6. Modèle Théorique : Calcul de la Masse d'une Planète Extrasolaire

Paramètres connus :

- Masse de l'étoile (M_E)
- Vitesse radiale de l'étoile (V_E)
- Période de l'étoile et de la planète (P)

Situation :

Soit une planète tournant autour de son étoile à l'extérieur du système solaire. Leur orbite respective est parfaitement circulaire, la période est identique et le plan des orbites est à $i = 90^o$ par rapport au plan du ciel (*voir Figure 11*).

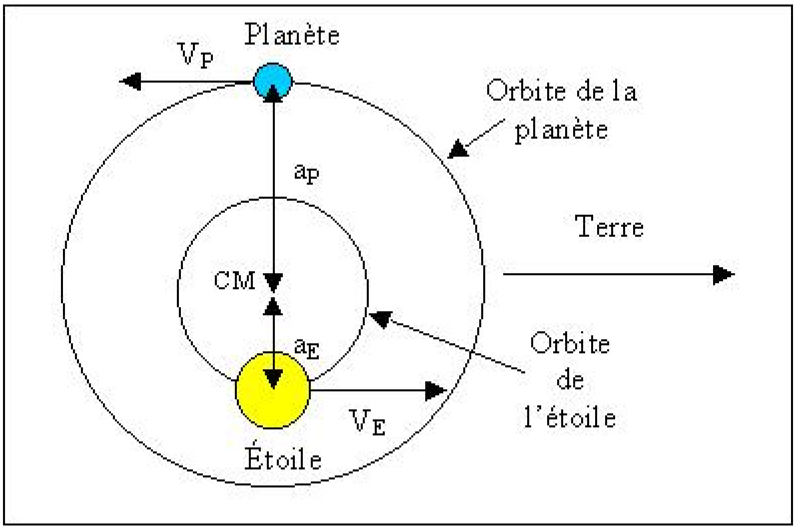

FIGURE 11
Situation étudiée par la modèle théorique

Puisque les orbites sont parfaitement circulaires, il est possible de définir les vitesses radiales des deux corps célestes par :

$$V_E = \frac{2\eth\ a_E}{P} \tag{6.1}$$

$$V_P = \frac{2\eth\ a_P}{P} \tag{6.2}$$

Où : V_E = vitesse radiale de l'étoile
a_E = demi-grand axe de l'orbite de l'étoile
P = période de l'étoile et de la planète
V_P = vitesse radiale de la planète
a_P = demi-grand axe de l'orbite de la planète

En isolant a_E et a_P dans les équations 6.1 et 6.2, nous obtenons :

$$a_E = \frac{V_E P}{2\pi} \tag{6.3}$$

$$a_P = \frac{V_P P}{2\pi} \tag{6.4}$$

Où : a_E = demi-grand axe de l'orbite de l'étoile
V_E = vitesse radiale de l'étoile
P = période de l'étoile et de la planète
a_P = demi-grand axe de l'orbite de la planète
V_P = vitesse radiale de la planète

Puisque :

$$M_E a_E = M_P a_P \tag{6.5}$$

[4]

$$\frac{M_E}{M_P} = \frac{a_P}{a_E} \tag{6.6}$$

Où : M_E = masse de l'étoile
M_P = masse de la planète
a_E = demi-grand axe de l'orbite de l'étoile
a_P = demi-grand axe de l'orbite de la planète

En remplaçant a_E et a_P par les équations 6.3 et 6.4 dans l'équation 6.6, nous obtenons :

$$\frac{M_E}{M_P} = \frac{\frac{V_P P}{2\pi}}{\frac{V_E P}{2\pi}}$$

[4] Preuve à l'Annexe I, p.57.

$$\frac{M_E}{M_P} = \frac{V_P P}{2\pi} \times \frac{2\pi}{V_E P}$$

$$\frac{M_E}{M_P} = \frac{V_P}{V_E} \tag{6.7}$$

Où : M_E = masse de l'étoile
M_P = masse de la planète
V_P = vitesse radiale de la planète
V_E = vitesse radiale de l'étoile
P = période de l'étoile et de la planète

Comme les deux objets célestes tournent sur des orbites circulaires à la même période, ils sont toujours opposés l'un à l'autre et la distance qui les sépare se définit par :

$$a = a_E + a_P \tag{6.8}$$

Où : a = somme des demi-grands axes de l'étoile et de la planète
a_E = demi-grand axe de l'orbite de l'étoile
a_P = demi-grand axe de l'orbite de la planète

En remplaçant a_E et a_P par les équations 6.3 et 6.4 dans l'équation 6.8, nous obtenons :

$$a = \frac{V_E P}{2\pi} + \frac{V_P P}{2\pi}$$

$$a = \frac{P}{2\pi}\left(V_E + V_P\right) \tag{6.9}$$

Où : a = somme des demi-grands axes de l'étoile et de la planète
V_E = vitesse radiale de l'étoile
V_P = vitesse radiale de la planète
P = période de l'étoile et de la planète

Selon la troisième loi de Kepler généralisée :

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{M_T}$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{(M_E + M_P)} \tag{6.10}$$

Où : P = période de l'étoile et de la planète
a = somme des demi-grands axes de l'étoile et de la planète
G = constante de gravitation universelle
M_T = masse totale du système
M_E = masse de l'étoile
M_P = masse de la planète

En remplaçant « a » par l'équation 6.9 dans l'équation 6.10, nous obtenons :

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G}\frac{1}{(M_E + M_P)}\left[\frac{P}{2\pi}(V_E + V_P)\right]^3$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G}\frac{1}{(M_E + M_P)}\frac{P^3}{8\pi^3}(V_E + V_P)^3$$

$$1 = \frac{P}{2\pi G}\frac{(V_E + V_P)^3}{(M_E + M_P)}$$

$$M_E + M_P = \frac{P}{2\pi G}(V_E + V_P)^3 \tag{6.11}$$

Où : P = période de l'étoile et de la planète

G = constante de gravitation universelle
M_E = masse de l'étoile
M_P = masse de la planète
V_E = vitesse radiale de l'étoile
V_P = vitesse radiale de la planète

Selon cette équation, nous avons besoin de V_E et de V_P. Hors, V_P n'est pas observable (puisque la planète elle-même n'est pas observable). Nous pouvons remplacer V_P par le ratio des masses obtenu en isolant V_P dans l'équation 6.7 (comme pour les « single-line spectroscopic binary » (CARROLL, Bradley W. et OSTLIE, Dale A., *An Introduction to Modern Astrophysics*, systèmes d'étoiles binaires à ligne spectroscopique simple [notre traduction]).

$$V_P = \frac{M_E}{M_P} V_E \tag{6.12}$$

Où : M_E = masse de l'étoile
M_P = masse de la planète
V_E = vitesse radiale de l'étoile
V_P = vitesse radiale de la planète

En remplaçant V_P par l'équation 6.12 dans l'équation 6.11, nous obtenons :

$$M_E + M_P = \frac{P}{2\pi G}\left[V_E + \left(\frac{M_E}{M_P} V_E\right)\right]^3$$

$$M_E + M_P = \frac{P}{2\pi G}\left[V_E\left(1 + \frac{M_E}{M_P}\right)\right]^3$$

$$M_E + M_P = \frac{P}{2\pi G} V_E^3 \left(1 + \frac{M_E}{M_P}\right)^3$$

$$\frac{M_E + M_P}{\left(1 + \frac{M_E}{M_P}\right)^3} = \frac{P}{2\pi G} V_E^{\,3}$$

$$\frac{M_E + M_P}{\left(\frac{M_P + M_E}{M_P}\right)^3} = \frac{P}{2\pi G} V_E^{\,3}$$

$$\frac{M_P^{\,3}\left(M_E + M_P\right)}{\left(M_P + M_E\right)^3} = \frac{P}{2\pi G} V_E^{\,3}$$

$$\frac{M_P^{\,3}}{\left(M_P + M_E\right)^2} = \frac{P}{2\pi G} V_E^{\,3} \tag{6.13}$$

Où : M_E = masse de l'étoile
M_P = masse de la planète
P = période de l'étoile et de la planète
G = constante de gravitation universelle
V_E = vitesse radiale de l'étoile

Évidemment, tous ces calculs furent exécutés à partir d'une vitesse radiale observée à des conditions idéales (à 90^o du plan du ciel, *voir Figure 12, position A*).

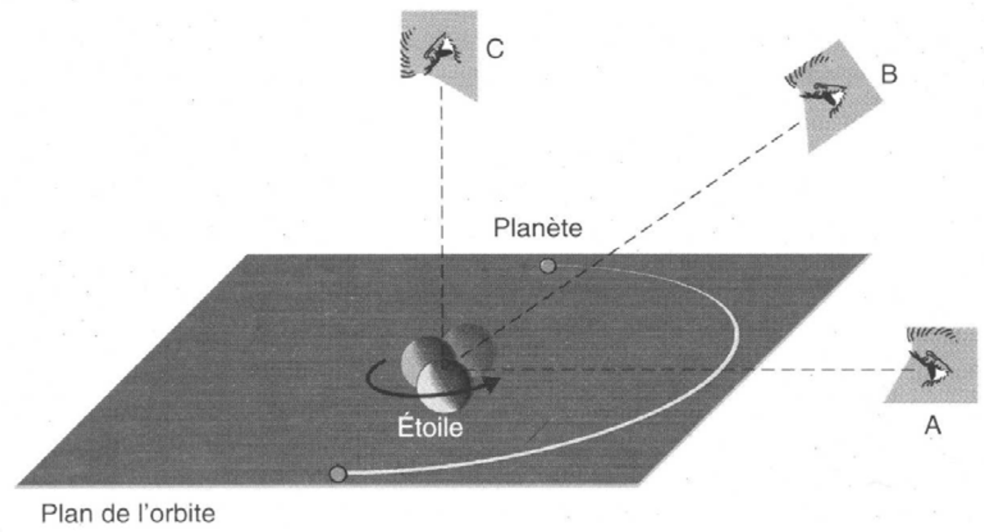

FIGURE 12
Situation réelle

Source : SÉGUIN, Marc et VILLENEUVE, Benoît (2002), *Astronomie et Astrophysique 2e édition*, Saint-Laurent (PQ), Éditions du Renouveau Pédagogiques Inc., p.563.

Seulement, cette situation est très rare. Ainsi, à partir d'une vitesse radiale observée à la position B (*voir Figure 12, position B*) et sachant l'angle d'inclinaison du plan du système observé, l'équation 6.13 pour obtenir M_P devient :

$$\frac{M_{PR}^{3}}{(M_{PR} + M_{E})^{2}} = \frac{P}{2\pi G}(V_{EO} \sin i)^{3} \tag{6.14}$$

Où : M_{PR} = masse réelle de la planète
M_E = masse de l'étoile
P = période de l'étoile et de la planète
G = constante de gravitation universelle
V_{EO} = vitesse radiale de l'étoile observée à partir de la Terre
i = angle d'inclinaison du système stellaire par rapport à la vision terrestre

Cependant, comme c'est souvent le cas, si l'angle « i » n'est pas connu :

$$\frac{M_{PC}^3}{(M_{PC}+M_E)^2} = \frac{P}{2\pi G} V_{EO}^3 \tag{6.15}$$

Où : M_{PC} = masse calculée de la planète
M_E = masse de l'étoile
P = période de l'étoile et de la planète
G = constante de gravitation universelle
V_{EO} = vitesse radiale de l'étoile observée à partir de la Terre

Et :

$$M_{PC} = M_{PR} \sin i \tag{6.16}$$

Où : M_{PC} = masse calculée de la planète
M_{PR} = masse réelle de la planète
i = angle d'inclinaison du système stellaire par rapport à la vision terrestre

Évidemment, pour trouver la masse de la planète, il faudra réussir à isoler M_P dans 6.13, M_{PR} dans 6.14 si « i » est connu et M_{PC} dans 6.15.