:

a) o comprimento dos seguimentos MS e SP

b) quanto o arame deveria medir para que tivesse o mesmo tamanho do segmento MP

a) • Cálculo de MS

MR: $\cos 30° = \dfrac{MR}{10}$ $\quad MR = 10 \cos 30° = 10 \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

RS: $\cos 60° = \dfrac{NT}{20}$ $\quad NT = 20 \cos 60° = 20 \dfrac{1}{2} = 10$

• NT = RS

• RS = 10

MS: $MS = MR + RS = 5\sqrt{3} + 10 = 10 + 5\sqrt{3}$

• Cálculo de SP

PT: $\text{sen } 60° = \dfrac{PT}{20}$ $\quad PT = 20 \text{ sen } 60° = 20 \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

TS: $\text{sen } 30° = \dfrac{NR}{10}$ $\quad NR = 10 \text{ sen } 30° = 10 \dfrac{1}{2} = 5$

• NR = TS

• TS = 5

$\therefore SP = PT + TS = 10\sqrt{3} + 5 = 5 + 10\sqrt{3}$

b) Observando que MP é a hipotenusa do triângulo retângulo MPS, pode-se usar:

$(MP)^2 = (MN)^2 + (NP)^2 - 2 \cdot (MN) \cdot (NP) \cdot \cos (MNP)$

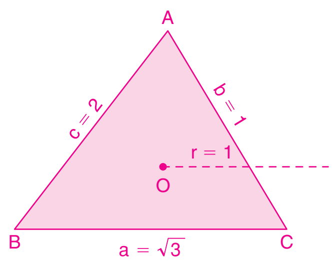
$(MP)^2 = 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 150°$

$(MP)^2 = 100 + 400 - 400 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$MP = \sqrt{500 + 200\sqrt{3}} = 10\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$

22 (UEMA) Considere um triângulo ABC inscrito numa circunferência de raio unitário cujos lados medem $a = \sqrt{3}$, b = 1 e c = 2. Determine a soma $2\hat{A} + 3\hat{B} + \hat{C}$, onde $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos internos desse triângulo.

Desenhando o triângulo ABC, vem:



Aplicando a lei dos senos, temos:

$\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{1}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{2}{\text{sen } \hat{C}} = 2 \cdot 1 = 0$

Logo:

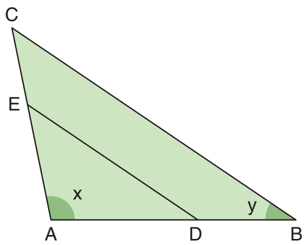
$\dfrac{\sqrt{3}}{\text{sen } \hat{A}} = 2 \rightarrow \text{sen } \hat{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \hat{A} = 60°$

$\dfrac{1}{\text{sen } \hat{B}} = 2 \rightarrow \text{sen } \hat{B} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \hat{B} = 30°$

$\dfrac{2}{\text{sen } \hat{C}} = 2 \rightarrow \text{sen } \hat{C} = 1 \rightarrow \hat{C} = 90°$

Portanto: $2\hat{A} + 3\hat{B} + \hat{C} = 2 \cdot 60° + 3 \cdot 30° + 90° = 300°$

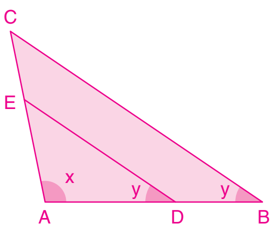
23 (Vunesp-SP) Cinco cidades, *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, são interligadas por rodovias, conforme mostra a figura.



A rodovia AC tem 40 km, a rodovia AB tem 50 km, os ângulos *x*, entre AC e AB, e *y*, entre AB e BC, são tais que $\text{sen } x = \frac{3}{4}$ e $\text{sen } y = \frac{3}{7}$. Deseja-se construir uma nova rodovia ligando as cidades *D* e *E* que, dada a disposição destas cidades, será paralela a BC.

a) Use a lei dos senos para determinar quantos quilômetros tem a rodovia BC.

b) Sabendo que AD tem 30 km, determine quantos quilômetros terá a rodovia DE.



a) Sendo AC = 40 km, AB = 50 km, $\text{sen } x = \frac{3}{4}$ e $\text{sen } y = \frac{3}{7}$, pela lei dos senos, temos:

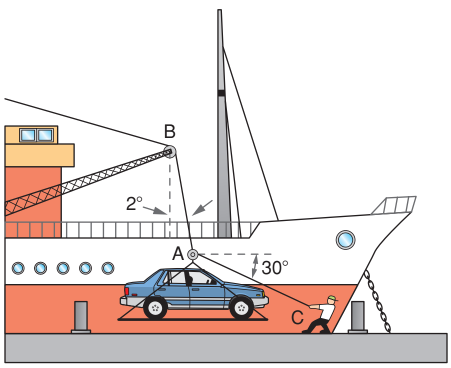
$$\frac{BC}{\text{sen } x} = \frac{AC}{\text{sen } y} \Rightarrow \frac{BC}{\frac{3}{4}} = \frac{40}{\frac{3}{7}}$$

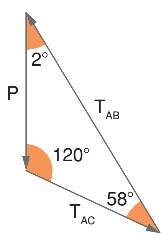
BC = 70 → 70 km

b) Sendo $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, temos $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ e, portanto:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{30}{50} = \frac{DE}{70} \Rightarrow DE = 42 \rightarrow 42 \text{ km}$$

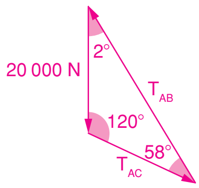
24 (Unic-MT) Durante a descarga de um automóvel de peso 20 kN, o guindaste que suporta o carro precisa do auxílio de um cabo puxado por um estivador para colocá-lo na posição correta. O desenho abaixo mostra a situação. (Dados: sen 2° = 0,034, sen 58° = 0,848, cos 2° = 0,999, cos 58° = 0,529, sen 120° = 0,866 e cos 120° = 0,500)





Nessas condições, podemos dizer que a tração no cabo puxado pelo homem em relação ao ponto *A* é de:

a) 20 283 N
b) 17 320 N
c) 680 N
d) 200 N
x e) 801 N



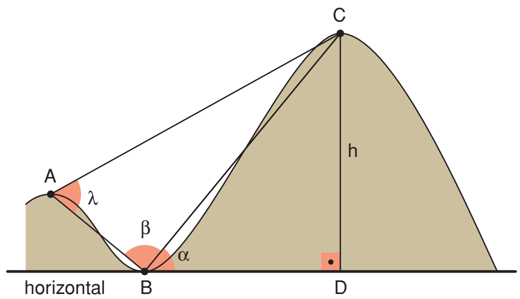
$$\frac{\text{sen } 58°}{20\,000} = \frac{\text{sen } 2°}{T_{AC}} \rightarrow \frac{0,848}{20\,000} = \frac{0,034}{T_{AC}}$$

$T_{AC} \simeq 801,8$ N ou $T_{AC} = 801$

25 (UFMT) Para determinar a altura de um morro, um topógrafo adotou o seguinte procedimento:

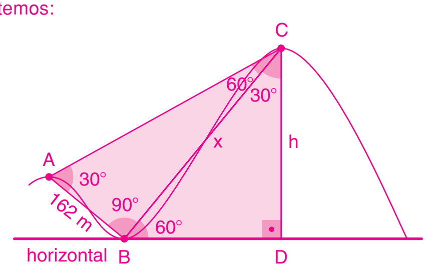
- Escolheu dois pontos, *A* e *B*, situados no mesmo plano vertical que passa por *C*.
- Mediu a distância AB, encontrando 162 m.
- Com auxílio de um teodolito mediu os ângulos α, β e λ, encontrando, respectivamente, 60°, 90° e 30°.

A figura ilustra o procedimento descrito.



Qual a altura do morro (h), em metros, encontrada pelo topógrafo?

Da figura, temos:



Usando a lei dos senos no △ABC, temos:

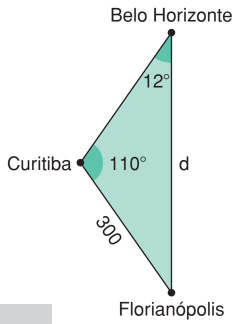
$$\frac{\text{sen } 30°}{x} = \frac{\text{sen } 60°}{162} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{162} \rightarrow x = 54\sqrt{3} \text{ m}$$

No △BDC, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{54\sqrt{3}} \rightarrow h = 81 \rightarrow h = 81 \text{ m}$$

26 (Furb-SC) Florianópolis, Curitiba e Belo Horizonte, respectivamente, capitais de Santa Catarina, Paraná e Minas Gerais, estão localizadas conforme a figura ao lado.

A partir dos dados fornecidos, qual a distância entre Florianópolis e Belo Horizonte?



a) 1 700 km
b) 2 395 km
x c) 1 395 km
d) 2 700 km
e) 2 390 km

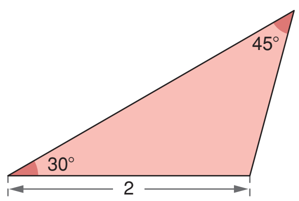
Dados:
$\cos 110° = -0{,}34$
$\text{sen } 110° = 0{,}93$
$\cos 12° = 0{,}97$
$\text{sen } 12° = 0{,}20$

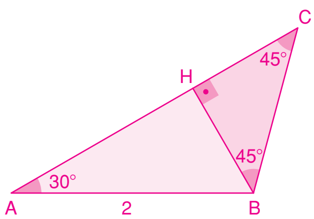
Da figura, temos:

$\dfrac{\text{sen } 110°}{d} = \dfrac{\text{sen } 12°}{300} \rightarrow \dfrac{0,93}{d} = \dfrac{0,20}{300} \rightarrow d = 1\,395 \text{ km}$

27 (MACK-SP) Supondo $\sqrt{3} = 1,7$, a área do triângulo da figura vale:

a) 1,15
b) 1,25
c) 1,30
x d) 1,35
e) 1,45





Da figura, temos:

No $\triangle$ABH: $\begin{cases} \text{sen } 30° = \dfrac{BH}{2} \therefore \dfrac{1}{2} = \dfrac{BH}{2} \therefore BH = 1 \\ \cos 30° = \dfrac{AH}{2} \therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AH}{2} \therefore AH = \sqrt{3} \end{cases}$

No $\triangle$BHC: HC = BH $\therefore$ HC = 1.

A área do $\triangle$ABC é:

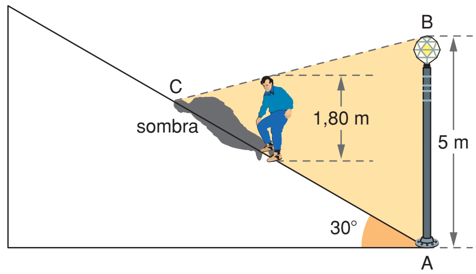
$\dfrac{1}{2} \cdot (AC)(BH) = \dfrac{1}{2} \cdot (AH + HC) \cdot (BH) = \dfrac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot 1$

Fazendo-se $\sqrt{3} = 1{,}7$, a área é $\dfrac{2{,}7}{2}$, ou seja, 1,35.

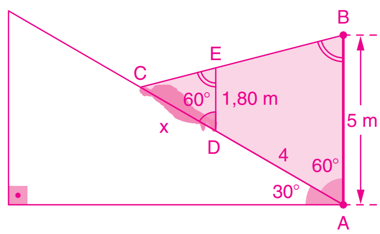
28 (Unicamp-SP) Um homem, de 1,80 m de altura, sobe uma ladeira com inclinação de 30°, conforme mostra a figura. No ponto *A* está um poste vertical de 5 m de altura, com uma lâmpada no ponto *B*. Pede-se para:

a) calcular o comprimento da sombra do homem depois que ele subiu 4 m ladeira acima

b) calcular a área do triângulo ABC



Sendo *x* o comprimento da sombra do homem, em metros, depois que ele subiu 4 m ladeira acima, e *S* a área, em metros quadrados, do triângulo ABC, tem-se:



a) Os triângulos ABC e DEC são semelhantes.

Assim: $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{AB}{DE} \Leftrightarrow \dfrac{4 + x}{x} = \dfrac{5}{1,80} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4 + x}{x} = \dfrac{25}{9} \Leftrightarrow 16x = 36 \Leftrightarrow x = \dfrac{36}{16} \Leftrightarrow x = 2{,}25$

b) $S = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \text{sen } 60°}{2}$

$S = \dfrac{5 \cdot (4 + 2{,}25) \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \dfrac{125\sqrt{3}}{16}$