**UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA** | **MAT IV ING** (735)
**VICERRECTORADO ACADÉMICO** | **TERCERA PARCIAL**
**ÁREA DE MATEMÁTICA** | Fecha: 15/ 11 /2008

**MODELO DE RESPUESTAS**
Objetivos 8, 9, y 10.

**OBJ. 8**

**PTA 1** *Utilice el Teorema de Green para calcular,*

$$\int_C xy^2\ dx + 2x^2y\ dy$$

*donde $C$ es la curva triangular formada por los puntos $(0,0)$; $(2,2)$ y $(2,4)$. Orientada positivamente.*

***Solución*** :
El Teorema de Green-Riemann dice: Sean $P(x,y)$, $Q(x,y)$ funciones continuas y con primeras derivadas parciales continuas en un conjunto abierto y sea $C$ contenido en ese conjunto abierto, una curva regular a trozos, cerrada y simple. Si $D$ es el dominio del plano formado por $C$ con su interior, entonces se verifica que:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy$$

En nuestro ejercicio, $P(x,y) = xy^2$ y $Q(x,y) = 2x^2y$, las cuales son funciones derivables y continuas. Haciendo el dibujo de la región $C$ encontramos el dominio $D$,

Por lo que, utilizando el Teorema de Green se tienen que,

$$\begin{aligned}
\int_C xy^2dx + 2x^2ydy &= \int_0^2\int_x^{2x} (4xy - 2xy)\, dydx \\
&= \int_0^2\int_x^{2x} (2xy)\, dydx \\
&= \int_0^2 \left(xy^2\right)|_x^{2x}\ dx \\
&= \int_0^2 3x^3dx = 12
\end{aligned}$$

□

**OBJ. 9**

**PTA 2** *Resolver la siguiente ecuación diferencial de primer orden,*

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$$

***Solución*** :
Se desea resolver la ecuación diferencial,

$$(3x^2y - 6x^2)dx + dy = 0$$

El factor integrante $\mu$ esta dado por,

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{P(x,y)}{dy} - \frac{Q(x,y)}{dx}}{Q(x,y)}\mu$$

donde, $P(x,y)=3x^2y-6x^2$ y $Q(x,y)=1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dx} &= 3x^2\mu \\ \int\frac{d\mu}{\mu} &= \int 3x^2dx \\ ln(\mu) &= x^3 \\ \mu &= e^{x^3}\end{aligned}$$

Multiplicando por $\mu$ la ecuación diferencial, se tiene,

$$e^{x^3}(3x^2y-6x^2)dx+e^{x^3}dy=0$$

luego,

$$\frac{P(x,y)}{dy}=e^{x^3}(3x^2)=\frac{Q(x,y)}{dx}$$

Por lo tanto es una ecuación diferencial exacta. Para resolverla debemos buscar $C=f(x,y)$, tal que,

$$\frac{df(x,y)}{dx} = e^{x^3}(3x^2y-6x^2) \tag{1}$$

$$\frac{df(x,y)}{dy} = e^{x^3} \tag{2}$$

de la ecuación (2) se obtiene,

$$f(x,y)=\int e^{x^3}dy+g(x)=e^{x^3}y+g(x)$$

Para encontrar $g(x)$ derivamos con respecto a $x$ la ecuación anterior e igualamos a (1),

$$\begin{aligned}3x^2e^{x^3}y+g'(x) &= e^{x^3}(3x^2y-6x^2) \\ g'(x) &= e^{x^3}(3x^2y-6x^2-3x^2y) \\ g'(x) &= -6x^2e^{x^3} \\ \int g'(x) &= \int -6x^2e^{x^3} \\ g(x) &= -2e^{x^3}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}C=f(x,y) &= e^{x^3}y-2e^{x^3} \\ y &= Ce^{-x^3}+2\end{aligned}$$

□

**OBJ. 10**

**PTA 3** *Determine la solución de la ecuación diferencial de segundo orden,*

$$y''+y=e^x+x^3$$

*con las condiciones iniciales* $y(0)=2$ *y* $y'(0)=0$ .

***Solución*** :

La solución general de la ecuación homogénea $y''+y=0$ es:

$$\lambda^2+1=0 \qquad \lambda=\pm i$$

así que la solución es de la forma, $y_h(x)=C_1sen(x)+C_2cos(x)$.

Ahora hallamos la solución particular $y_p(x)$, como el segundo miembro de la ecuación diferencial es $e^x + x^3$, se tendrá dos soluciones particulares, una de la forma $y_{p1}(x) = ae^x$ y otra de la forma $y_{p2} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Debemos derivar y sustituir cada una de estas soluciones en la ecuación diferencial para encontrar los valores de las constantes $a$, $A$, $B$, $C$, y $D$.

Para $y_{p1}$ se tiene que, $y_{p1} = ae^x = y'_{p1} = y''_{p1}$, al sustituir en la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} ae^x + ae^x &= e^x \\ 2ae^x &= e^x \end{aligned}$$

por lo que, $a = 1/2$.

Para $y_{p2}$ se tiene que, $y_{p2} = ae^x = y'_{p1} = y''_{p1}$,

$$\begin{aligned} y_{p2} &= Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\ y'_{p2} &= 3Ax^2 + 2Bx + C \\ y''_{p2} &= 6Ax + 2B \end{aligned}$$

al sustituir en la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} 6Ax + 2B + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D &= x^3 \\ Ax^3 + Bx^2 + (6A + C)x + 2B + D &= x^3 \end{aligned}$$

de donde se obtiene, $A = 1$, $B = 0$, $C = -6$, y $D = 0$.

La solución general de la ecuación propuesta es:

$$Y(x) = C_1 sen(x) + C_2 cos(x) + \frac{1}{2}e^x + x^3 - 6x$$

Para encontrar los valores de $C_1$ y $C_2$ utilizamos las condiciones dadas:

$$Y'(x) = C_1 cos(x) - C_2 sen(x) + \frac{1}{2}e^x + 3x^2 - 6$$

utilizando $y(0) = 2$ y $y'(0) = 0$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -C_2 + \frac{1}{2} &= 2 \\ C_1 + \frac{1}{2} - 6 &= 0 \end{aligned}$$

de donde, $C_1 = \frac{11}{2}$ y $C_2 = \frac{3}{2}$. Finalmente la solución es:

$$Y(x) = \frac{11}{2} sen(x) + \frac{3}{2} cos(x) + \frac{1}{2}e^x + x^3 - 6x$$

□