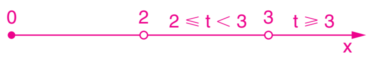
M6 - Função Modular

1 (UERJ) O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a seguinte equação:

$$V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|,\ t \in \mathbb{R}_+$$

Nela, *V* é o volume medido, em m^3, após *t* horas, contadas a partir de 8 h de uma manhã. Determine os horários inicial e final dessa manhã em que o volume permanece constante.

Representando na reta numerada, temos:
$4 - 2t = 0 \rightarrow 2t = 4 \rightarrow t = 2$
$2t - 6 = 0 \rightarrow 2t = 6 \rightarrow t = 3$



Se:
- $0 < t < 2 \rightarrow V = 10 - (4 - 2t) + (2t - 6) = 10 - 4 + 2t + 2t - 6 = 4t$
- $2 \leqslant t < 3 \rightarrow V = 10 + (4 - 2t) + (2t - 6) = 10 + 4 - 2t + 2t - 6 = 8$
- $t \geqslant 3 \rightarrow V = 10 + (4 - 2t) - (2t - 6) = 10 + 4 - 2t - 2t + 6 = -4t + 20$

Portanto, o volume é constante ($V = 8\ m^3$) no intervalo $2 < t < 3$. Como as horas são contadas a partir de 8 h, temos:
$2 + 8 < t < 3 + 8 \rightarrow 10 < t < 11$
Então, o volume permanece constante entre 10 h e 11 h.

2 (UFSC) Sejam as funções $f(x) = |x - 1|$ e $g(x) = (x^2 + 4x - 4)$.

a) Calcule as raízes de $f(g(x)) = 0$.

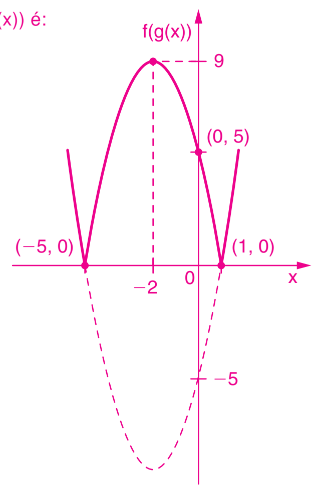
b) Esboce o gráfico de $f(g(x))$, indicando os pontos em que o gráfico intercepta o eixo cartesiano.

a) $f(g(x)) = |(x^2 + 4x - 4) - 1| = |x^2 + 4x - 5|$

$f(g(x)) = 0 \rightarrow |x^2 + 4x - 5| = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \begin{cases} x = -5 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$

Portanto, as raízes são -5 e 1.

b) O gráfico de $f(g(x))$ é:

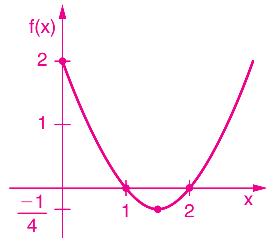


3 (FGV-SP)

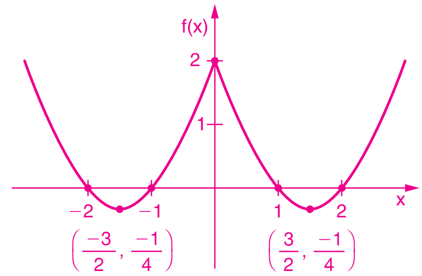
a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$.

b) Qual o domínio da função $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{2x^2 - 3x + 1}}$?

a) Com $x \geqslant 0$, temos $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Os zeros positivos de *f* são os números 1 e 2. O ponto mínimo de *f*, com $x \geqslant 0$, é dado pelo ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$.



Sendo $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$, com $x \in \mathbb{R}$, temos que $f(-x) = f(x)$. Portanto, o gráfico de *f* é uma curva simétrica em relação ao eixo das ordenadas.



b) Sendo *f* uma função real de variável real, devemos ter:

$\dfrac{x - 1}{2x^2 - 3x + 1} \geqslant 0$

Como os zeros de $2x^2 - 3x + 1$ são os números 1 e $\frac{1}{2}$, podemos escrever:

$\dfrac{x - 1}{(2x - 1)(x - 1)} \geqslant 0$

$\dfrac{1}{2x - 1} \geqslant 0$ e $x \neq 1$

$2x - 1 \geqslant 0$ e $x \neq 1$

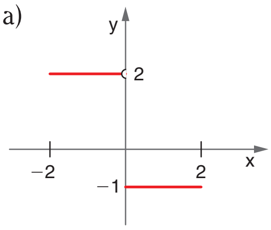
$x \geqslant \frac{1}{2}$ e $x \neq 1 \therefore \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1\right\}$

4 (Unifesp-SP) Considere a função

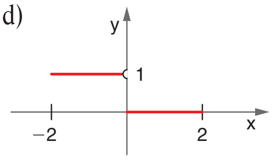
$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2, \text{ se } -2 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

A função $g(x) = |f(x)| - 1$ terá o seguinte gráfico:

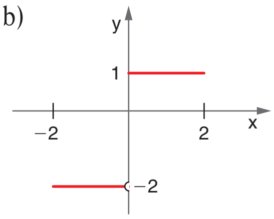
a)



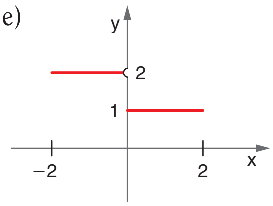
x d)



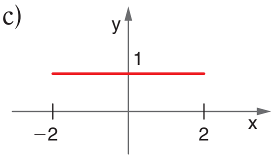
b)



e)



c)

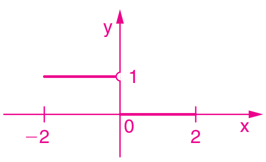


$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2, \text{ se } -2 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2, \text{ se } -2 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = |f(x)| - 1 = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1, \text{ se } -2 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

Então, o gráfico da função g(x) será:



5 (Furg-RS) O produto de todas as raízes da equação $|x^2 - 8| - 4 = 0$ é:

a) 4 b) −4 c) −8 d) −48 x e) 48

$|x^2 - 8| - 4 = 0 \rightarrow |x^2 - 8| = 4$

Daí, vem:

- $x^2 - 8 = 4$
  $x^2 = 4 + 8$
  $x^2 = 12$
  $x = \sqrt{12}$ ou $x = -\sqrt{12}$
  $x = 2\sqrt{3}$ ou $x = -2\sqrt{3}$
- $x^2 - 8 = -4$
  $x^2 = 8 - 4$
  $x^2 = 4$
  $x = 2$ ou $x = -2$

O produto das raízes é:

$2 \cdot (-2) \cdot (2\sqrt{3}) \cdot (-2\sqrt{3}) = 48$

6 (MACK-SP) Relativamente à função real definida por $f(x) = 1 - |x - 1|$, de [0, 2] em [0, 1], considere as afirmações:

I. A área da figura limitada pelo seu gráfico e o eixo das abscissas é 1.

II. Trata-se de uma função sobrejetora.

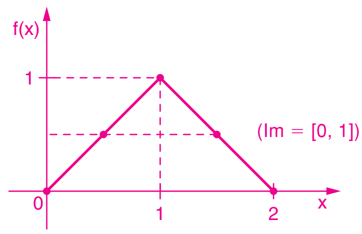
III. A soma das raízes da equação f(x) = 0,5 é 2.

Então:

a) Somente I e II são verdadeiras.
b) Somente II e III são verdadeiras.
c) Somente I e III são verdadeiras.
x d) Todas são verdadeiras.
e) Somente III é verdadeira.

x	1	
x − 1	−	+
	$\lvert x - 1\rvert = -x + 1$ $f(x) = 1 - (-x + 1)$ $f(x) = x$	$\lvert x - 1\rvert = x - 1$ $f(x) = 1 - (x - 1)$ $f(x) = -x + 2$

Façamos um esboço do gráfico de f(x), com $0 \leqslant x \leqslant 2$:



I. A área da figura limitada pelo gráfico de *f* e pelo eixo das abscissas é:
$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1$
A área da figura é 1. (verdadeira)

II. O contradomínio de *f* é [0, 1].
O conjunto imagem de *f* é [0, 1].
Logo, trata-se de uma função sobrejetora. (verdadeira)

III. Pelo gráfico, podemos concluir que:
$f(x) = 0{,}5 \Leftrightarrow x = 0{,}5$ ou $x = 1{,}5$
As raízes da equação f(x) = 0,5 são os números 0,5 e 1,5, e, portanto, a soma dessas raízes é 2. (verdadeira)

Portanto, as três afirmações são verdadeiras.

7 (UESPI) A soma dos valores reais de *x* que satisfazem a igualdade $3|x + 1| = |x - 1|$ é igual a:

x a) $-\frac{5}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) −5 d) −3 e) −2

Devemos ter:
$3(x + 1) = (x - 1)$ ou $3(x + 1) = -(x - 1)$

Daí, vem:

- $3(x + 1) = (x - 1) \rightarrow 3x + 3 = x - 1$
  $2x = -4$
  $x = -2$
- $3(x + 1) = -(x - 1) \rightarrow 3x + 3 = -x + 1$
  $4x = -2$
  $x = -\frac{1}{2}$

Portanto,

$-2 - \frac{1}{2} = \frac{-4 - 1}{2} = -\frac{5}{2}$

8 (Fuvest-SP)

a) Esboce, para x real, o gráfico da função $f(x) = |x - 2| + |2x + 1| - x - 6$. O símbolo $|a|$ indica o valor absoluto de um número real a e é definido por $|a| = a$, se $a \geqslant 0$ e $|a| = -a$, se $a < 0$.

b) Para que valores reais de x, $f(x) > 2x + 2$?

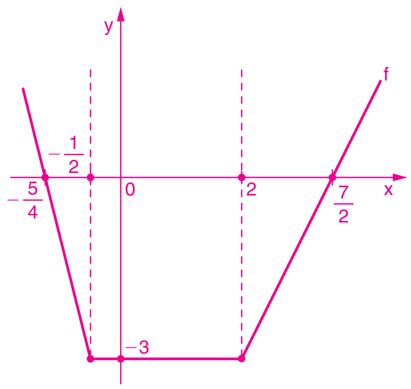
a) Seja $f(x) = |x - 2| + |2x + 1| - x - 6$

Para $x < -\frac{1}{2}$ temos: $f(x) = -x + 2 - 2x - 1 - x - 6 \rightarrow f(x) = -4x - 5$

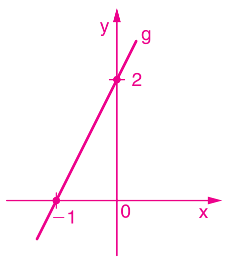
Para $-\frac{1}{2} \leqslant x < 2$ temos: $f(x) = -x + 2 + 2x + 1 - x - 6 \rightarrow f(x) = -3$

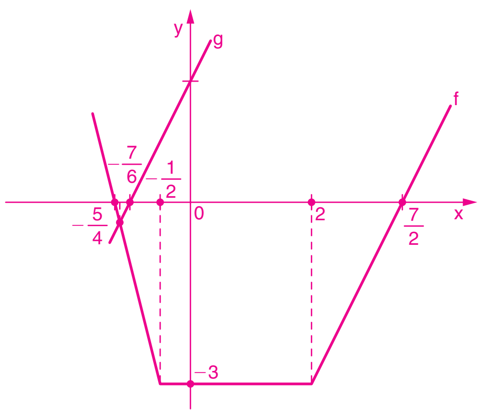
Para $x \geqslant 2$ temos: $f(x) = x - 2 + 2x + 1 - x - 6 \rightarrow f(x) = 2x - 7$

O gráfico da função f é:



b) O gráfico da função g definida por $g(x) = 2x + 2$ é:





O único ponto comum é $\left(-\frac{7}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

Portanto: $f(x) > g(x) \rightarrow x < -\frac{7}{6}$

9 (UFPI) A soma das raízes da equação $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$ é:

x a) 0 b) −2 c) −4 d) 6 e) 2

Fazendo $|x| = y$, vem:

$y^2 + 2y - 15 = 0 \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -5 \end{cases}$

Daí, vem:

$|x| = 3$ ou $|x| = -5$

$x = 3$ ou $x = -3$ $\nexists x$

A soma das raízes é:

$-3 + 3 = 0$

10 (UFAC) Qualquer solução real da inequação $|x + 1| < 3$ tem uma propriedade geométrica interessante, que é:

a) A sua distância a 1 é maior que 3.

b) A sua distância a −1 é maior que 3.

x c) A sua distância a −1 é menor que 3.

d) A sua distância a 1 é menor que 3.

e) A sua distância a 3 é menor que 1.

Devemos ter $-3 < x + 1 < 3$. Logo:

$x + 1 < 3 \rightarrow x < 2$ e $x + 1 > -3 \rightarrow x > -4$

Logo:

Qualquer solução real tem a distância a −1 menor que 3.

11 (Faap-SP) A produção diária estimada x de uma refinaria é dada por $|x - 200\,000| \leqslant 125\,000$, onde x é medida em barris de petróleo. Os níveis de produção máximo e mínimo são:

a) $175\,000 \leqslant x \leqslant 225\,000$

b) $75\,000 \leqslant x \leqslant 125\,000$

x c) $75\,000 \leqslant x \leqslant 325\,000$

d) $125\,000 \leqslant x \leqslant 200\,000$

e) $x \leqslant 125\,000$ ou $x \geqslant 200\,000$

Devemos ter:

$|x - 200\,000| \leqslant 125\,000 \rightarrow x - 200\,000 \leqslant 125\,000$ (1)

ou

$x - 200\,000 \geqslant -125\,000$ (2)

De (1), vem:

$x - 200\,000 \leqslant 125\,000 \rightarrow x \leqslant 325\,000$

De (2), vem:

$x - 200\,000 \geqslant -125\,000 \rightarrow x \geqslant 75\,000$

Portanto: $75\,000 \leqslant x \leqslant 325\,000$

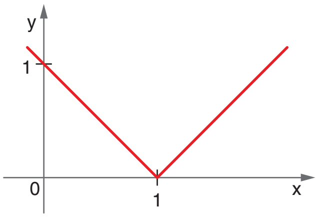
Em questões como a 12, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

12 (UFBA) Considere as funções reais *f* e *g*, tais que:

- $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, tem apenas uma raiz real, seu gráfico tem por eixo de simetria a reta $x = 1$ e passa pelo ponto $(2, 1)$.
- $g(x) = mx + n$ e $g(f(x)) = -x^2 + 2x$

Nessas condições, pode-se afirmar:

(01) O gráfico da função $h(x) = \sqrt{f(x)}$ é



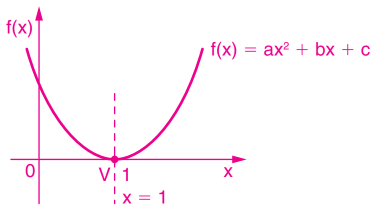
(02) $g^{-1}(x) = g(x)$

(04) A equação $f(|x|) = 0$ tem 4 raízes distintas.

(08) O conjunto solução da inequação $f(x) - |g(x)| \geqslant 0$ é $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

(16) A função $r(x) = f(g(x))$ é crescente para $x \leqslant 0$.

Do enunciado, temos:



$$\begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} \to 1 = -\dfrac{b}{2a} \to b = -2a \quad (1) \\ \Delta = 0 \to b^2 - 4ac = 0 \quad (2) \\ (2, 1) \to 4a + 2b + c = 1 \quad (3) \end{cases}$$

De (1) e (2), vem:

$(-2a)^2 - 4ac = 0 \to 4a^2 - 4ac = 0 \to 4a(a - c) = 0$

Daí, $4a = 0 \to a = 0$ (não serve)

$a - c = 0 \to a = c$ (4)

Substituindo (1) e (4) em (3), temos:

$4a + 2 \cdot (-2a) + c = 1 \to c = 1$

Logo, $a = c \to a = 1$

De $b = -2a$, temos: $b = -2 \cdot 1 \to b = -2$

Portanto, $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Sendo $g(f(x)) = -x^2 + 2x$, temos:

$g(x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 2x \to m(x^2 - 2x + 1) + n = -x^2 + 2x$

$mx^2 - 2mx + m + n = -x^2 + 2x$

Comparando os coeficientes, temos:

$$\begin{cases} m = -1 \\ m + n = 0 \to -1 + n = 0 \to n = 1 \end{cases}$$

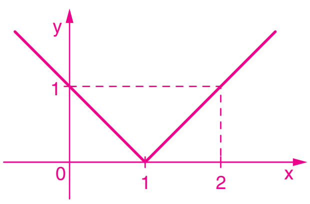
Logo, $g(x) = -x + 1$

(01) $h(x) = \sqrt{f(x)} \to h(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

$h(x) = \sqrt{(x - 1)^2}$

$h(x) = |x - 1|$

O gráfico é:



(verdadeira)

(02) $g(x) = -x + 1 \to y = -x + 1$

$x = -y + 1$

$y = -x + 1$

$g^{-1}(x) = g(x)$ (verdadeira)

(04) $f(|x|) = 0 \to |x|^2 - 2|x| + 1 = 0$

$y^2 - 2y + 1 = 0 \to y = 1$

Logo: $|x| = 1 \to x = -1$ ou $x = 1$

A equação tem duas raízes distintas. (falsa)

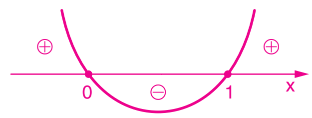
(08) $f(x) - |g(x)| \geqslant 0 \to x^2 - 2x + 1 - |-x + 1| \geqslant 0$

$|-x + 1| \leqslant x^2 - 2x + 1$

Como $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, para qualquer *x* real, temos:

$-x + 1 \leqslant x^2 - 2x + 1 \to x^2 - x \geqslant 0$

Raízes: $x^2 - x = 0 \to x(x - 1) = 0$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$



$\to x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$

$]-\infty, 0] \cup [1, \infty]$ (falsa)

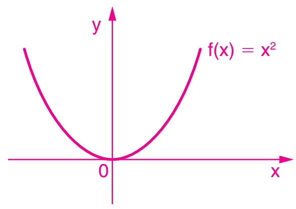
(16) $r(x) = f(g(x)) \to r(x) = f(-x + 1)$

$r(x) = (-x + 1)^2 - 2(-x + 1) + 1$

$r(x) = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 1$

$r(x) = x^2$

O gráfico é:



Essa função é crescente para $x \geqslant 0$ (falsa)

Portanto: 01 + 02 = 03

13 (Uneb-BA) O conjunto solução da inequação $|6 - 3x| < 3\,|x - 1|$ é:

a) $\varnothing$

b) $]-\infty, -1[$

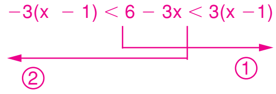
x c) $\left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$

d) $]0, +\infty[$

e) $\mathbb{R}$

Devemos ter:

$-3(x - 1) < 6 - 3x < 3(x - 1)$



De (1), vem:

$6 - 3x < 3(x - 1) \to 6 - 3x < 3x - 3$

$-6x < -9$

$x > \dfrac{9}{6}$

$x > \dfrac{3}{2}$

De (2), vem:

$6 - 3x > -3(x - 1) \to 6 - 3x > -3x + 3$

$6 > 3$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Fazendo (1) $\cap$ (2), obtemos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{3}{2}\right\}$ ou $S = \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$