

MATHEMATICS AND YOUTH MAGAZINE

A PROBLEM-SOLVING JOURNAL AT SECONDARY LEVEL

Note. This is not official published production and we only post in here new problems and some solutions to old problems. We hope this can help the Journal be more popular. Beside it, this may helps someone who are interested in solving Mathematics problems at the secondary level. This is also a good source for teachers in preparing problems for some purposes and students in improving their skills in solving problems.

In each paper we will post all new problems and **all in English**, solutions to some previous problems and **all posted solutions are in Vietnamese**. **This can not reproduce, copy or in any form and by any mean without the permissions of the official publisher!** Any futher informations about these works you can contact me by email at the address **pluricomplex_amath@yahoo.com** or the airmail address at: **Hà Duy Hung, Department specialized in Mathematics and Informatics School, Hanoi University of Education, Hanoi, Vietnam**. That's all we want to talk!

NEW PROBLEMS IN THIS ISSUE

Volume 41 Number 328 December 2004

PROBLEMS FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

Problem 1 (T1/328 for 6th Grade) *Compare the numbers*

$$2^{3^{2^3}} \text{ and } 3^{2^{3^2}}$$

Proposed by Nguyễn Thị Nga

Problem 2 (T2/328 for 7th Grade) *Calculate the following sum of 2004 numbers*

$$f\left(\frac{1}{2005}\right) + f\left(\frac{2}{2005}\right) + \cdots + f\left(\frac{2004}{2005}\right)$$

where

$$f(x) = \frac{100^x}{100^x + 10}$$

Proposed by Phạm Xuân Trinh

Problem 3 (T3/328) Find all positive integer solutions of the equation $(n + 1)(2n + 1) = 10m^2$.

Proposed by Bùi Văn Chi

Problem 4 (T4/328) Find all positive integers n such that the polynomial with $n + 1$ terms

$$P(x) = x^{4n} + x^{4(n-1)} + \dots + x^8 + x^4 + 1$$

is divisible by the polynomial with $n + 1$ terms

$$Q(x) = x^{2n} + x^{2(n-1)} + \dots + x^4 + x^2 + 1$$

Proposed by Nguyễn Thị Minh

Problem 5 (T5/328) Find the greatest value of the expression

$$T = \frac{a^2 + 1}{b^2 + 1} + \frac{b^2 + 1}{c^2 + 1} + \frac{c^2 + 1}{a^2 + 1}$$

where a, b, c are non-negative real numbers satisfying $a + b + c = 1$.

Proposed by Trương Hoàng Hiếu

Problem 6 (T6/328) Let $\triangle ABC$ be a triangle with acute angle A and $AC = 2AB$. The angle bisector AD cuts the altitude BH at K (D lies on BC , H on AC). The line CK cuts AB at E . Prove that $\triangle ABC$ is right at B when and only when the areas of the triangles $\triangle BDE$ and $\triangle HDE$ are equal.

Proposed by Trần Văn Thính

Problem 7 (T7/328) On the side AB of an equilateral triangle $\triangle ABC$ take a point N , on the side AC take a point M so that $AN > NB$ and $AM > MC$. The line BM cuts CN at H . Let P, Q be respectively the orthocenters of $\triangle ABM$ and $\triangle ACN$. Prove that $BN = CM$ when and only when $HP = HQ$.

Proposed by Trịnh Bằng Giang

PROBLEMS FOR UPPER SECONDARY SCHOOL

Problem 8 (T8/328) Find the least prime number p such that $[(3 + \sqrt{p})^{2n}] + 1$ is divisible by 2^{n+1} for every natural number n , where $[x]$ denotes the greatest integer not exceeding x .

Proposed by Bùi Thế Hùng

Problem 9 (T9/328) *Prove that*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}$$

where a, b, c are positive real numbers and $k \geq \frac{2}{3}$.

Proposed by Trần Tuấn Anh

Problem 10 (T10/328) *Find all positive real numbers a such that there exist a positive real number k and a function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the condition*

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + k|x-y|^a$$

for all real numbers x, y .

Proposed by Hàn Ngọc Đức

Problem 11 (T11/328) *The altitudes AD, BE, CF of an acute triangle ABC intersect at H so that $AH > HD, BH > HE, CH > HF$. Prove that*

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C > 6$$

Proposed by Phạm Đức Quang

Problem 12 (T12/328) *Let be given n distinct points A_1, A_2, \dots, A_n . Prove that*

$$(i) \sum_{i=1}^n \widehat{A_i A_{i+1} A_{i+2}} \geq \pi$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n \widehat{A_i Q A_{i+1}} \leq (n-1)\pi$$

where A_{n+1} is considered as A_1 , A_{n+2} is considered as A_2 and Q is an arbitrary point distinct from A_1, A_2, \dots, A_n .

Proposed by Vũ Hoàng Hiệp

SOLUTIONS TO PREVIOUS PROBLEMS

Volume 41 Number 324 June 2004

Problem 1 (T1/324) Số 2^{200} có bao nhiêu chữ số? Hãy xác định chữ số đầu tiên bên trái số đó.

Bài giải. Đáp số là có 31 chữ số và chữ số đầu tiên bên trái bằng 1.
Hãy chú ý rằng $1025 > 2^{10} = 1024 > 10^3$ từ đó mà

$$\frac{2^{100}}{10^{30}} < \left(\frac{41}{40}\right)^{10} < \frac{40}{39} \cdot \frac{39}{38} \cdots \frac{31}{30} = \frac{4}{3} < 2$$

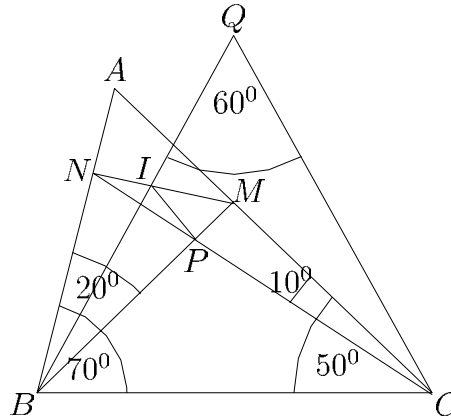
hay ta nhận được $2^{100} < 2 \cdot 10^{30}$. Từ các bất đẳng thức nói trên ta nhận được bất đẳng thức

$$10^{30} < 2^{100} < 2 \cdot 10^{30}$$

Bất đẳng thức cuối cùng cho ta thấy rằng số 2^{100} có 31 chữ số và chữ số đầu tiên bên trái bằng 1.

Problem 2 (T2/324) Cho tam giác $\triangle ABC$ có $\widehat{ABC} = 70^\circ$, $\widehat{ACB} = 50^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $\widehat{ABM} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm N sao cho $\widehat{ACN} = 10^\circ$. Gọi P là giao điểm của BM và CN . Hãy chứng minh rằng $MN = 2MP$.

Bài giải. Dựng tam giác đều $\triangle BCQ$ với điểm Q nằm ở về cùng một phía bờ là đường thẳng BC đối với điểm A .



Từ cách dựng ta nhận thấy rằng $\triangle QMB = \triangle QMC$ (theo trường hợp c.g.c) do đó mà $\widehat{BQM} = \widehat{CQM} = \frac{\widehat{BQC}}{2} = 30^\circ$. Vì tam giác $\triangle BCN$ cân tại N nên ta suy ra $NC = BN = QC$. Mặt khác ta lại có $\widehat{NCM} = \widehat{QCM} = 10^\circ$ nên ta lại nhận được $\triangle QCM = \triangle NCM$ do đó mà $\widehat{MNC} = \widehat{MQC} = 30^\circ$. Cuối cùng để ý rằng $\widehat{MPN} = 90^\circ$ ta nhận được $MN = 2MP$.

Problem 3 (T3/324) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y = 2 \\ y^3 + x = 2 \end{cases}$$

Bài giải. Bằng cách trừ hai phương trình cho nhau ta nhận được $(x, y) = (1, 1)$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Problem 4 (T4/324) Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a^4 + b^4 + c^4} + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq \sqrt{a^3b + b^3c + c^3a} + \sqrt{ab^3 + bc^3 + ca^3}$$

với mọi a, b, c dương.

Bài giải. Theo bất đẳng thức Bounyakovsky ta có

$$(a^4 + b^4 + c^4)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (a^3b + b^3c + c^3a)^2$$

$$(a^4 + b^4 + c^4)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (ab^3 + bc^3 + ca^3)^2$$

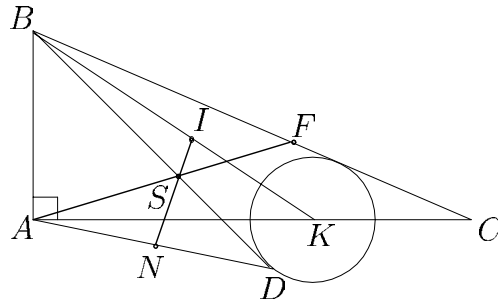
cộng hai bất đẳng thức đó ta thu được kết quả là

$$2\sqrt{(a^4 + b^4 + c^4)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \geq \sqrt{a^3b + b^3c + c^3a} + \sqrt{ab^3 + bc^3 + ca^3}$$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số ở trong căn của biểu thức vế trái ta nhận được kết quả.

Problem 5 (T5/324) Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A . Với mỗi điểm K nằm trên cạnh AC dựng đường tròn tâm K tiếp xúc với BC ở điểm E . Dựng BD tiếp xúc với đường tròn tâm K tại điểm D khác E . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AK, AD, BD, MP . Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng QN và BD . Hỏi rằng điểm S sẽ chạy trên đường thẳng nào khi mà K di động trên cạnh AC ?

Bài giải. Các trường hợp đặc biệt khi mà K trùng với C hoặc A hoặc giao điểm của AC với phân giác góc B được kiểm tra không mấy khó khăn.



Ta hãy xét khả năng ở đó K nằm giữa giao điểm nói trên với điểm C hay tương ứng là giao điểm S nằm ở trong đoạn AF . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BK khi đó dễ thấy rằng bốn điểm N, Q, S, I thẳng hàng. Gọi F là giao điểm

của AS với đường thẳng BC . Ta sẽ chứng minh rằng điểm F chính là trung điểm của đoạn thẳng BC . Thực vậy để ý rằng $IA = IK = ID$ nên tam giác $\triangle IAD$ cân ở điểm I . Điều đó suy ra rằng điểm S nằm trên trung trực của đoạn thẳng AD hay tam giác $\triangle SAD$ cân tại S . Ta có

$$\widehat{SAD} = \widehat{SDA} = \widehat{BKA} = \widehat{BCA} + \widehat{KBC} = \widehat{BCA} + \widehat{KBD} = \widehat{BCA} + \widehat{DAK}$$

vậy ta có $\widehat{SAC} = \widehat{BCA}$ hay tam giác FAC cân tại F . Từ đó và từ giả thiết về điểm K ta suy ra rằng điểm F là trung điểm của đoạn thẳng BC . Tức điểm F thuộc vào đường thẳng cố định AF là trung tuyến của tam giác $\triangle ABC$.

Problem 6 (T6/324) Cho đa thức $f(x)$ có bậc 2003 thỏa mãn $f(k) = \frac{k^2}{k+1}$ với mọi $k = 1, 2, \dots, 2004$. Hãy xác định giá trị của $f(2004)$.

Bài giải. Xét đa thức $g(x) = (x+1)f(x) - x^2$ khi đó đa thức $g(x)$ có bậc 2004 nhận các giá trị $1, 2, \dots, 2004$ làm không điểm nên ta có thể viết nó dưới dạng $g(x) = a(x-1)(x-2)\cdots(x-2004)$. Từ điều kiện $g(-1) = -1$ ta nhận được rằng $a = -\frac{1}{2005!}$. Thế công thức này vào ta nhận được công thức tính đa thức $f(x)$ và từ đó không khó khăn để nhận được rằng

$$f(2005) = \frac{2005^3 - 1}{2005 \cdot 2006} = \frac{8060150124}{4022030}$$

Problem 7 (T7/324) Chứng minh rằng $4x^2 + 4y^2 \leq xy + yz + zx + 5z^2$ trong đó x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \leq y \leq z$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài giải. Từ giả thiết ta nhận được đánh giá $x^2 \leq xy \leq xz \leq yz \leq z^2$, do đó mà $4x^2 + 4y^2 \leq xy + zx + z^2 + 4z^2 = xy + yz + zx + 5z^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Problem 8 (T8/324) Gọi r_a, r_b, r_c là bán kính của các đường tròn bàng tiếp các góc tương ứng là A, B, C của tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức sau đây

$$r_a \sin \frac{A}{2} + r_b \sin \frac{B}{2} + r_c \sin \frac{C}{2} \leq \frac{r_a^3 + r_b^3 + r_c^3}{6} \cdot \left(\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} \right)$$

Bài giải. Bài toán này có thể chỉ cần chứng minh mà không sử dụng mấy tính chất hình học, muốn vậy hãy chú ý đến bất đẳng thức dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy \cos A + 2yz \cos B + 2zx \cos C$$

với mọi số thực x, y, z và mọi A, B, C là ba góc của tam giác $\triangle ABC$ với

$$x = \frac{\sqrt{r_a r_b r_c}}{r_a}, y = \frac{\sqrt{r_a r_b r_c}}{r_b}, z = \frac{\sqrt{r_a r_b r_c}}{r_c}$$

sau đó vận dụng bất đẳng thức Cauchy để nhận được kết quả.

Ngoài cách giải nói trên các bạn cũng có thể sử dụng phương pháp vector để chứng minh bài toán này. Muốn vậy hãy gọi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là các vector đơn vị cùng hướng với các vector $\vec{BC}, \vec{CA}, \vec{AB}$ và sau đó xét tổng

$$\left(\sum_{cyclic} \frac{e_1}{r_a} \right)^2 \geq 0$$

ta sẽ nhận được một bất đẳng thức mạnh hơn

$$\sum_{cyclic} r_a \sin \frac{A}{2} \leq \frac{1}{2} r_a r_b r_c \cdot \left(\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} \right)$$

tiếp đó dùng bất đẳng thức Cauchy để thu được kết quả.

Collected from Vietnam of Mathematics and Youth Journal,

© Hà Duy Hưng, Vietnam

Email: pluricomplex_amath@yahoo.com

November, 2004.