2. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION CUBIQUE

Face à l'équation cubique que nous avons obtenue en première partie, nous nous sommes interrogées pour savoir s'il n'était pas possible de la résoudre afin d'obtenir une expression donnant directement la masse de la planète extrasolaire avec les paramètres connus sans devoir utiliser l'aide d'un programme de calcul. C'est grâce aux équations de Cardan que nous y sommes arrivées.

Reprenons l'équation de la masse de l'exoplanète telle que trouvée plus tôt :

$$\frac{TV_E{}^3}{2\pi G} = \frac{M_P{}^3}{(M_P + M_E)^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{TV_E{}^3}{2\pi G}(M_P + M_E)^2 = M_P{}^3 \tag{2.2}$$

$$\frac{TV_E{}^3}{2\pi G}(M_P + M_E)(M_P + M_E) = M_P{}^3 \tag{2.3}$$

$$\frac{TV_E{}^3}{2\pi G}\left(M_P{}^2 + M_P M_E + M_P M_E + M_E{}^2\right) = M_P{}^3 \tag{2.4}$$

$$\frac{TV_E{}^3}{2\pi G}\left(M_P{}^2 + 2M_P M_E + M_E{}^2\right) = M_P{}^3 \tag{2.5}$$

$$\frac{TV_E{}^3}{2\pi G}M_P{}^2 + \frac{TV_E{}^3 M_E}{\pi G}M_P + \frac{TV_E{}^3 M_E{}^2}{2\pi G} = M_P{}^3 \tag{2.6}$$

En mettant 2.14 dans 2.12 :

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=0 \tag{2.15}$$

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)\left(y-\frac{a}{3}\right)\left(y-\frac{a}{3}\right)+a\left(y-\frac{a}{3}\right)\left(y-\frac{a}{3}\right)+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=0 \tag{2.16}$$

$$\left(y^2-\frac{a}{3}y-\frac{a}{3}y+\frac{a^2}{9}\right)\left(y-\frac{a}{3}\right)+a\left(y^2-\frac{a}{3}y-\frac{a}{3}y+\frac{a^2}{9}\right)+by-\frac{ab}{3}+c=0 \tag{2.17}$$

$$\left(y^2-\frac{2a}{3}y+\frac{a^2}{9}\right)\left(y-\frac{a}{3}\right)+a\left(y^2-\frac{2a}{3}y+\frac{a^2}{9}\right)+by-\frac{ab}{3}+c=0 \tag{2.18}$$

$$y^3-\frac{a}{3}y^2-\frac{2a}{3}y^2+\frac{2a^2}{9}y+\frac{a^2}{9}y-\frac{a^3}{27}+ay^2-\frac{2a^2}{3}y+\frac{a^3}{9}+by-\frac{ab}{3}+c=0 \tag{2.19}$$

$$y^3+\left(-\frac{a}{3}y^2-\frac{2a}{3}y^2+ay^2\right)+\left(\frac{2a^2}{9}y+\frac{a^2}{9}y-\frac{2a^2}{3}y+by\right)-\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{ab}{3}+c=0 \tag{2.20}$$

$$y^3+\left(-\frac{3a}{3}y^2+ay^2\right)+\left(\frac{3a^2}{9}y-\frac{2a^2}{3}y+by\right)-\frac{a^3}{27}+\frac{3a^3}{27}-\frac{9ab}{27}+c=0 \tag{2.21}$$

$$y^3+\left(-\frac{3a}{3}y^2+\frac{3a}{3}y^2\right)+\left(\frac{3a^2}{9}y-\frac{6a^2}{9}y+by\right)+\frac{2a^3}{27}-\frac{9ab}{27}+c=0 \tag{2.22}$$

$$y^3+0y^2+\left(-\frac{3a^2}{9}y+by\right)+\frac{a}{27}\left(2a^2-9b\right)+c=0 \tag{2.23}$$

$$y^3+\left(-\frac{a^2}{3}y+by\right)+\frac{a}{27}\left(2a^2-9b\right)+c=0 \tag{2.24}$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{a}{27}\left(2a^2 - 9b\right) + c = 0$$

(2.25)

Posons :

$$p = b - \frac{a^2}{3}$$

(2.26)

$$q = \frac{a}{27}\left(2a^2 - 9b\right) + c$$

(2.27)

En mettant 2.26 et 2.27 dans 2.25 :

$$y^3 + py + q = 0$$

(2.28)

Posons :

$$y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$$

(2.29)

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right)^3$$

(2.30)

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right)\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right)\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right)$$

(2.31)

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{u^2} + \sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v} + \sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v} + \sqrt[3]{v^2}\right)\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right)$$

(2.32)

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{u^2} + 2\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v} + \sqrt[3]{v^2}\right)\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right)$$

(2.33)

$$y^3 = u + \sqrt[3]{u^2}\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[3]{u^2}\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v^2} + \sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v^2} + v$$

(2.34)

$$M_P{}^3 - \frac{TV_E{}^3}{2\pi G} M_P{}^2 - \frac{TV_E{}^3 M_E}{\pi G} M_P - \frac{TV_E{}^3 M_E{}^2}{2\pi G} = 0 \tag{2.7}$$

En assimilant :

$$a = -\frac{TV_E{}^3}{2\pi G} \tag{2.8}$$

$$b = -\frac{TV_E{}^3 M_E}{\pi G} \tag{2.9}$$

$$c = -\frac{TV_E{}^3 M_E{}^2}{2\pi G} \tag{2.10}$$

$$x = M_P \tag{2.11}$$

L’équation cubique devient :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.12}$$

Posons :

$$y = x + \frac{a}{3} \tag{2.13}$$

$$x = y - \frac{a}{3} \tag{2.14}$$

$$y^3 = u + 3\sqrt[3]{u^2}\sqrt[3]{v} + 3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v^2} + v \tag{2.35}$$

$$y^3 = (u+v) + 3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right) \tag{2.36}$$

En mettant 2.29 dans 2.36 :

$$y^3 = (u+v) + \left(3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}\right)y \tag{2.37}$$

Puisque :

$$y^3 = -py - q \tag{2.38}$$

Alors :

$$q = -(u+v) \tag{2.39}$$

$$u = -v - q \tag{2.40}$$

$$p = -3\sqrt[3]{uv} \tag{2.41}$$

$$p^3 = -27uv \tag{2.42}$$

En mettant 2.40 dans 2.42 :

$$p^3 = -27v(-v - q) \tag{2.43}$$

$$p^3 = 27v^2 + 27qv \tag{2.44}$$

$$27v^2 + 27qv - p^3 = 0 \tag{2.45}$$

En résolvant cette équation quadratique, nous obtenons la valeur de u et de v.

$$v = \frac{-27q \pm \sqrt{(27q)^2 - 4(27)(-p^3)}}{2(27)} \tag{2.46}$$

$$v = \frac{-27q \pm \sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54} \tag{2.47}$$

Pour la première solution :

$$v_1 = \frac{-27q + \sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54} \tag{2.48}$$

$$v_1 = -\frac{27}{54}q + \frac{\sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54} \tag{2.49}$$

$$v_1 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{729q^2 + 108p^3}{54^2}} \tag{2.50}$$

$$v_1 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{729}{2916}q^2 + \frac{108}{2916}p^3} \tag{2.51}$$

$$v_1 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} \tag{2.52}$$

En mettant 2.52 dans 2.40 :

$$u_1 = -q - \left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} \right) \tag{2.53}$$

$$u_1 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} \tag{2.54}$$

Pour la deuxième solution :

$$v_2 = \frac{-27q - \sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54} \tag{2.55}$$

$$v_2 = -\frac{27}{54}q - \frac{\sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54} \tag{2.56}$$

$$v_2 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{729q^2 + 108p^3}{54^2}} \tag{2.57}$$

$$v_2 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{729}{2916}q^2 + \frac{108}{2916}p^3} \tag{2.58}$$

$$v_2 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} \tag{2.59}$$

En mettant 2.59 dans 2.40 :

$$u_2 = -q - \left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} \right) \tag{2.60}$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} \tag{2.61}$$

En mettant 2.52 et 2.54 ou 2.59 et 2.61 dans 2.29 :

$$y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \tag{2.62}$$

En mettant 2.62 dans 2.13 :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{a}{3} \tag{2.63}$$

En mettant 2.26 et 2.27 dans chaque partie de 2.63 :

$$\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{27}\left(2a^2 - 9b\right) + c\right) \tag{2.64}$$

$$\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{9ab}{27} + c\right) \tag{2.65}$$

$$\frac{1}{2}q = \frac{2a^3}{54} - \frac{9ab}{54} + \frac{c}{2} \tag{2.66}$$

$$\frac{1}{2}q = \frac{a^3}{27} - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2} \tag{2.67}$$

En remplaçant 2.8, 2.9 et 2.10 dans 2.27 :

$$\frac{1}{2}q = \frac{\left(\frac{-TV_E{}^3}{2\pi G}\right)^3}{27} - \frac{\left(\frac{-TV_E{}^3}{2\pi G}\right)\left(\frac{-TV_E{}^3 M_E}{\pi G}\right)}{6} + \frac{\left(\frac{-TV_E{}^3 M_E{}^2}{2\pi G}\right)}{2}$$

(2.68)

$$\frac{1}{2}q = -\frac{\frac{T^3 V_E{}^9}{8\pi^3 G^3}}{27} - \frac{\frac{T^2 V_E{}^6 M_E}{2\pi^2 G^2}}{6} - \frac{TV_E{}^3 M_E{}^2}{4\pi G}$$

(2.69)

$$\frac{1}{2}q = -\frac{T^3 V_E{}^9}{216\pi^3 G^3} - \frac{T^2 V_E{}^6 M_E}{12\pi^2 G^2} - \frac{TV_E{}^3 M_E{}^2}{4\pi G}$$

(2.70)

$$\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{27}\left(2a^2 - 9b\right) + c\right)^2$$

(2.71)

$$\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{9ab}{27} + c\right)^2$$

(2.72)

$$\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)^2$$

(2.73)

$$\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)$$

(2.74)

$$\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{4a^6}{729} - \frac{2a^4 b}{81} + \frac{2a^3 c}{27} - \frac{2a^4 b}{81} + \frac{a^2 b^2}{9} - \frac{abc}{3} + \frac{2a^3 c}{27} - \frac{abc}{3} + c^2\right)$$

(2.75)

$$\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{4a^6}{729} - \frac{4a^4 b}{81} + \frac{4a^3 c}{27} + \frac{a^2 b^2}{9} - \frac{2abc}{3} + c^2\right)$$

(2.76)

$$\frac{1}{4}q^2 = \frac{4a^6}{2916} - \frac{4a^4b}{324} + \frac{4a^3c}{108} + \frac{a^2b^2}{36} - \frac{2abc}{12} + \frac{c^2}{4} \tag{2.77}$$

$$\frac{1}{4}q^2 = \frac{a^6}{729} - \frac{a^4b}{81} + \frac{a^3c}{27} + \frac{a^2b^2}{36} - \frac{abc}{6} + \frac{c^2}{4} \tag{2.78}$$

$$\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}\left(b - \frac{a^2}{3}\right)^3 \tag{2.79}$$

$$\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}\left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(b - \frac{a^2}{3}\right) \tag{2.80}$$

$$\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}\left(b^2 - \frac{a^2b}{3} - \frac{a^2b}{3} + \frac{a^4}{9}\right)\left(b - \frac{a^2}{3}\right) \tag{2.81}$$

$$\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}\left(b^2 - \frac{2a^2b}{3} + \frac{a^4}{9}\right)\left(b - \frac{a^2}{3}\right) \tag{2.82}$$

$$\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}\left(b^3 - \frac{a^2b^2}{3} - \frac{2a^2b^2}{3} + \frac{2a^4b}{9} + \frac{a^4b}{9} - \frac{a^6}{27}\right) \tag{2.83}$$

$$\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}\left(b^3 - \frac{3a^2b^2}{3} + \frac{3a^4b}{9} - \frac{a^6}{27}\right) \tag{2.84}$$

$$\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}\left(b^3 - a^2b^2 + \frac{a^4b}{3} - \frac{a^6}{27}\right) \tag{2.85}$$

$$\frac{1}{27}p^3 = \frac{b^3}{27} - \frac{a^2b^2}{27} + \frac{a^4b}{81} - \frac{a^6}{729} \tag{2.86}$$

En combinant les termes de la racine carré (2.78 et 2.86) :

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{\frac{a^6}{729}-\frac{a^4b}{81}+\frac{a^3c}{27}+\frac{a^2b^2}{36}-\frac{abc}{6}+\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}-\frac{a^2b^2}{27}+\frac{a^4b}{81}-\frac{a^6}{729}} \tag{2.87}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{\frac{a^3c}{27}+\frac{27a^2b^2}{972}-\frac{abc}{6}+\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}-\frac{36a^2b^2}{972}} \tag{2.88}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{\frac{a^3c}{27}-\frac{9a^2b^2}{972}-\frac{abc}{6}+\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}} \tag{2.89}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{\frac{\left(\frac{-TV_E{}^3}{2\pi G}\right)^3\left(\frac{-TV_E{}^3M_E{}^2}{2\pi G}\right)}{27}-\frac{9\left(\frac{-TV_E{}^3}{2\pi G}\right)^2\left(\frac{-TV_E{}^3M_E}{\pi G}\right)^2}{972}-\frac{\left(\frac{-TV_E{}^3}{2\pi G}\right)\left(\frac{-TV_E{}^3M_E}{\pi G}\right)\left(\frac{-TV_E{}^3M_E{}^2}{2\pi G}\right)}{6}+\frac{\left(\frac{-TV_E{}^3M_E{}^2}{2\pi G}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{-TV_E{}^3M_E}{\pi G}\right)^3}{27}} \tag{2.90}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{\frac{\frac{T^4V_E{}^{12}M_E{}^2}{16\pi^4G^4}}{27}-\frac{\frac{9T^4V_E{}^{12}M_E{}^2}{4\pi^4G^4}}{972}+\frac{\frac{T^3V_E{}^9M_E{}^3}{4\pi^3G^3}}{6}+\frac{\frac{T^2V_E{}^6M_E{}^4}{4\pi^2G^2}}{4}-\frac{\frac{T^3V_E{}^9M_E{}^3}{\pi^3G^3}}{27}} \tag{2.91}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{\frac{T^4V_E{}^{12}M_E{}^2}{432\pi^4G^4}-\frac{9T^4V_E{}^{12}M_E{}^2}{3888\pi^4G^4}+\frac{T^3V_E{}^9M_E{}^3}{24\pi^3G^3}+\frac{T^2V_E{}^6M_E{}^4}{16\pi^2G^2}-\frac{T^3V_E{}^9M_E{}^3}{27\pi^3G^3}} \tag{2.92}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{\frac{T^4V_E{}^{12}M_E{}^2}{432\pi^4G^4}-\frac{T^4V_E{}^{12}M_E{}^2}{432\pi^4G^4}+\frac{27T^3V_E{}^9M_E{}^3}{648\pi^3G^3}+\frac{T^2V_E{}^6M_E{}^4}{16\pi^2G^2}-\frac{24T^3V_E{}^9M_E{}^3}{648\pi^3G^3}} \tag{2.93}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{\frac{3T^3V_E{}^9M_E{}^3}{648\pi^3G^3}+\frac{T^2V_E{}^6M_E{}^4}{16\pi^2G^2}} \tag{2.94}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{\frac{T^3V_E{}^9M_E{}^3}{216\pi^3G^3}+\frac{T^2V_E{}^6M_E{}^4}{16\pi^2G^2}} \tag{2.95}$$

En mettant 2.70, 2.92 et en calculant a/3 dans 2.63 :

$$M_P = \sqrt[3]{-\left(-\frac{T^3 V_E{}^9}{216\pi^3 G^3} - \frac{T^2 V_E{}^6 M_E}{12\pi^2 G^2} - \frac{T V_E{}^3 M_E{}^2}{4\pi G}\right) + \sqrt{\frac{T^3 V_E{}^9 M_E{}^3}{216\pi^3 G^3} + \frac{T^2 V_E{}^6 M_E{}^4}{16\pi^2 G^2}}} + \sqrt[3]{-\left(-\frac{T^3 V_E{}^9}{216\pi^3 G^3} - \frac{P^2 V_E{}^6 M_E}{12\pi^2 G^2} - \frac{T V_E{}^3 M_E{}^2}{4\pi G}\right) - \sqrt{\frac{T^3 V_E{}^9 M_E{}^3}{216\pi^3 G^3} + \frac{T^2 V_E{}^6 M_E{}^4}{16\pi^2 G^2}}} + \frac{T V_E{}^3}{6\pi G} \tag{2.96}$$

$$M_P = \sqrt[3]{\frac{T^3 V_E{}^9}{216\pi^3 G^3} + \frac{T^2 V_E{}^6 M_E}{12\pi^2 G^2} + \frac{T V_E{}^3 M_E{}^2}{4\pi G} + \sqrt{\frac{T^3 V_E{}^9 M_E{}^3}{216\pi^3 G^3} + \frac{T^2 V_E{}^6 M_E{}^4}{16\pi^2 G^2}}} + \sqrt[3]{\frac{T^3 V_E{}^9}{216\pi^3 G^3} + \frac{T^2 V_E{}^6 M_E}{12\pi^2 G^2} + \frac{T V_E{}^3 M_E{}^2}{4\pi G} - \sqrt{\frac{T^3 V_E{}^9 M_E{}^3}{216\pi^3 G^3} + \frac{T^2 V_E{}^6 M_E{}^4}{16\pi^2 G^2}}} + \frac{T V_E{}^3}{6\pi G} \tag{2.97}$$