

**MODELO DE RESPUESTAS**

Objetivos 4, 5, 6, y 7.

**OBJ. 4**

**PTA 1** Determine la derivada direccional de la función,

$$f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$$

en el punto  $(0, 0, 0)$  en la dirección del vector  $v = (5, 1, -2)$ .

Solución :

Si  $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$ , se tiene,

$$\nabla F = (e^y + ze^x) \vec{i} + (xe^y + e^z) \vec{j} + (ye^z + e^x) \vec{k}$$

$$\nabla F(0, 0, 0) = 1 \vec{i} + 1 \vec{j} + 1 \vec{k}$$

Ahora bien, denotemos por  $u$  al vector unitario en la dirección de  $v$ , es decir,

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{25 + 1 + 4}}(5, 1, -2) = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}\right) = \frac{5}{\sqrt{30}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{30}} \vec{j} + \frac{-2}{\sqrt{30}} \vec{k}$$

Por lo que, la derivada direccional es,

$$D_u F = \nabla F(0, 0, 0) \cdot u = \frac{5 + 1 - 2}{\sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{30}}$$

□

**OBJ. 5**

**PTA 2** Considere el campo vectorial  $\vec{F}$  en  $R^3$ , definido por:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(x, y, z)$$

Probar que  $\vec{F}$  es un campo conservativo y calcular su potencial escalar.

Solución :

Para Probar que  $\vec{F}$  es un campo conservativo debemos probar que  $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$ . Se define,

$$\text{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \vec{k}$$

donde,

$$F_1 = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$F_2 = y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$F_3 = z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} &= z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}(-3y) - y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}(-3z) = 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} &= x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}(-3z) - z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}(-3x) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}(-3x) - x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}(-3y) = 0\end{aligned}$$

de donde,  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ , lo que comprueba que  $\vec{F}$  es un campo conservativo.

Para calcular su potencial escalar elegimos el punto  $(0, 0, 0)$  (Puede ser cualquier punto, se elige este a fin de facilitar los cálculos), y utilizamos la definición planteada en la proposición 9, sección 92 del libro UNA, pág. 418.

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= \int_0^x F_1(u, 0, 0) du + \int_0^y F_2(x, u, 0) du + \int_0^z F_3(x, y, u) du \\ &= \int_0^x u(u^2)^{-\frac{3}{2}} du + \int_0^y u(x^2 + u^2)^{-\frac{3}{2}} du + \int_0^z u(x^2 + y^2 + u^2)^{-\frac{3}{2}} du\end{aligned}$$

calculando cada una de las integrales, haciendo en primer lugar el cambio de variable  $z = u^2$ ,  $dz = 2udu$ , tenemos,

$$\int_0^x u(u^2)^{-\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^x 2u(u^2)^{-\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^x z^{-\frac{3}{2}} dz = -(u^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^x = -(x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

para el calculo de las otras integrales se procede de manera similar,

$$\begin{aligned}\int_0^y u(x^2 + u^2)^{-\frac{3}{2}} du &= -(x^2 + u^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^y = -(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \int_0^z u(x^2 + y^2 + u^2)^{-\frac{3}{2}} du &= -(x^2 + y^2 + u^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^z = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= -(x^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

□

## OBJ. 6

**PTA 3** Evalúe la integral de línea,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde  $\vec{F}(x, y) = xy \vec{i} + 3y^2 \vec{j}$ , y  $C$  está definida por  $\vec{r}(t) = 11t^4 \vec{i} + t^3 \vec{j}$  con  $0 \leq t \leq 1$ .

**Solución :**

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Como  $\vec{r}(t) = 11t^4 \vec{i} + t^3 \vec{j}$ , entonces,  $\vec{r}'(t) = 44t^3 \vec{i} + 3t^2 \vec{j}$ .

Por otro lado,  $\vec{F}(\vec{r}(t)) = 11t^7 \vec{i} + 3t^6 \vec{j}$ .

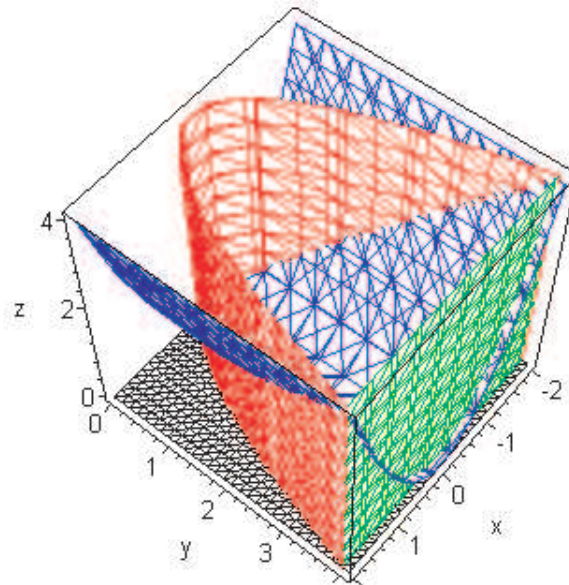
$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\
&= \int_0^1 484t^{10} + 9t^8 dt \\
&= (44t^{11} + t^9) \Big|_0^1 = 44 + 1 = 45
\end{aligned}$$

□

**OBJ. 7**

**PTA 4** Encuentre el volumen del sólido acotado por los cilindros  $z = x^2$ ,  $y = x^2$  y los planos  $z = 0$ ,  $y = 4$ .

Solución :



La curva dibujada en negro corresponde al plano  $z = 0$ , la verde al plano  $y = 4$ , la azul al cilindro  $z = x^2$ , y la roja  $y = x^2$

Observe que se va a calcular el área bajo el cono  $z = x^2$  en la región  $D$ . La podemos calcular como una integral doble o triple.

Como la integral triple,

$$V = \iiint_D dv,$$

donde  $D = \{(x, y, z) \mid x \in (-2, 2); y \in (x^2, 4); z \in (0, x^2)\}$

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_D dv = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{x^2}^0 dz dy dx \\
&= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 x^2 dy dx \\
&= \int_{-2}^2 x^2(4 - x^2) dx \\
&= \int_{-2}^2 4x^2 - x^4 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^2 4x^2 - x^4 dx \\ &= \left( \frac{8x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{128}{15} \end{aligned}$$

Como la integral doble,

$$V = \iint_D F(x, y) dA,$$

donde  $F(x, y) = x^2$  y  $D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 4; x \in (-2, 2)\}$

$$\begin{aligned} V = \iint_D F(x, y) dA &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 x^2 dy dx \\ &= \int_{-2}^2 x^2(4 - x^2) dx = \frac{128}{15} \end{aligned}$$

□