Pavages du plan

LES PAVAGES

Ci après, on essaiera de définir précisément ce qu’est un pavage et plus particulièrement un pavage régulier et de dévoiler les diverses applications de techniques purement mathématiques dans le domaine artistique. De beaux spécimens conçus par des créateurs issus des horizons les plus divers vous seront donc présentés en guise de conclusion.

1 Qu’est-ce qu’un pavage ?

Paver est l’opération qui consiste à **recouvrir une surface plane ou un espace en juxtaposant, sans vide et sans empiétement, des figures ou des objets offrant une certaine régularité**, selon une règle de formation imposée.

Un pavage c’est le remplissage d’un plan avec un motif que l’on répète plusieurs fois sans changer les mesures de ce motif.
Dans ce pavage, les modèles doivent combler tout l’espace de ce plan sans qu’il y est le moindre espace libre entre les différents dessins.
Il existe plusieurs formes de pavages.
Il y a les pavages réguliers et les pavages semi-réguliers.

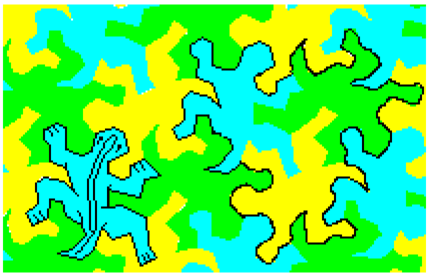
1.1 Exemples de pavages expliqués

Nous allons ici tenter de vous expliquer de quelle façon a été réalisé quelques pavages.

1.1.1 Poissons

Nous pouvons voir que dans ce pavage le motif de base contient deux images. Ces motifs de base sont répétés indéfiniment. On peut voir un poisson avalant un bateau. Ce motif est répété par translation. Les motifs sont juxtaposés, on peut voir que la queue du poisson est collée a l’avant du bateau. Pour ce qui est des motifs qui se superpose on peut constater que le bateau est situé au dessus des poissons. Ce pavage a été réalisé par Escher.

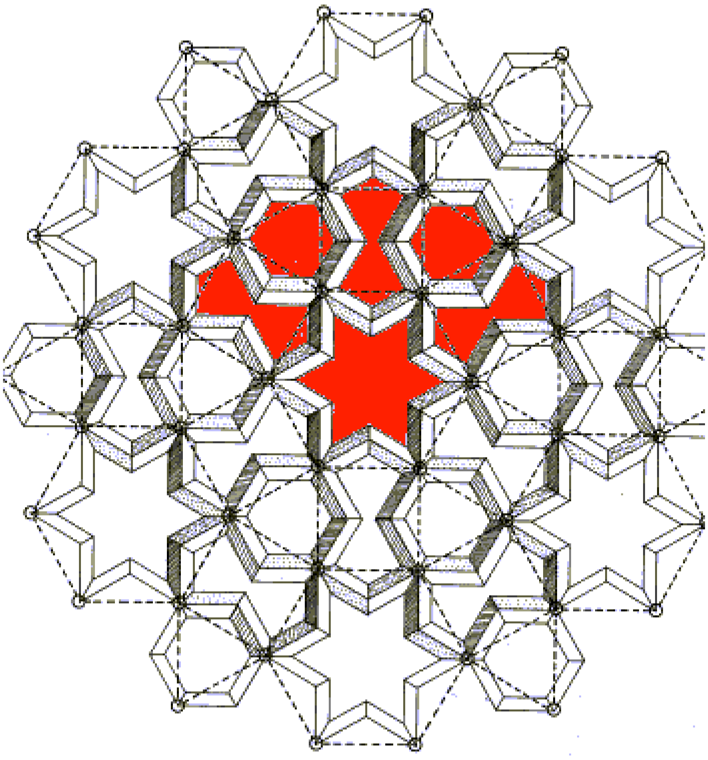
1.1.2 Lézards



Ce pavage représente des lézards de différentes couleurs (bleu, vert et jaune).Tout cela est un assemblage de différents lézards (ils sont différents simplement par leurs positions et par leurs couleurs) qui forment le pavage définitif. Si on fait un plan détaillé de ce pavage on remarque que ce pavage est une multiplication et une symétrie ou une rotation des différents lézards qui donne le pavage complet.

1.1.3 Pavage semi-régulier

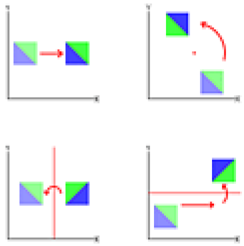
Celui que nous avons choisi d'étudier est un pavage semi-régulier. Ses motifs complexes peuvent être remplacés par der polygones régulier.



Dans notre travail il nous était demandé de trouver le motif ou les motifs répétés dans ce pavage, il est donc mis en couleur sur le document. Afin de trouver le motif répété, nous avons d'abord décidé de simplifier les motifs de base, en faisant des polygones qui sont en pointillés sur le schéma. C'est en simplifiant que nous avons trouvé le motif de base, se répétant de façon oblique, dans les deux sens, vers la gauche et vers la droite.

2 Qu’est-ce qu’un motif de Base ?

C’est la plus petite portion de la maille nécessaire pour la construction du pavage à l’aide de certaines isométries et translations parmi toutes celles laissant le pavage invariant :



Le Motif de Base matérialise les Générateurs du Groupe des Isométries du Plan laissant ce pavage globalement invariant. Critchlow (1976) classe les pavages construits avec des polygones réguliers en trois familles, les réguliers, les semi-réguliers et les demi-réguliers.

Chaque pavage est caractérisé par ses sommets qui déterminent sa nature. On en distingue 17 types qui correspondent à un type d’élaboration précis : p2 ; p3 ; p4 ; p6 ; pg ou pg2 ; pgg ; pm ; cm ; pmg ; pmm ; cmm ; p4g ; p3m1 ; p31m ; p4m et p6m :

- Le groupe p1 contenant uniquement des translations ;

- Le groupe p2 contenant des rotations d’ordre 2 dont les centres sont aux sommets d’un réseau de parallélogrammes ;

- Le groupe p3 contenant des rotations d’ordre 3 dont les centres sont aux sommets d’un réseau de triangles équilatéraux ;

- le groupe p4 contenant des rotations d’ordre 4 dont les centres sont aux sommets d’un réseau de carrés et des rotations d’ordre 2 dont le centres sont situés aux centres de ces carrés ;

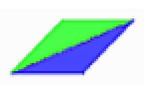
- le groupe p6 contenant des rotations d’ordre 6 dont les centres sont aux sommets d’un réseau de triangles équilatéraux, des rotations d’ordre 3 dont les centres sont au centre de ces triangles et des rotations d’ordre 2 dont les centres sont au milieu des côtés des triangles.

- Le groupe pg contenant des symétries glissées d’axes parallèles ;

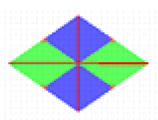
- Le groupe pgg contenant deux familles de symétries glissées d’axes de direction perpendiculaires et des centres de symétrie situés aux centres des rectangles des axes de symétrie glissée...

Les 17 types de pavage...

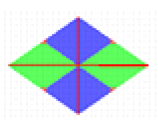
1



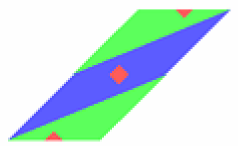
2



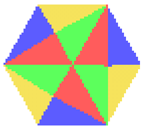
3



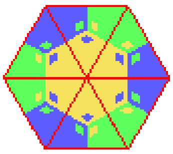
4



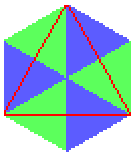
5



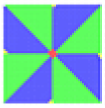
6



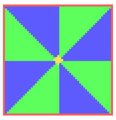
7



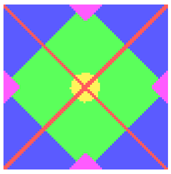
8



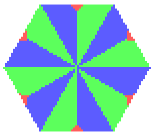
9



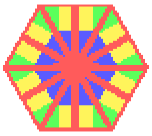
10



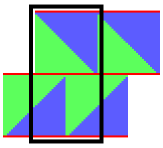
11



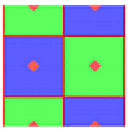
12



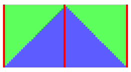
13



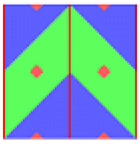
14



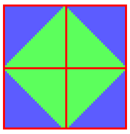
15



16



17

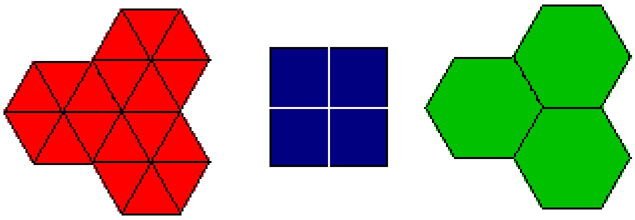


Motifs minimums translatables des 17 types de pavages

Le cristallographe et mathématicien russe Fedorov a montré en 1891 (Université de Saint-Pétersbourg), qu'il n'existe que 17 types de pavage du plan. Ces types sont classés suivant l'agencement des rotations et des symétries qu'on peut y trouver. **Ils constituent ce que l'on appelle les groupes cristallographiques par analogie avec les groupes conservant les cristaux dans l'espace euclidien à 3 dimensions.** Les noms proposés ici correspondent au nom utilisé en cristallographie. Il existe toujours une isométrie qui amène un pavé sur un autre pavé quelconque, mais qui de plus conserve l'ensemble du pavage. Ce pavage s'étend à l'infini ; il existe des translations dans des directions différentes. On peut caractériser, en partie, le pavage en décrivant son groupe. Ce groupe contiendra toujours des translations dans plusieurs directions, mais aussi des rotations, des symétries axiales, des symétries glissées.

3 Qu'est-ce qu'un pavage régulier ?

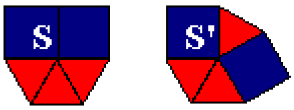
Ce sont ceux où un seul polygone est utilisé. Tous les sommets devant être du même type. Ces pavages, ainsi que les sommets, seront respectivement désignés par les types (1), (2) et (3). Il y a trois pavages réguliers. Ils sont représentés dans la figure ci -dessous :



Les trois pavages réguliers. Leur type est désigné par (1), (2), (3). Avec la notation (symbole) de Schläfli (1814-1895), ces pavages sont *3,6*, *4,4* et *6,3*

On remarquera le choix judicieux, pour ce travail de la découpe du tour complet en 360 parties !

Pour la suite, il est utile d'introduire la notion de "type" d'un sommet du pavage. Un sommet entouré de 3 polygones (d'ordre 3) ayant respectivement n1, n2 et n3 côtés sera de type (n1 , n2 , n3) (noté dans le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre). Cette définition est prolongée aux sommets d'ordre quelconque dont deux exemples sont donnés dans la figure 6.



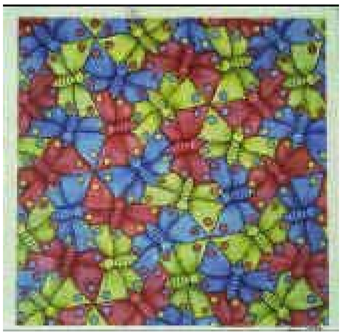
Le sommet S est d'ordre 5 et de type (4, 4, 3, 3, 3) et le sommet S' est de type (4, 3, 3, 4, 3) Les sommets des pavages réguliers de type (1), (2) et (3) sont respectivement de type (3, 3, 3, 3, 3, 3) ; (4, 4, 4, 4) et (6, 6, 6). Lorsqu'un pavage possède un sommet d'un seul type, il reçoit le type de ce sommet.

4 Qu'est-ce qu'un pavage semi-régulier ?

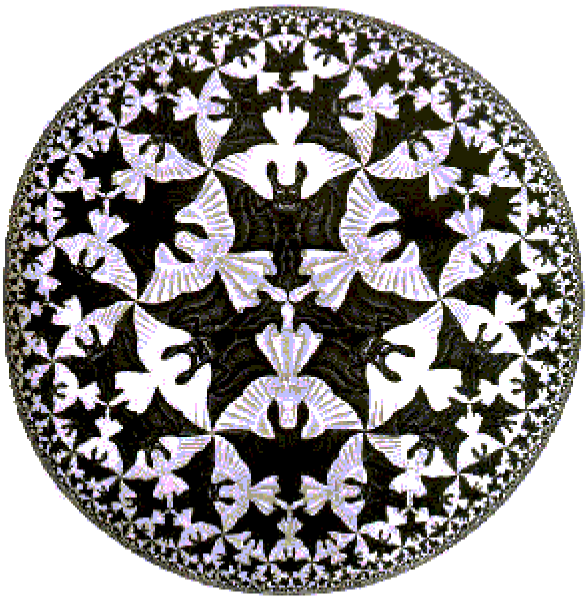
Un pavage est semi-régulier si tous les sommets sont superposables par une isométrie, c'est-à-dire sont soit tous du même type, soit du même type à une symétrie près ; par exemple : (4, 12, 6) et (4, 6, 12).

5 Pavages et art

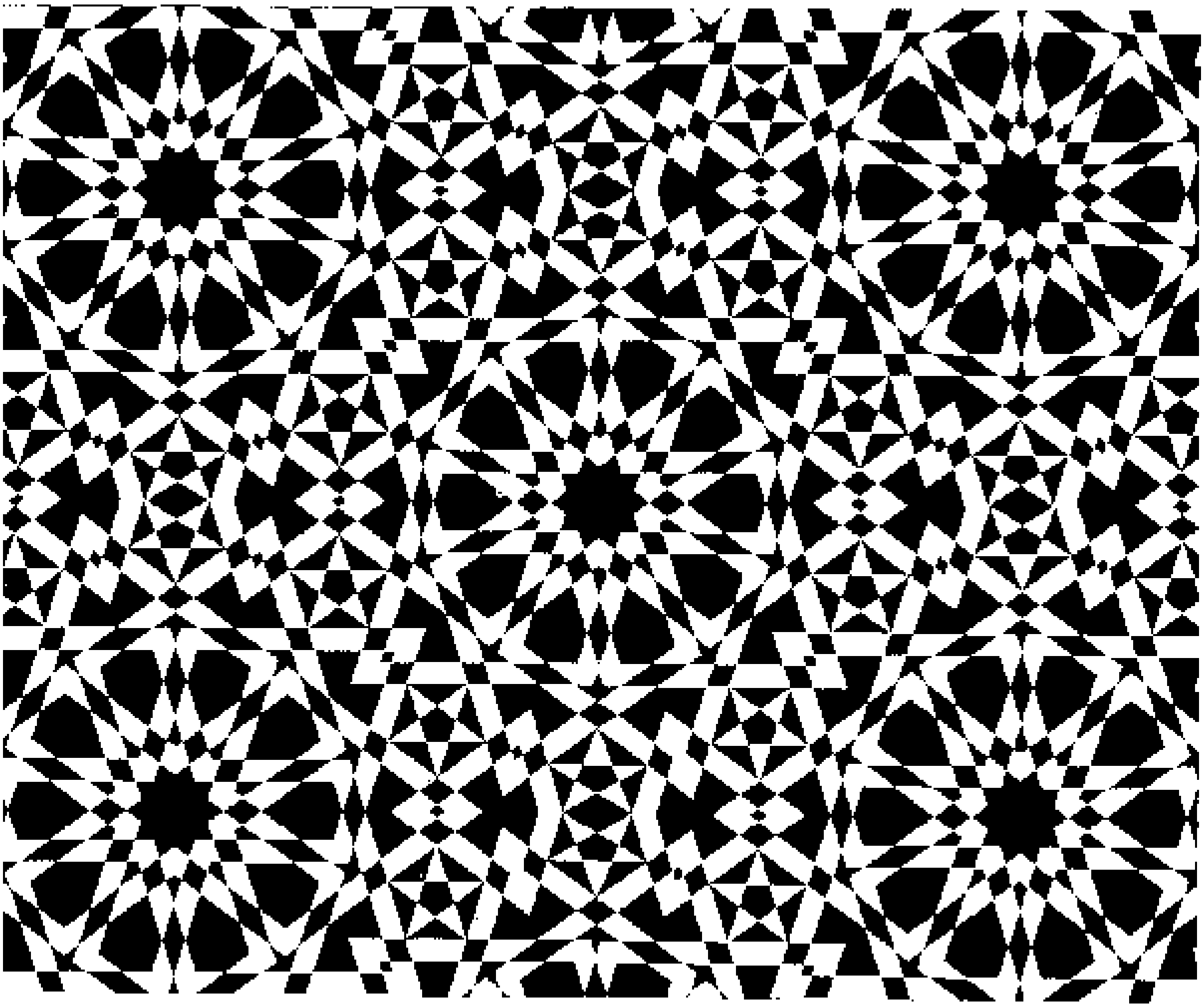
5.1 **M. C. Escher : "les papillons" :**



5.2 Un pavage conçu pour orner les murs de l'Alhambra :

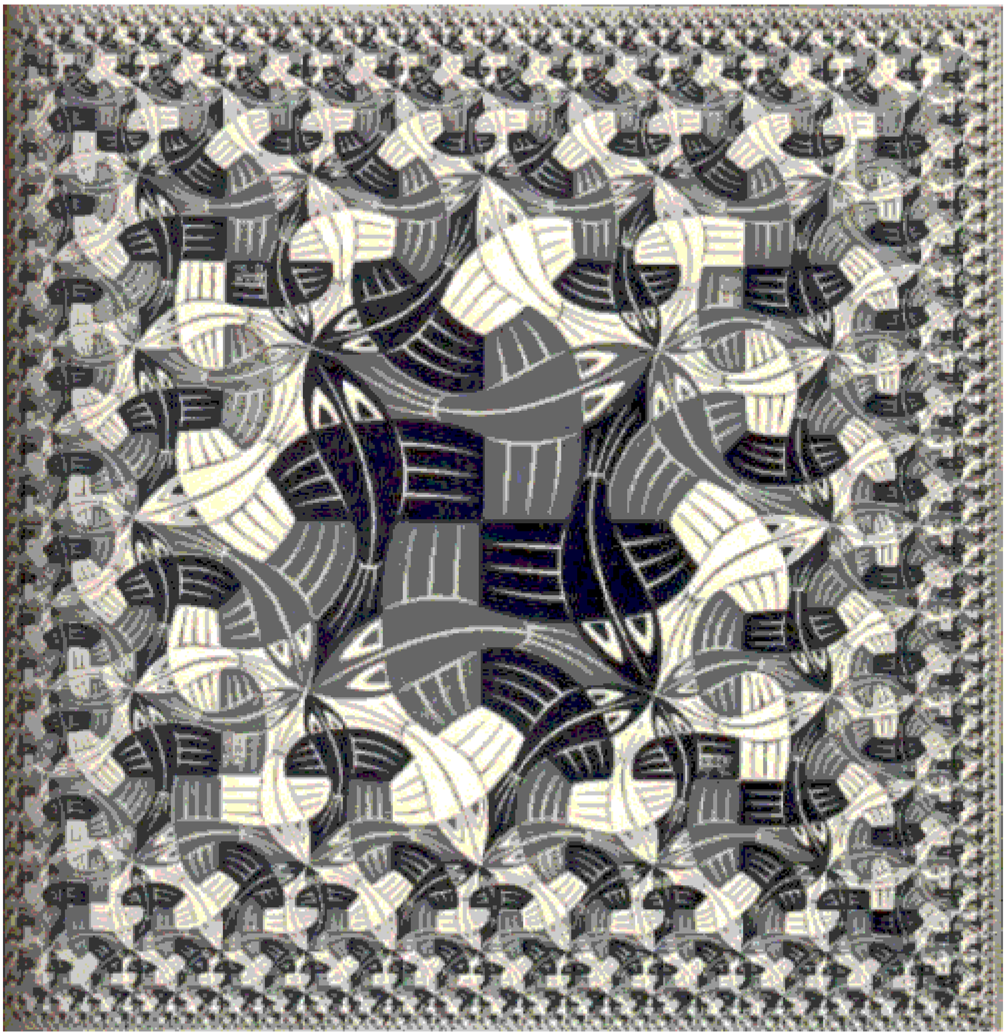


5.3 Un pavage mauresque :



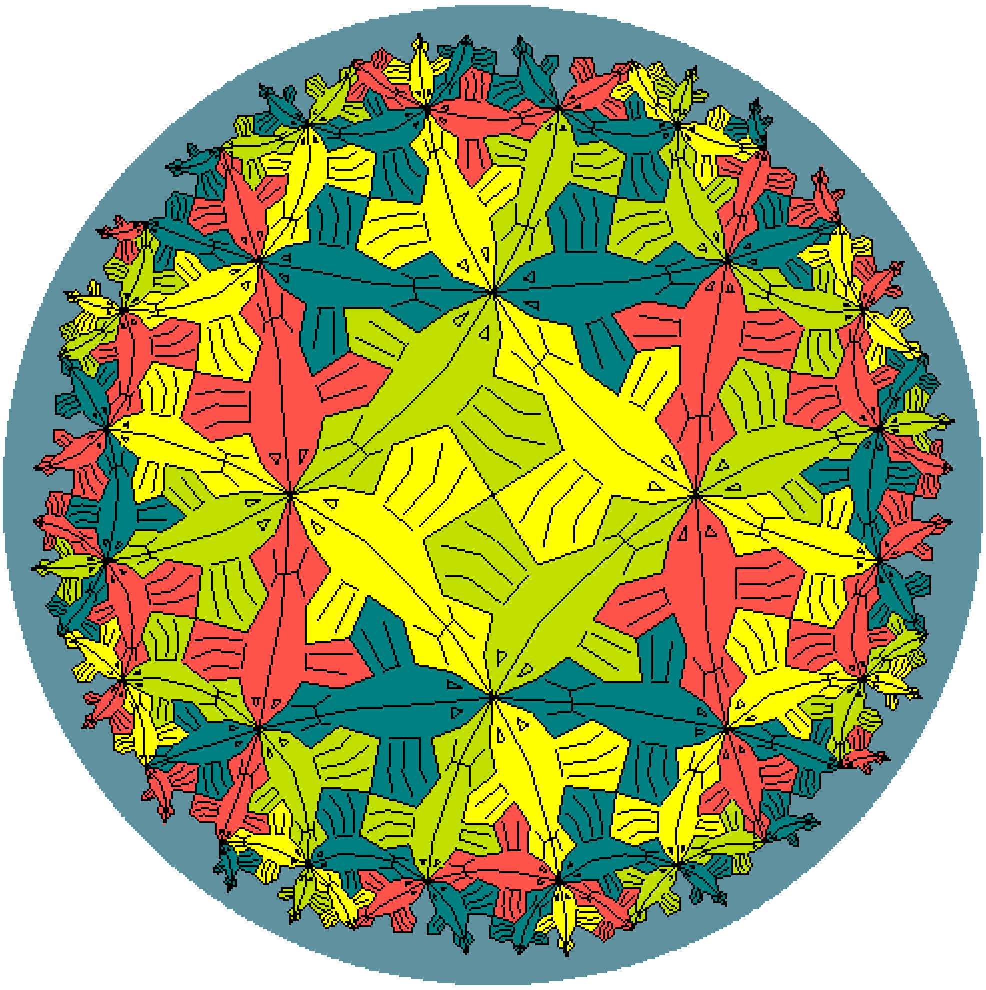
5.4 Un accessoire d'architecture exposé au musée du Louvre

5.5 M. C. Escher : "les poissons" :

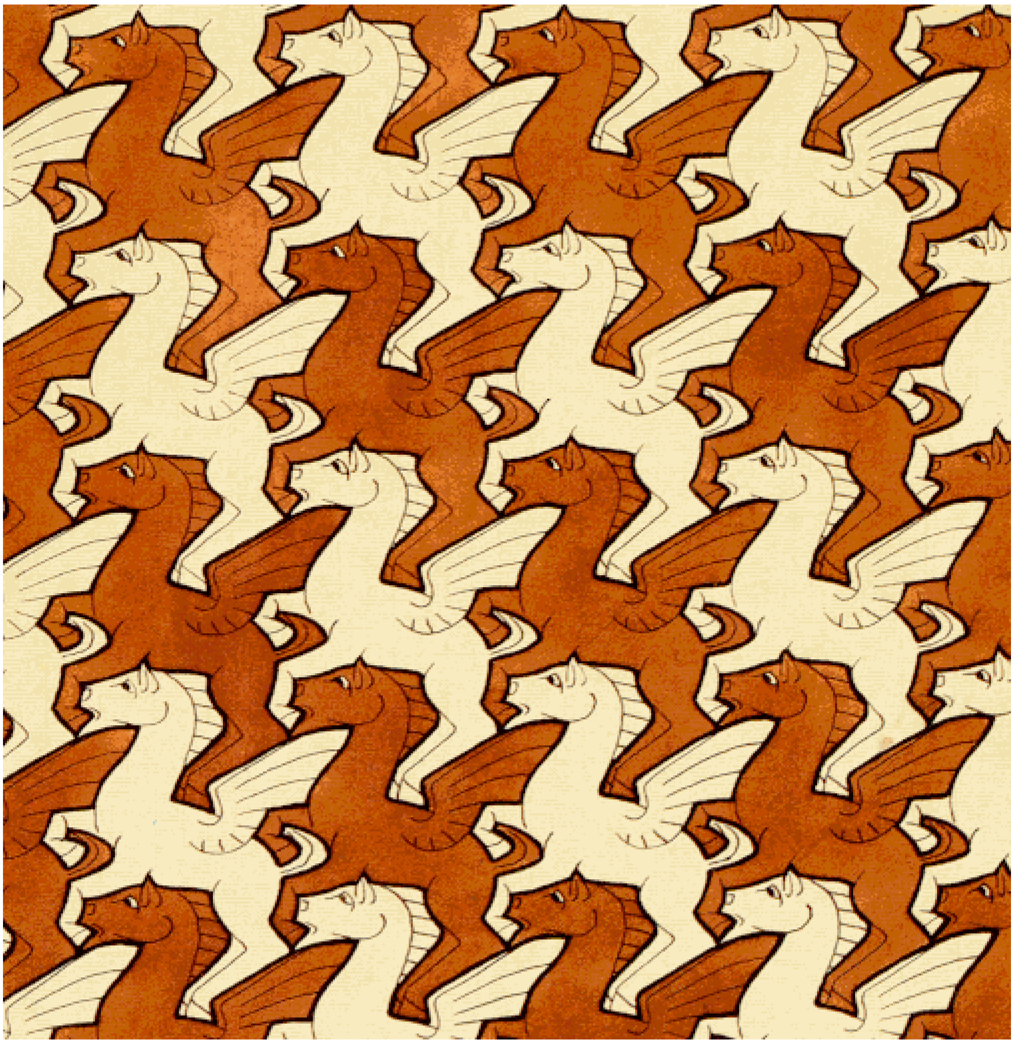


5.6 M. C. Escher : “les papillons” (1942) :

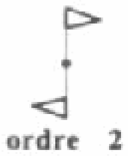
5.7 **M. C. Escher : “les poissons” :**

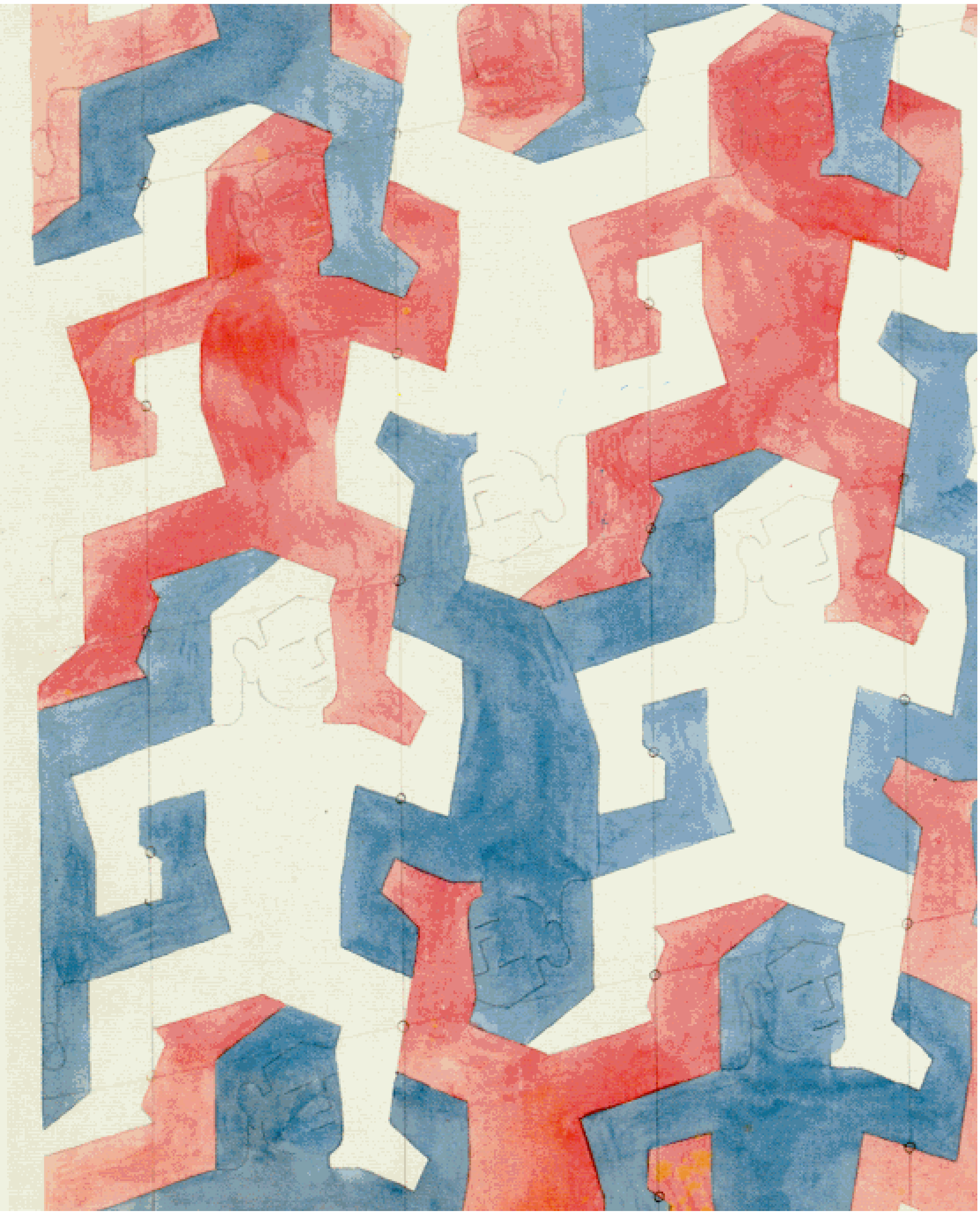


5.8 **M. C. Escher : “Pégase” obtenu, uniquement, par translations :**

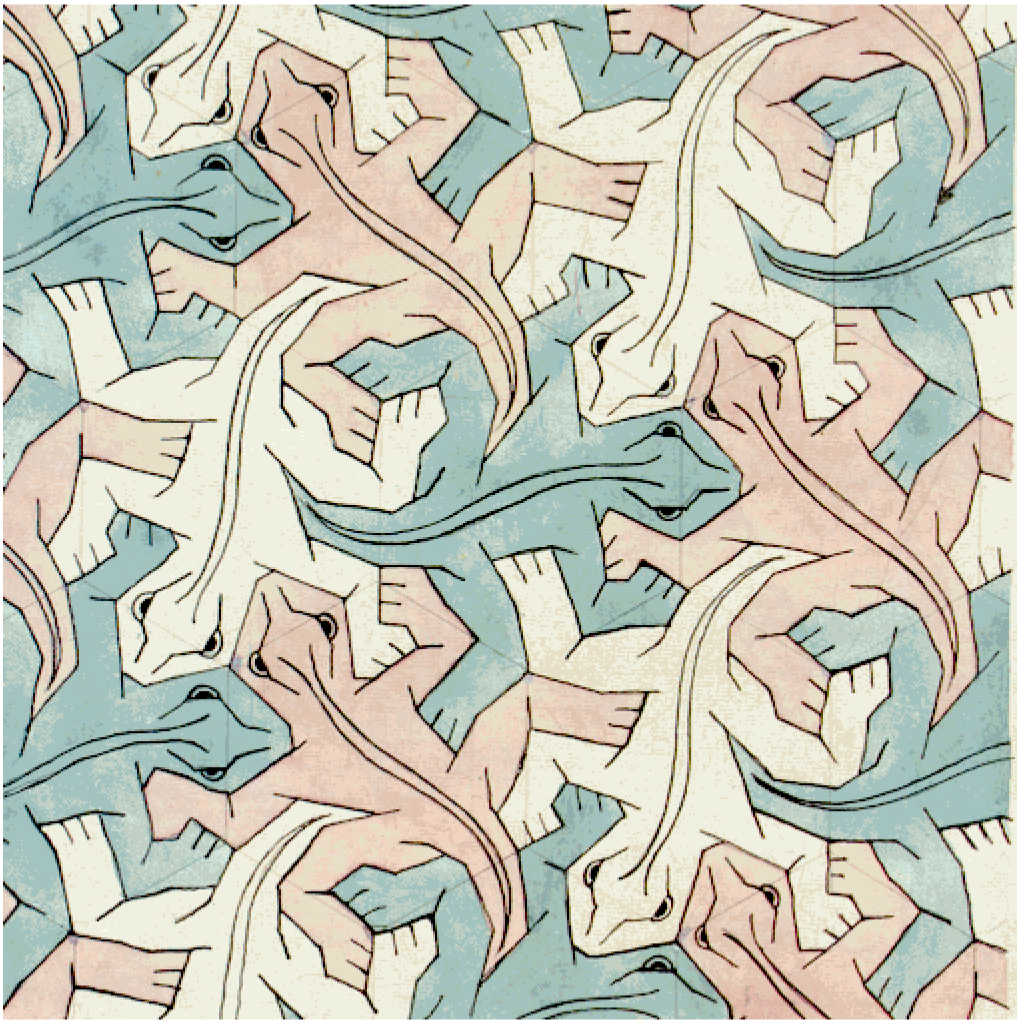


5.9 M. C. Escher : “homme fort” obtenu par rotations d’ordre 2 :





5.10 M. C. Escher : dessin n°25 : "les lézards" appartenant au groupe p3 :



5.11 M. C. Escher : dessin n°14 : "les lézards" appartenant au groupe p4 :

5.12 M. C. Escher : dessin n°56 : “les lézards” appartenant au groupe p6 :

6 conclusion

Les pavages fascinent souvent celui qui les contemple. Il y a une certaine magie, surtout quand le pavage utilise comme motif une forme identifiable comme par exemple un poisson, un oiseau ou un lézard (c’est le motif que nous avons choisit pour notre pavage) : la magie de voir les formes s’assembler dans le vide...

L’art de paver le plan (comme le sol, les murs, le plafond, etc...) avec un même motif tient donc à la fois de l’artisanat et des mathématiques.