

Universidad Nacional Abierta

ALGEBRA I(752-757)

Vicerrectorado Académico

Fecha: 29-11-08

Área de Matemática

EDUCACIÓN MATEMÁTICA (508)

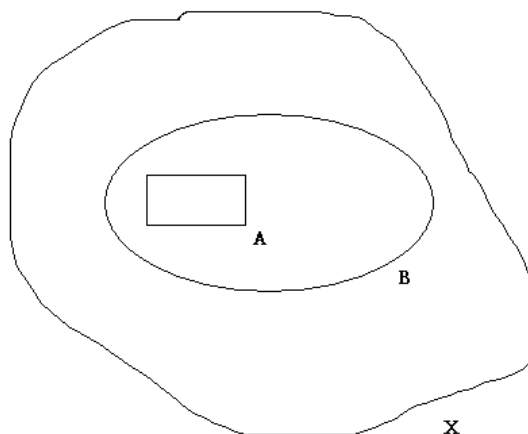
MATEMÁTICA(126)

PREGUNTAS Y RESPUESTAS

Obj 1 Pta 1

Demuestre que si $A \subset B$ entonces $B^c \subset A^c$, aquí A^c denota el complemento de A . Justifique cualquier argumento y no use solo un dibujo.

Solución:



Un dibujo como el anterior ayuda a visualizar lo que se quiere demostrar, nos puede dar ideas sobre la demostración, etc etc. Su utilidad está fuera de duda ***pero no es una demostración.***

En nuestro caso debemos demostrar que si $x \in B^c$ entonces $x \in A^c$. Supongamos lo contrario, es decir que x no está en $A^c \Rightarrow x \in A$ pero entonces $x \in B$ y esto es absurdo ya que no puede ocurrir que $x \in B^c$ y que $x \in B$.

Obj 1 Pta 2

Demuestre que $(A^c)^c = A$. Justifique cualquier argumento y no use solo un dibujo.

Solución:

Similar al problema anterior y queda como ejercicio al estudiante UNA.

Nota: Escoja un solo problema para trabajar, si trabaja ambos el objetivo se considerará no logrado.

Obj 2 Pta 3

En Venezuela consideramos el conjunto X de todas las personas que tienen cédula de identidad. Definimos en X definimos una relación R de la manera siguiente aRb si y solo si a, b tienen igual el último dígito de la cédula de identidad. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución:

Vemos que aRa es cierta ya que la cédula del mismo ciudadano termina en el mismo número. Supongamos ahora que aRb entonces a, b tienen el mismo número final de C.I. pero esto implica que b, a tienen el mismo número final de C.I. y por ende bRa . Por último si aRb y bRc entonces a, b tienen iguales dígitos finales y lo mismo ocurre con b, c . Pero la igualdad es una relación transitiva, luego a, c tienen iguales dígitos finales y esto implica que aRc y nuestra relación es de equivalencia.

Nota: Esto es una manera de agrupar en clases de equivalencia a los electores de un centro de votación. Para la relación definida se necesitan 10 mesas, pero si contamos con menos mesas también podemos definir una relación de equivalencia que haga el trabajo, invitamos al estudiante UNA a pensar sobre ello.

Obj 3 Pta 4

Una ley de composición interna $\otimes$ en el conjunto $X = \{a, b, c\}$ es dada por la siguiente tabla

$$\begin{bmatrix} \otimes & a & b & c \\ a & b & a & c \\ b & a & b & c \\ c & b & c & a \end{bmatrix}$$

Indique, explicando cuidadosamente sus razones, si la operación $\otimes$ es conmutativa y si tiene elemento neutro.

Solución:

Observemos de la tabla que

$$ab=ba=a, bb=b \text{ y } bc=cb=c$$

Luego b es el elemento neutro. En relación a la conmutatividad, como $ac=c$ y $ca=b$ concluimos que la operación no es conmutativa.

Obj 4 Pta 5

Un grupo G verifica que $xx = e$ para cualquier x en G , siendo e el elemento neutro del grupo. Demuestre que el grupo es conmutativo o abeliano.

Solución:

Esto se puede hacer de varias formas, como $abab=e$ deducimos que multiplicando por a por la izquierda y por b por la derecha que

$$aababb=aeab$$

$$ba=ab$$

ya que $aa=bb=e$. Esto concluye la demostración.

Obj 5 Pta 6

Consideremos un polinomio en el anillo $Z[x]$ de los polinomios con coeficientes enteros. Demuestre que el polinomio $x^3 - x + 2$ no se puede factorizar en $Z[x]$.

Solución:

Supongamos que $x^3 - x + 2$ se factoriza, de manera no trivial, como

$$x^3 - x + 2 = p(x)q(x)$$

entonces uno de los factores debe ser de primer grado y en particular $x^3 - x + 2$ debe tener una raíz entera ya que el polinomio $x^3 - x + 2$ es mónico. Sea r la raíz entera entonces

$r^3 - r + 2 = 0$ y en particular $r(r^2 - 1) = -2$ y r debe ser +1, -1, +2 o -2. El estudiante UNA debe verificar que ninguno de las soluciones propuestas es raíz de $x^3 - x + 2$ y esto concluye el problema.

Obj 6 Pta7

Halle el inverso de $1 + i + j$ en el cuerpo de los cuaternios

Solución:

La técnica es la de siempre, escribimos $\frac{1}{1+i+j} = \frac{1}{1+i+j} \frac{1}{(1+i)-j}$ etc, etc. Como el estudiante UNA debe saber, la idea es “racionalizar” la expresión.

FIN DEL MODELO