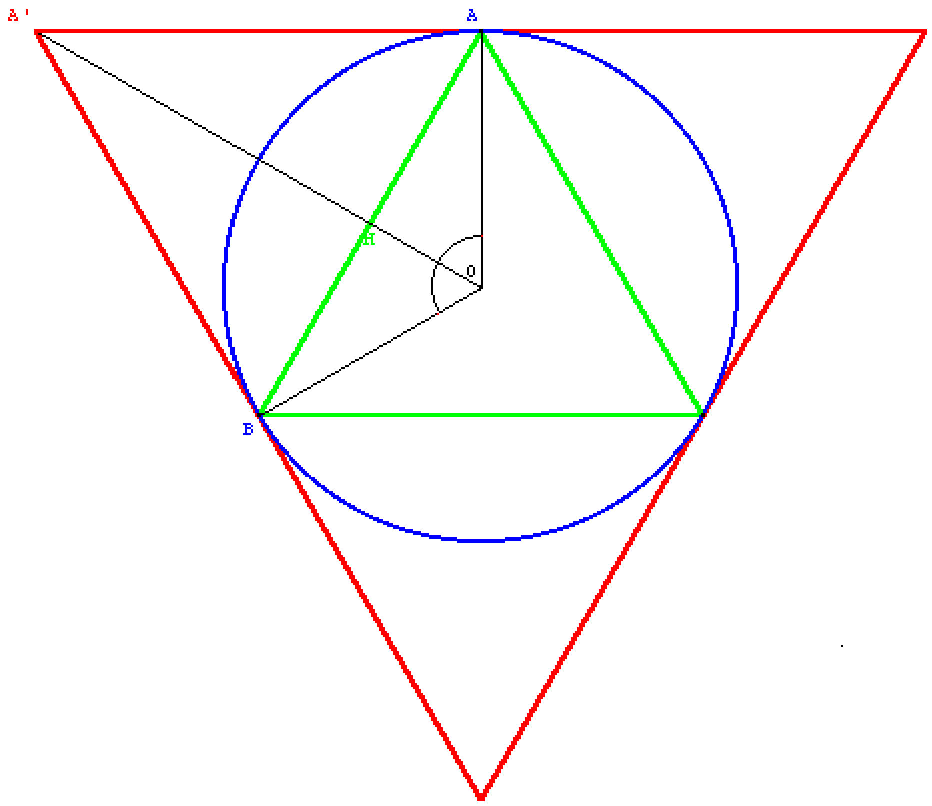
Figures géométriques obtenues par itération



Problématique : Expliquer aux élèves ce que l'on appelle une itération ; Que sont les « fractales » ? S'appuyer sur la plus simple le « flocon » ; leur montrer et leur faire calculer avec un tableur l'évolution du périmètre et de l'aire conformément aux indications ci-dessous. Influence sur l'art des fractales, historique de la découverte des fractales (Mandelbrot et autres mathématiciens…).

1 Chapitre 11 du livre

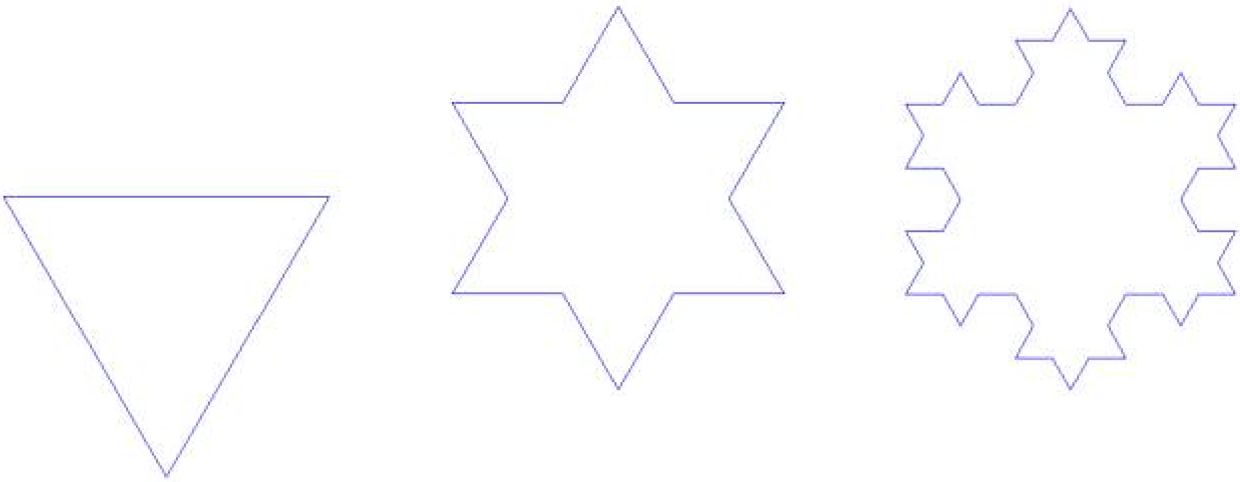
1.1 Un exemple simple : des carrés emboités TD1 page 140

1.2 Attention aux apparences TD2 page 141

1.3 Les flocons de Von Koch TD3 page 142-143

1.3.1 Construction

Le flocon de Von Koch est la courbe obtenue en poursuivant indéfiniment la construction dont les premières étapes sont dessinées ci-dessous :



Etape 0 Etape 1 Etape 2

On considère qu'à l'étape 1 le côté du triangle équilatéral mesure 1 unité.

Il s'agit, à l'aide du tableur, de trouver le **périmètre du flocon** ainsi que son **aire** à une étape quelconque n (0 □ n □ 20).

1.3.2 Périmètre :

Un côté à l'étape n donne naissance, à l'étape n+1, à 4 côtés de longueur trois fois plus petite. Cette observation permet de compléter de proche en proche, et à l'aide de formules, les lignes d'un tableau du type :

rang	nbre de côtés	longueur d'un côté	périmètre
n	**X(n)**	**l(n)**	**p(n)**
0	3	1	3
1	12	0,333333333	4
2	48	0,111111111	5,333333333
3	192	0,037037037	7,111111111
4	768	0,012345679	9,481481481
5	3072	0,004115226	12,64197531
6	12288	0,001371742	16,85596708

7	49152	0,000457247	22,47462277
8	196608	0,000152416	29,96616369
9	786432	5,08053E-05	39,95488493
10	3145728	1,69351E-05	53,2731799
11	12582912	5,64503E-06	71,03090654
12	50331648	1,88168E-06	94,70787538
13	201326592	6,27225E-07	126,2771672
14	805306368	2,09075E-07	168,3695562
15	3221225472	6,96917E-08	224,4927416
16	12884901888	2,32306E-08	299,3236555
17	51539607552	7,74352E-09	399,0982074
18	2,06158E+11	2,58117E-09	532,1309432
19	8,24634E+11	8,60392E-10	709,5079242
20	3,29853E+12	2,86797E-10	946,0105656

1.3.3 Aire :

Rappel :

Calcul de la surface d'un triangle équilatéral, "triangle ayant trois côtés égaux" connaissant la longueur du côté.

$$S = \sqrt{\frac{3}{4}} \times c^2 \simeq 0{,}433 \times c^2$$

S = surface
c = côté

(Le signe $\simeq$ signifie à peu près égal ; ici il indique que le nombre 0,433 est une valeur approchée de : $\sqrt{\frac{3}{4}}$)

Un côté à l'étape n donne naissance, à l'étape n+1, à un nouveau triangle équilatéral dont le côté de longueur l(n+1)est **trois** fois plus petit que l(n). L'aire du triangle équilatéral étant fonction du carré de la longueur d'un coté, l'aire S(n+1) sera **neuf** fois plus petite que l'aire de S(n).
L'aire du flocon A(n+1)=A(n)+S(n)*nombre de nouveau triangle. Or nombre de nouveau triangle=X(n)/3

Cette observation permet de compléter de proche en proche, et à l'aide de formules itératives, les lignes du tableau précédent où l'on a ajouté deux colonnes.

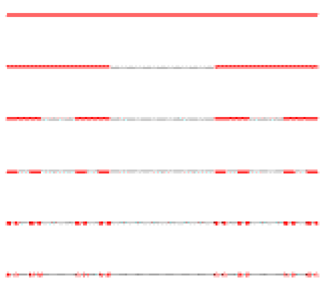
rang	**nbre de côtés**	**longueur d'un côté**	**périmètre**	**aire d'un nouveau petit triangle**	**aire du flocon**
n	**X(n)**	**l(n)**	**p(n)**	**S(n)**	**A(n)**
0	3	1	3	0,433012702	0,433012702
1	12	0,333333333	4	0,048112522	0,481125224
2	48	0,111111111	5,333333333	0,005345836	0,502508568
3	192	0,037037037	7,111111111	0,000593982	0,512012276
4	768	0,012345679	9,481481481	6,5998E-05	0,516236146
5	3072	0,004115226	12,64197531	7,33311E-06	0,518113422
6	12288	0,001371742	16,85596708	8,1479E-07	0,518947766
7	49152	0,000457247	22,47462277	9,05322E-08	0,519318586
8	196608	0,000152416	29,96616369	1,00591E-08	0,519483395
9	786432	5,08053E-05	39,95488493	1,11768E-09	0,519556644
10	3145728	1,69351E-05	53,2731799	1,24187E-10	0,519589198
11	12582912	5,64503E-06	71,03090654	1,37985E-11	0,519603667
12	50331648	1,88168E-06	94,70787538	1,53317E-12	0,519610098

13	201326592	6,27225E-07	126,2771672	1,70352E-13	0,519612956
14	805306368	2,09075E-07	168,3695562	1,8928E-14	0,519614226
15	3221225472	6,96917E-08	224,4927416	2,10311E-15	0,519614791
16	12884901888	2,32306E-08	299,3236555	2,33679E-16	0,519615042
17	51539607552	7,74352E-09	399,0982074	2,59644E-17	0,519615153
18	2,06158E+11	2,58117E-09	532,1309432	2,88493E-18	0,519615203
19	8,24634E+11	8,60392E-10	709,5079242	3,20548E-19	0,519615225
20	3,29853E+12	2,86797E-10	946,0105656	3,56164E-20	0,519615234

On observe que lorsque n devient très grand, les périmètres p(n) deviennent de plus en plus grand mais que l'aire du flocon, elle, semble bornée.

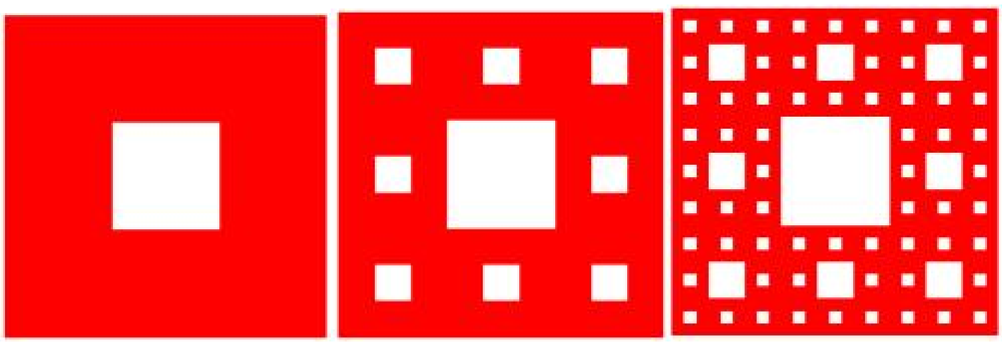
1.4 Autres exemples de fractale

Fractale de Cantor : en partant de [0, 1]



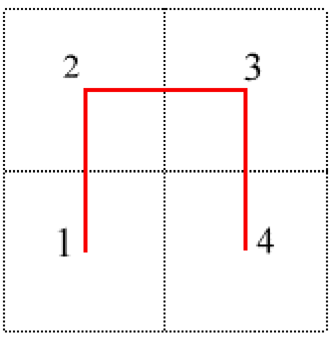
:

Pour le *carré* (en anglais "Sierpinski carpet"), l'objet de départ est un carré plein

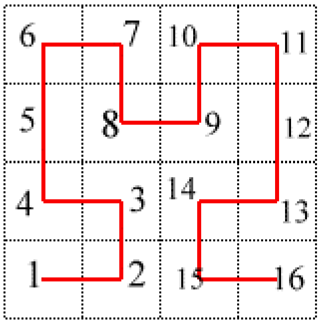


.

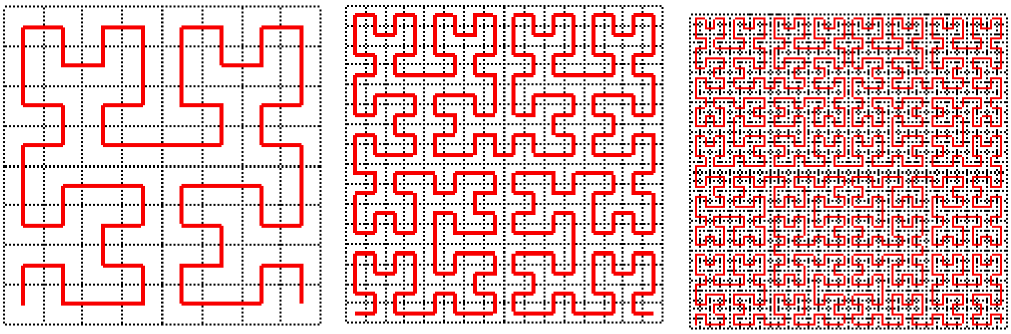
Partager en 4 "petits" carrés "égaux" ; numéroter chacun de ces carrés de sorte que deux carrés successifs se touchent par un côté, en commençant par le carré en bas à gauche, et terminant par le carré en bas à droite. Itérez…



Partager chacun de ces carrés en 4 "micro" carrés "égaux" ; numéroter chacun de ces carrés de sorte que deux micro carrés successifs se touchent par un côté, en commençant par le micro-carré en bas à gauche, et terminant par le micro-carré en bas à droite, le premier micro-carré d'un petit carré devant avoir un côté en commun avec le dernier micro-carré du petit carré précédent et le dernier micro-carré devant toucher par un coté le petit carré suivant.



Recommencer ce processus à l'infini.



1.5 Approximation du nombre π TD4 page 144

A faire à la maison pour le jeudi 20 avril

Correction des questions pages 144, 145 :

1. On divise chaque coté par deux donc C(n+1)=2*C(n), suite géométrique de raison 2 et de premier terme C(1)=3, donc le terme générale est $C(n)=C(1)*(2)^{n-1}=3/2*2^n$
2. le périmètre p(n) est la somme des longueurs des coté soit p(n)=c(n)*l(n)
Pour calculer p(1), il faut avant tout calculer l(1) la longueur d'un coté d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 1. Celui-ci est égal au double du sinus du demi-angle de ses cotés (360/3=120°) soit 2*SIN(60)=2*0,866=0,732
Pour calculer p(2), il faut avant tout calculer l(2) la longueur d'un coté d'un hexagone inscrit dans un cercle de rayon 1. Celui-ci est égal au double du sinus du demi-angle de ses cotés (360/6=60°) soit 2*SIN(30)=0,517

rang	**Polygone**	**nombre de cotés du polygone**	**longueur de l'un des coté**	**périmètre du polygone**
n	**P(n)**	**C(n)**	**l(n)**	**p(n)**
1	triangle	3	1,732050808	5,19615242
2	hexagone	6	1	6
3	dodécagone	12	0,51763809	6,21165708
…				
n		3/2*(2)^n	2*SIN(180/C(n))	C(n)*l(n)

3. P(n) est croissante puisque son périmètre s'approchera de celui du cercle
4. Le périmètre du cercle de rayon 1 est 2 π, celui-ci majore donc p(n)
5. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle (OMK) rectangle en K, $OM^2=MK^2+KO^2$, or $KO^2=1$ donc $OK=(1- MK^2)^{1/2}$
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle (KMP) rectangle en K, $MP^2=KP^2+KM^2$, donc $KP=(MP^2- MK^2)^{1/2}$
6. OK+KP=1 et MK=0,5l(n)

$OK = \sqrt{1 - MK^2}$ $\quad KP = \sqrt{MP^2 - MK^2}$

or $OK + KP = 1$

$\sqrt{1 - MK^2} + \sqrt{MP^2 - MK^2} = 1$

or $MK = 0{,}5\, l_n$

$\sqrt{1 - 0{,}5^2 l_n^2} + \sqrt{l_{n+1}^2 - 0{,}5^2 l_n^2} = 1$

$\sqrt{l_{n+1}^2 - 0{,}5^2 l_n^2} = 1 - \sqrt{1 - 0{,}5^2 l_n^2}$ $\quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$l_{n+1}^2 \cancel{- 0{,}5^2 l_n^2} = 1 + 1 \cancel{- 0{,}5^2 l_n^2} - 2\sqrt{1 - 0{,}5^2 l_n^2}$

$l_{n+1}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - 0{,}5^2 l_n^2}$

$l_{n+1}^2 = 2 - \sqrt{4(1 - 0{,}5^2 l_n^2)}$

$l_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$

7.

rang	Polygone	nombre de cotés du polygone	longueur de l'un des coté	périmètre du polygone
n	**P(n)**	**C(n)**	**l(n)**	**p(n)**
1	triangle	3	1,732050808	5,19615242
2	hexagone	6	1	6
3	dodécagone	12	0,51763809	6,21165708
4		24	0,261052384	6,26525723
5		48	0,130806258	6,27870041
6		96	0,065438166	6,2820639
7		192	0,032723463	6,28290494
8		384	0,016362279	6,28311522
9		768	0,008181208	6,28316778
10		1536	0,004090613	6,28318093
11		3072	0,002045307	6,28318421
12		6144	0,001022654	6,28318503
13		12288	0,000511327	6,28318524
14		24576	0,000255663	6,28318529
15		49152	0,000127832	6,2831853
16		98304	6,39159E-05	6,28318531
17		196608	3,19579E-05	6,28318531
18		393216	1,5979E-05	6,28318531
19		786432	7,98948E-06	6,28318531
20		1572864	3,99474E-06	6,28318531
21		3145728	1,99737E-06	6,28318531
22		6291456	9,98685E-07	6,28318531

8. p(22)≈2*π donc π≈6,28318530717933/2=3,14159265358967

Bibliographie :

http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/accueil.htm
http://perso.wanadoo.fr/charles.vassallo/
http://fractals.iuta.u-bordeaux.fr/jpl/jpl01.html
http://www2.ac-lille.fr/math/fractales.htm
http://www.mathcurve.com/
http://www.nombrepi.com/