TEMA II:
Concepto de probabilidad y cálculo de probabilidades

1.- **Cálculo de probabilidades**.

1.1.- Definición de experimento aleatorio.
1.2.- Sucesos elementales. Espacio muestral.
1.3.- Suceso seguro, suceso imposible.
1.4.- Frecuencia de un suceso. Definición de probabilidad. Axiomas y consecuencias.
1.5.- Probabilidad condicionada. Propiedades.
1.6.- Sucesos independientes.
1.7.- Teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

(Ejercicios)

Primera parte.

1.- Un jugador expresó a Galileo su sorpresa por observar que al jugar con tres dados la suma 10 aparece con mas frecuencia que la 9. Estudiar la veracidad de esta afirmación.

2.- Se reparten las cuarenta cartas de una baraja española entre 4 jugadores. Calcular la probabilidad de que un jugador determinado tenga 0, 1, 2, 3 o 4 ases.

3.-A los condenados a muerte de un país se les concedía la gracia de redimir su pena si sacaban una bola blanca de una urna. El proceso consistía en colocarles dos urnas, una con 50 bolas blancas y la otra con 50 negras. El condenado elegía una urna al azar, y sacaba una bola. En cierta ocasión, un condenado pidió cambiar la composición de las urnas, gracia que le fue concedida. Colocó en una urna una bola blanca y en la otra 49 blancas y 50 negras. ¿Aumentó de este modo la probabilidad de salvarse?

4.- ¿Cuál es la probabilidad de torpedear un barco sabiendo que sólo se pueden lanzar tres torpedos y que la probabilidad de hacer blanco con cada uno de ellos es 0.2?

5.- Un producto está formado por dos componentes, a y b. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de que a tenga un defecto es 0.06 y de que lo tenga b es 0.07. Calcular la probabilidad de que el producto no sea defectuoso.

6.- La probabilidad de que un tirador haga blanco en un disparo es 0.8. ¿Cuántos disparos debe efectuar para que la probabilidad de no fallar ninguno sea menos que 0.3.

7.- Una urna contiene 9 bolas blancas, 8 negras y 5 rojas. Se extraen sucesivamente tres bolas de la urna. Hallar la probabilidad de que las tres bolas tengan el mismo color si:

i) La extracción se hace con reemplazamiento.
ii) La extracción se hace sin reemplazamiento.
iii) La primera bola se reemplaza y las otras no.

8.- Se lanza un dado, se observan los puntos obtenidos y se pone el mismo número de bolas blancas en una urna. Se lanza el dado otra vez y se pone el mismo número de bolas rojas en la urna. Se sabe que el total de bolas puestas en la urna es 9. ¿ Cuál es la probabilidad de que haya salido un 4 en el primer lanzamiento?

9. - En una caja hay 10 piezas de la fábrica A, 15 de la B y 25 de la C. La probabilidad de que una pieza de A sea de calidad excelente es 0.8, de la B es 0.9 y de la C es 0.7. Determinar la probabilidad de que una pieza extraída al azar resulte de calidad excelente.

10.- Dos máquinas automáticas producen el mismo tipo de piezas que son arrojadas a un transportador común. Se sabe que la primera máquina produce las dos terceras partes de las piezas y que un 20% son defectuosas. En la segunda máquina se producen un 12% de piezas defectuosas. Se pide:

.- Calcular la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.
.- Si tomada una pieza al azar resulta ser defectuosa, calcular la probabilidad de que dicha pieza haya sido producida por la primera máquina automática.

11.- En un hospital ingresa un promedio de 50% de enfermos con la afección K, 20% con la afección L y 30% con la afección M. La probabilidad de curación total de la afección K es 0.8, de la L es 0.7 y de la M es 0.9. Un enfermo ingresado en el hospital ha sido dado de alta totalmente curado. ¿Cuál es la probabilidad de que este enfermo padeciera la afección M?

12.- En una urna hay 7 bolas blancas y 5 negras. Se extrae una bola al azar y se desecha; a continuación se introducen en la urna dos bolas de un color diferente a la que se desecha y se extrae una segunda bola.

i) Hallar la probabilidad de que esta segunda bola sea blanca.
ii) Si la segunda bola es blanca, hallar la probabilidad de que la primera haya sido negra.

13.- Cuatro máquinas A, B, C y D producen respectivamente el 40%, 30%, 20% y 10% del número total de productos de un laboratorio farmacéutico. Estas máquinas producen artículos defectuosos en los siguientes porcentajes: 5%, 4%, 2% y 1% respectivamente. Se selecciona al azar un producto y se pide:

i) Probabilidad de que el producto elegido sea defectuoso.
ii) Si el producto elegido al azar ha resultado ser defectuoso, hallar la probabilidad de que fuera producida por la máquina A.

14.-Se dispone de dos urnas. La urna U contiene el 70% de bolas blancas y el 30% de negras y la urna V contiene el 30% de bolas blancas y el 70 % de negras. Se selecciona una de estas urnas al azar y se toman diez bolas una tras otra con reemplazamiento. El resultado es B=bnbbbbnbbb donde b indica bola blanca y n negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido U?

Ejercicios de Examen.

1.-Se lanza un dado, si sale un número par ponemos en una urna 5 bolas rojas y un número de bolas negras igual al que ha salido en el dado, si sale un 1 o un 3 ponemos en la urna 5 bolas negras y un número de bolas rojas igual al que ha salido en el dado y si sale cinco ponemos en la urna tres bolas de cada color. A continuación se saca una bola de la urna y resulta ser roja. Se pide:

i) Calcular la probabilidad de que haya salido un tres al lanzar el dado
ii) Calcular la probabilidad de que en el dado haya salido un número par.

2.-Una compañía de seguros de automóviles clasifica los conductores en tres clases:

A: alto riesgo. B: riesgo medio. C: bajo riesgo.

La clase A constituye el 30% de los conductores que suscriben un seguro con la compañía y la probabilidad de que uno de esos conductores tenga un accidente en un año es 0.1. Los datos correspondientes para la clase B son 50% y 0.03 y para C 20% y 0.01.

i) Calcular la probabilidad de que un conductor asegurado en la compañía sufra un accidente en un año.
ii) Un determinado cliente contrata una póliza de seguros y tiene en el primer año un accidente. ¿Cuál es la probabilidad de que este cliente esté suscrito en la clase A?.
iii) Si un asegurado lleva diez años sin sufrir accidentes y suponemos que los años son independientes en cuanto a los accidentes, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase C?

3.- Tenemos una urna con 6 bolas rojas 4 negras y 2 verdes. Sacamos una bola de la urna y a continuación ponemos tres del mismo color , después extraemos otra bola . Se pide :

a) Probabilidad de que la bola extraída en segundo lugar sea negra.
b) Si la bola extraída en segundo lugar es negra que probabilidad hay de que la primera fuera verde.
c) Probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

0.- Análisis Combinatorio.

Variaciones.

Se llaman variaciones de m elementos tomados de n en n al número de subconjuntos de n elementos que pueden formarse en un conjunto con m elementos de modo que dos subconjuntos difieran entre si, bien por la naturaleza de algún elemento o bien por el orden de sucesión de los mismos.

$$V_m^n = m(m-1)(m-2)..........(m-(n-1))$$

Permutaciones.

Se llaman permutaciones de orden n a las variaciones de n elementos tomadas de n en n.

$$P_n = V_n^n = n!$$

Combinaciones.

Se llaman combinaciones de m elementos tomados de n en n al número de subconjuntos de n elementos que pueden formarse en un conjunto con m elementos entendiendo que dos subconjuntos difieren en la naturaleza de al menos un elemento y no importa el orden de sucesión de los mismos.

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

Variaciones con repetición.

$$VR_{m,n} = m^n$$

Combinaciones con repetición.

$$C_{m,n} = C_{m+n-1}^n = \binom{m+n-1}{n}$$

EJEMPLO I: Dado el conjunto A ={a, b, c, d}. Comprobar que $V_4^2 = 12$, $C_4^2 = 6$,P_4=24

1.- **Cálculo de probabilidades**.

1.1.- Definición de experimento aleatorio.

Un experimento aleatorio es un proceso que se ajusta a las siguientes condiciones:

- i) Se realiza de acuerdo con unas reglas que determinan completamente su ejecución, conociéndose todos los resultados posibles.
- ii) Se puede repetir cuantas veces se desee.
- iii) El resultado depende del azar, por lo que no se puede predecir.

1.2.- Sucesos elementales. Espacio Muestral.

Se denomina suceso a cada uno de los resultados de un experimento aleatorio. La teoría de conjuntos nos va a resultar muy útil para entender el manejo y el comportamiento de los sucesos. Usaremos letras mayúsculas para representarlos, así A, B, etc. van a representar sucesos.

.- Representaremos por $\mathbf{A \cup B}$ al suceso que ocurre cuando ocurre A u ocurre B y le llamaremos ***suceso unión***.

.- Representaremos por $\mathbf{A \cap B}$ al suceso que ocurre cuando ocurren A y B simultáneamente y le llamaremos ***suceso intersección***..

.- Representaremos por $\overline{A}$ al suceso que ocurre cuando no ocurre Ay le llamaremos ***suceso contrario*** de A.

.- Se dice que el suceso A está contenido en el suceso B y se representa $\mathbf{A \subset B}$ si siempre que ocurre A ocurre B. Dos sucesos se dicen iguales si $\mathbf{A \subset B}$ y $\mathbf{B \subset A}$.

EJEMPLO I. En el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado consideremos los siguientes sucesos.

A =" Sacar un dos", B = " Sacar un número par", C ="Sacar tres o cinco".

Determinar. $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $C \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

Los sucesos que no pueden expresarse como unión de otros sucesos se denominan ***sucesos elementales***. En una primera definición llamaremos ***espacio muestral*** al conjunto formado por todos los sucesos elementales junto con E, F y todos los sucesos compuestos que puedan formarse mediante operaciones (uniones, intersecciones y complementariedad)de los sucesos elementales .

EJEMPLO II. En el experimento aleatorio del ejemplo I los sucesos elementales son seis y cada uno de ellos corresponde a la obtención de cada una de las caras del dado.

1.3.- Suceso seguro, suceso imposible.

$A \cup \overline{A}$ se denomina ***suceso seguro*** y lo representaremos por E y $A \cap \overline{A}$ se denomina ***suceso imposible*** y se suele representar por F .

Todas las propiedades de las operaciones con los conjuntos son ciertas para las operaciones con sucesos. Así:

$i)\ \overline{\overline{\mathrm{A}}} = \mathrm{A}$

$ii)\ \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}},\ \ \overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}},$

$iii)\ \overline{\mathrm{E}} = \mathrm{F},\quad \overline{\mathrm{F}} = \mathrm{E}$

$\mathrm{iv})\ \ \mathrm{A} \cap \mathrm{E} = \mathrm{A},\ \ \mathrm{A} \cup \mathrm{F} = \mathrm{A}$

$\mathrm{v})\ \ \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C}),\ \ \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}),$

Dos sucesos A y B se dicen ***incompatibles*** si no pueden ocurrir a la vez, es decir si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{F}$

1.4.- Frecuencia de un suceso. Definición de probabilidad. Axiomas y consecuencias.

Si n_A es el número de veces que ocurre el suceso A al realizar n veces un experimento aleatorio, se define la frecuencia relativa del suceso A como sigue:

$$f_r(A) = \frac{n_A}{n}$$

Observar:

i) Como $0 \le n_A \le n \Rightarrow 0 \le f_r(A) \le 1$.

ii) Si A = E $\Rightarrow f_r(\mathrm{E}) = 1$.

iii) Si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{F} \Rightarrow n_{A \cup B} = n_A + n_B$, por lo que

$$f_r(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = f_r(A) + f_r(B)\ .$$

Este resultado puede generalizarse fácilmente a n sucesos $A_1, A_2, \ \dots\ , A_n$ incompatibles dos a dos como sigue.

$$f_r(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} f_r(A_i)$$

<u>Probabilidad.</u>

La experiencia muestra que la mayoría de los sucesos presentan una ***regularidad estadística***. Esto significa que si un experimento aleatorio se repite en idénticas condiciones muchas veces las frecuencias relativas de un determinado suceso tienden a estabilizarse. Por ejemplo, las frecuencias relativas del suceso “obtener cara “ al lanzar una moneda en varias tandas, constituida cada una de las tandas por un gran número de lanzamientos, irían tomando valores próximos a un medio. En cierto modo, las cosas ocurren como si existiera $\lim_{n\to\infty} f_r(A)$.

Esto nos lleva a postular la existencia de un número al que llamaremos ***probabilidad del suceso* A** y designaremos por **P(A)** y tal que en un gran número de pruebas de un experimento aleatorio su valor queda próximo a $f_r(A)$.

Vamos a considerar una aplicación P que a cada suceso de un espacio muestral le asocia un número real positivo. Diremos que P define una probabilidad si verifica los siguientes axiomas:

i) $P(A) \geq 0$ para todo suceso A del espacio muestral.
ii) $P(E) = 1$
iii) Si $A \cap B = F \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Consecuencias de la definición.

i) Para todo suceso A del espacio muestral se verifica que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
ii) En consecuencia $P(\phi) = 1 - P(E) = 0$.

iii) Para todo suceso A se tiene $0 \leq P(A) \leq 1$.
iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
v) Si $A \subset B$ resulta $P(A) \leq P(B)$.
vi) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles dos a dos

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Para el cálculo efectivo de la probabilidad de un suceso se utilizará la regla de Laplace .

$$\mathbf{P(A) = \frac{n^o \text{ de casos favorables}}{n^o \text{ de casos posibles}}}$$

Supongamos que el suceso seguro pude expresarse como la unión de un número finito de sucesos elementales incompatibles dos a dos $E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$ y que un suceso A es la unión de r sucesos elementales, es decir $A = E_{j1} \cup E_{j2} \cup \ldots \cup E_{jr}$

$$P(E) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i) \qquad y \qquad P(A) = P(E_{j1}) + P(E_{j2}) + \ldots + P(E_{jr})$$

Si los sucesos elementales son igualmente probables

$P(E) = 1 = m\, P(E_i)$ con lo que $P(E_i) = \frac{1}{m} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m$.

Luego $P(A) = \frac{r}{m}$

EJEMPLO I: En una clase hay 16 niños y 24 niñas, de los cuales la mitad de los niños y la mitad de las niñas tienen el pelo negro. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un alumno al azar sea niño o tenga el pelo negro?

A = " El alumno elegido es niño". P(A) = 16/40
B = " El alumno elegido tiene el pelo negro". P(B) =1/2
$A \cup B$ = " El alumno elegido es niño o tiene el pelo negro".
$A \cap B$ = " El alumno elegido es un niño con el pelo moreno"
$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B) = 16/40+1/2-8/40 = 28/40$

EJEMPLO II: Se lanzan al aire dos monedas y se consideran los siguientes sucesos.
A = “Sacar cara en la primera moneda”
B = “ Sacar cara en la segunda”
C = “ Sacar cara en una moneda solamente”

i)Escribir el espacio muestral y calcular la probabilidad de los sucesos elementales.
ii) Calcular $P(A\cup B\cup C)$

$E = \{ cc, c+, +c, ++ \}$. $P(cc)=P(c+)=P(+c)=P(++)=1/4$.

$A=\{cc\}\cup\{c+\}$, $P(A)=1/2$. $B = \{+c\}\cup\{cc\}$, $P(B)=1/2$. $C=\{c+\}\cup\{+c\}$, $P(C)=1/2$

$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B \cap C)=$
$=3/2-3/4= 3/4$

1.5.- Probabilidad condicionada. Propiedades.

Es frecuente tener que calcular la probabilidad de un suceso B cuando se conoce que previamente ha ocurrido un suceso A. Tal probabilidad se denomina probabilidad de B condicionada a A, se designa P(B/A) y se define como sigue:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Es fácil comprobar que:

i) $P(B/A) \geq 0$.
ii) $P(E/A)=\frac{P(E\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$
iii) Si C y D son sucesos incompatibles,
$$P(C\cup D/A)=\frac{P((C\cup D)\cap A)}{P(A)}=\frac{P((C\cap A)\cup(D\cap A))}{P(A)}=\frac{P(C\cap A)+P(D\cap A)}{P(A)}=$$
$=P(C/A) + P(D/A)$.

EJEMPLO I: En el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado y anotar el número de puntos de la cara que aparece se pide.

i) Espacio de los sucesos elementales.
ii) Probabilidad del suceso A =" obtener un dos".
iii) Probabilidad de obtener un dos si se sabe que el número obtenido es par.

$P(A) =1/6$
B =" El número obtenido es par" . $P(B) = 1/3$
$P(A/B)=1/3$

EJEMPLO II: Admitiendo que en cada nacimiento simple existe la misma probabilidad 1/2 de que el nacido sea niño o niña, hallar la probabilidad de que en una familia los dos hijos sean varones si se sabe:

i) El hijo mayor es un niño.
ii) Por lo menos uno de los hijos es niño.

Sea N_i = " El i-ésimo nacido es un niño".

$$P(N_1 \cap N_2 / N_1)\ \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$P(N_1 \cap N_2\ / N_1 \cup N_2) = \frac{P((N_1 \cap N_2) \cap (N_1 \cup N_2))}{P(N_1 \cup N_2)} = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_1 \cup N_2)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

EJEMPLO III. En una urna hay 4 bolas blancas y 2 rojas. Se extraen dos bolas consecutivamente sin devolución. Si la primera bola es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea también blanca?

B_1= " La primera bola es blanca". B_2=" La segunda bola es blanca". $B_1 \cap B_2$= " Las dos bolas son blancas".

$$P(B_1)=4/6,\ \ P(B_1 \cap B_2)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$P(B_2 / B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{3}{5}$$

Teorema de la probabilidad compuesta.

Dados n sucesos cualesquiera A_1, A_2, ... , A_n pero tales que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})>0$, se tiene que

$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2/ A_1)\, P(A_3/ A_1 \cap A_n)\ \ldots P(A_n/ A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

1.6.- Sucesos independientes.

Dados los sucesos A y B del mismo espacio muestral se dice que B es independiente de A si $P(B/A) = P(B)$.

Propiedades.

i) Si B es independiente de A , $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.

ii) Si B es independiente de A, entonces A es independiente de B. A y B independientes si y sólo si, $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.

iii) Si A y B son independientes también son independientes A y $\overline{B}$, B y $\overline{A}$, $\overline{A}$ y $\overline{B}$

Tres sucesos A, B y C se dicen independientes cuando se cumple

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B), \qquad P(A \cap C) = P(A)\, P(C), \qquad P(B \cap C) = P(B)\, P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C).$$

EJEMPLO I : Analizar la independencia de los siguientes sucesos.

i) A = " El número de puntos que aparece en la cara del dada es menor o igual que 5".

ii) B = " El número de puntos que aparece en la cara del dado es par".

$$P(A) = 5/6 \qquad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

1.7.- Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes.

Teorema de la Probabilidad Total

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sucesos tales que:

$i)\quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$

$ii)\quad A_i \cap A_j = F \qquad \forall i \neq j$

$iii)\quad P(A_i) > 0$

Cualquiera que sea el suceso $B \Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)$

Demostración.

$$B = B \cap E = B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B). \quad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)$$

EJEMPLO I: En una facultad el 4% de los hombres y el 1% de las mujeres miden mas de 1m 80cm. Además el 60% de los estudiantes son mujeres. Se elige al azar un estudiante. ¿ Cuál es la probabilidad de que mida mas de 1m 80cm?

H = " El estudiante elegido es hombre". M = " El estudiante elegido es mujer".
B =" El estudiante elegido mide mas de 1m 80cm."

P(B) = P(B / H) P(H) + P(B / M) P(M)= 0.016+0.006=0.022

Teorema de Bayes.

En las mismas hipótesis del teorema anterior se verifica que:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

Demostración.

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

EJEMPLO II.
En el ejemplo anterior la probabilidad de que un alumno de mas de 1m 80cm sea mujer es

$$P(M / B) = \frac{P(B/M)P(M)}{P(B)} = \frac{0.006}{0.022} = 0.27$$