Puesto que hay 3 cuartos de taza de azúcar, tenemos

$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

tazas de azúcar en total.

Observe que

$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

De manera similar,

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 5} = \frac{8}{45}$$

Tenga en cuenta que $4 \cdot 2$ significa también 4×2 y $9 \cdot 5$ significa 9×5. Los números que se están multiplicando se denominan **factores.**

A continuación se cita la regla general para la multiplicación de fracciones.

REGLA

Multiplicación de fracciones

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

EJEMPLO 5 Multiplicación de fracciones

Multiplique: $\frac{9}{5} \cdot \frac{3}{4}$

SOLUCIÓN Utilicemos la regla para multiplicación de fracciones.

$$\frac{9}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{27}{20}$$ ■

Cuando multiplicamos fracciones, podemos ahorrar tiempo si *antes* separamos o extraemos los factores comunes. Por ejemplo.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

Es más rápido si escribimos

$$\frac{2}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{7} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$ Esto puede hacerse porque $\frac{5}{5} = 1$.

¡PRECAUCIÓN! Solamente los factores que sean comunes tanto al numerador como al denominador pueden extraerse.

La fotografía muestra un cuarto de dólar más otros 2, lo que es igual a 3 cuartos. En símbolos,

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1+2}{4}=\frac{3}{4}$$

En general, para sumar fracciones con el *mismo* denominador, sumamos los numeradores y conservamos el denominador.

REGLA

Suma de fracciones con el mismo denominador

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}$$

y

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3+1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

NOTA En la última suma redujimos $\frac{4}{8}$ a $\frac{1}{2}$ al dividir el numerador y el denominador entre 4. Los resultados que comprenden fracciones siempre se reducen a su mínima expresión.

Ahora suponga que desea sumar $\frac{5}{12}$ y $\frac{1}{18}$. Puesto que estas dos fracciones no tienen los mismos denominadores, nuestra regla no funciona. Para sumarlos, debemos aprender a escribir $\frac{5}{12}$ y $\frac{1}{18}$ como fracciones equivalentes con el mismo denominador. Para mantener simples las cosas, también deberíamos reducir el denominador tanto como sea posible; es decir, primero deberíamos hallar el **mínimo común denominador (MCD)** de las fracciones.

El MCD de las dos fracciones es el **mínimo** (*más pequeño*) **común múltiplo (MCM)** de sus denominadores. Esto significa que para encontrar el MCD de $\frac{5}{12}$ y $\frac{1}{18}$, debemos hallar el MCM de 12 y de 18. Existen varias maneras de hacer esto. Una es seleccionar el mayor número (18) y encontrar sus múltiplos. El primer múltiplo de 18 es $2 \cdot 18 = 36$, y el 12 divide a 36. De este modo, 36 es el MCD de 12 y 18.

Desafortunadamente, este método no es práctico en álgebra. Un método más conveniente consiste en escribir los denominadores 12 y 18 en forma completamente *factorizada*. Si escribimos 12 como $2 \cdot 6$, y, a su vez, $6 = 2 \cdot 3$, entonces

$$12 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 3$$

De manera similar,

$$18 = 2 \cdot 9, \quad \text{o} \quad 2 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{3}$$

Esto indica que el menor número que es múltiplo de 12 y 18 debe tener al menos **dos 2** (hay dos 2 en 12) y **dos 3** (hay dos 3 en 18). Por lo tanto, el MCD de $\frac{5}{12}$ y $\frac{1}{18}$ es

$$\underbrace{\mathbf{2} \cdot \mathbf{2}}_{\text{Dos 2}} \cdot \underbrace{\mathbf{3} \cdot \mathbf{3}}_{\text{Dos 3}} = 36$$

Afortunadamente, hay una manera aún más corta de hallar el MCM de 12 y 18. Observe que deseamos encontrar los factores *comunes* en 12 y 18, así que podemos dividir 12 y 18 entre el menor divisor común para ambos números (2), luego el siguiente (3), etc. Si multiplicamos estos divisores por el cociente final, el resultado es el MCM. Aquí tenemos la versión abreviada:

$$\begin{array}{lrrr} \text{Se divide entre } \mathbf{2}. & 2) & 12 & 18 \\ \text{Se divide entre } \mathbf{3}. & 3) & 6 & 9 \\ & & 2 & 3 \longrightarrow \text{Multiplique } \mathbf{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3}. \end{array}$$

El MCM es $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

En general, usamos el siguiente procedimiento para encontrar el MCD de dos fracciones.

PROCEDIMIENTO

Determinación del MCD de dos fracciones

1. Escriba los denominadores en un renglón y divida cada número entre un *divisor* común para ambos números.
2. Continúe el proceso hasta que los cocientes resultantes no tengan divisor común (excepto 1).
3. El producto de los *divisores* y los *cocientes finales* es el MCD.

Ahora que sabemos que el MCD de $\frac{5}{12}$ y $\frac{1}{18}$ es 36, podemos sumar las dos fracciones escribiendo cada una como una fracción equivalente con un denominador de 36. Para esto multiplicamos el numerador y el denominador de $\frac{5}{12}$ por 3 y los de $\frac{1}{18}$ por 2. De este modo obtenemos

$$\begin{array}{lcr} \dfrac{5}{12} = \dfrac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \dfrac{15}{36} & \longrightarrow & \dfrac{15}{36} \\ \dfrac{1}{18} = \dfrac{1 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \dfrac{2}{36} & \longrightarrow & +\ \dfrac{2}{36} \\ \hline & & \dfrac{17}{36} \end{array}$$

También puede escribir los resultados como

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{18} = \frac{15}{36} + \frac{2}{36} = \frac{15 + 2}{36} = \frac{17}{36}$$

EJEMPLO 10 Suma de fracciones con denominadores diferentes

Sume: $\dfrac{1}{20} + 1\dfrac{1}{18}$

SOLUCIÓN Primero encontramos el MCM de 20 y 18.

Se divide entre **2**. $2\,)\,\underline{20 \quad 18}$
$\quad\quad 10 — 9 \longrightarrow$ Multiplique **2**

Puesto que no hay otro divisor para 10 y 9, el MCM es

$$\mathbf{2} \cdot \mathbf{10} \cdot \mathbf{9} = 180$$

(Usted también podría hallar el MCM escribiendo $20 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{5}$ y $18 = 2 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{3}$; el MCM es $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$.)

Ahora, escriba las fracciones con un denominador de 180 y sume.

$$\frac{1}{20} = \frac{1 \cdot \mathbf{9}}{20 \cdot \mathbf{9}} = \frac{9}{180} \longrightarrow \quad \frac{9}{180}$$

$$1\frac{1}{18} = \frac{19}{18} = \frac{19 \cdot \mathbf{10}}{18 \cdot \mathbf{10}} = \frac{\mathbf{190}}{\mathbf{180}} \longrightarrow + \quad \frac{190}{180}$$

$$\frac{199}{180}$$

Si lo prefiere, puede escribir el procedimiento como sigue:

$$\frac{1}{20} + 1\frac{1}{18} = \frac{9}{180} + \frac{190}{180} = \frac{199}{180}, \quad \text{o} \quad 1\frac{19}{180} \qquad \blacksquare$$

¿Podemos utilizar el mismo procedimiento para sumar tres o más fracciones? Sí, pero necesitamos saber cómo encontrar el MCD para tres o más fracciones. El procedimiento es muy similar al empleado para hallar el MCM de dos números. Si escribimos 15, 21 y 28 en forma factorizada,

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$21 = 3 \cdot 7$$

$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$$

vemos que el MCM debe contener al menos $2 \cdot 2$, 3, 5 y 7. (Observe que seleccionamos cada factor el mayor número de veces que aparece en cualquier factorización.) De este modo, el MCM de 15, 21 y 28 es $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

También podemos utilizar el procedimiento abreviado.

PROCEDIMIENTO

1. Divida entre 3. 15 21 28 |3
2. Divida entre 7. 5 7 28 |7
   5 1 4

   Multiplique $3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 4$.
3. El MCD es $3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 4 = 420$.

Determinación del MCD de tres o más fracciones

1. Escriba los denominadores en un renglón y divida los números entre un divisor común para dos o más de los números. Si alguno de los otros números no es divisible entre este divisor, *enciérrelo* y traspáselo a la siguiente línea.
2. Repita el paso 1 con los cocientes y traspasos hasta que *ningún par de números* tenga un divisor común (excepto 1).
3. El MCD es el *producto* de los divisores de los pasos precedentes y los números en el renglón final.

Así, para sumar

$$\frac{1}{16}+\frac{3}{10}+\frac{1}{28}$$

primero hallamos el MCD de 16, 10 y 28. Podemos emplear cualquier método.

MÉTODO 1

Encuentre el MCD escribiendo

$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$
$$10 = 2 \cdot 5$$
$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$$

y seleccionando cada factor el *mayor* número de veces que aparece en cualquier factorización. Puesto que el 2 aparece **cuatro** veces y 5 y 7 sólo **una** vez, el MCD es

$$\underbrace{\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2}}_{\text{cuatro veces}} \cdot \underbrace{5}_{\text{una vez}} \cdot \underbrace{7} = 560$$

MÉTODO 2

Utilice el procedimiento de tres pasos.

PASO 1 Divida entre **2.** 16 10 28 |2

PASO 2 Divida entre **2.** 8 5 14 |2
4 5 7
Multiplique **2** · **2** · **4** · **5** · **7**.

PASO 3 El MCD es
$2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 560$.

Entonces escribimos $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{28}$ con un denominador de 560.

$$\frac{1}{16}=\frac{1\cdot \mathbf{35}}{16\cdot \mathbf{35}}=\frac{35}{560} \longrightarrow \frac{35}{560}$$
$$\frac{3}{10}=\frac{3\cdot \mathbf{56}}{10\cdot \mathbf{56}}=\frac{168}{560} \longrightarrow +\frac{168}{560}$$
$$\frac{1}{28}=\frac{1\cdot \mathbf{20}}{28\cdot \mathbf{20}}=\frac{20}{560} \longrightarrow +\frac{20}{560}$$
$$\overline{\frac{223}{560}}$$

O, si lo prefiere,

$$\frac{1}{16}+\frac{3}{10}+\frac{1}{28}=\frac{35}{560}+\frac{168}{560}+\frac{20}{560}=\frac{223}{560}$$

NOTA El método 1 para hallar el MCD es preferible porque está más generalizado para fracciones algebraicas.

Ahora que ya sabe cómo sumar fracciones, la *resta* no es problema. ¡Todas las reglas que hemos mencionado también se aplican! Por ejemplo, restamos fracciones con el mismo denominador como se ilustra a continuación.

$$\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{5-2}{8}=\frac{3}{8}$$

$$\frac{7}{9}-\frac{1}{9}=\frac{7-1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

El siguiente ejemplo muestra cómo restar fracciones que comprenden denominadores *diferentes*.

EJEMPLO 11 Resta de fracciones con denominadores diferentes

Reste: $\frac{7}{12} - \frac{1}{18}$

SOLUCIÓN Primero hallamos el MCD de las fracciones.

MÉTODO 1

Escriba

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

El MCD es $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

MÉTODO 2

PASO 1 12 18 |2

PASO 2 6 9 |3
2 3

PASO 3 El MCD es
$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

Entonces escribimos cada fracción con el 36 como denominador.

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot \mathbf{3}}{12 \cdot \mathbf{3}} = \frac{21}{36} \quad \text{y} \quad \frac{1}{18} = \frac{1 \cdot \mathbf{2}}{18 \cdot \mathbf{2}} = \frac{2}{36}$$

Por lo tanto,

$$\frac{7}{12} - \frac{1}{18} = \frac{21}{36} - \frac{2}{36} = \frac{21 - 2}{36} = \frac{19}{36}$$

■

Las reglas para sumar fracciones también se aplican a la resta. Si intervienen números mixtos, podemos emplear la resta horizontal o vertical según se ilustra a continuación.

EJEMPLO 12 Resta de números mixtos

Reste: $3\frac{1}{6} - 2\frac{5}{8}$

SOLUCIÓN *Resta horizontal.* Primero encontramos el MCM de 6 y 8, el cual es 24. Después convertimos los números mixtos en fracciones impropias.

$$3\frac{1}{6} = \frac{19}{6} \quad \text{y} \quad 2\frac{5}{8} = \frac{21}{8}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} 3\frac{1}{6} - 2\frac{5}{8} &= \frac{19}{6} - \frac{21}{8} \\ &= \frac{19 \cdot \mathbf{4}}{6 \cdot \mathbf{4}} - \frac{21 \cdot \mathbf{3}}{8 \cdot \mathbf{3}} \\ &= \frac{76}{24} - \frac{63}{24} \\ &= \frac{13}{24} \end{aligned}$$

Resta vertical. Algunos estudiantes prefieren restar números mixtos colocándolos en una columna:

$$\begin{array}{r} 3\frac{1}{6} \\ -2\frac{5}{8} \\ \hline \end{array}$$

La parte fraccional se resta primero, seguida de la parte del número entero. Por desgracia, $\frac{5}{8}$ no puede restarse de $\frac{1}{6}$ por ahora, de modo que escribimos $1 = \frac{6}{6}$ y planteamos el problema como

$$\begin{array}{r} 2\frac{7}{6} \\ -2\frac{5}{8} \\ \hline \end{array} \qquad \mathbf{3\frac{1}{6} = 2 + \frac{6}{6} + \frac{1}{6} = 2\frac{7}{6}}$$

Puesto que el MCM es 24, volvemos a escribir $\frac{7}{6}$ y $\frac{5}{8}$ con el 24 como sus denominadores.

$$\begin{array}{rr} -2\frac{7 \cdot \mathbf{4}}{6 \cdot \mathbf{4}} = & 2\frac{28}{24} \\ -2\frac{5 \cdot \mathbf{3}}{8 \cdot \mathbf{3}} = & 2\frac{15}{24} \\ \hline & \frac{13}{24} \end{array}$$

El procedimiento completo puede resumirse de esta forma:

$$\begin{array}{rcrcr} 3\frac{1}{6} & & 2\frac{7}{6} & & 2\frac{28}{24} \\ & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\ -2\frac{5}{8} & & -2\frac{5}{8} & & -2\frac{15}{24} \\ \hline & & & & \frac{13}{24} \end{array}$$

Por supuesto, la respuesta es la misma que antes. ■

Ahora podemos resolver un problema que abarque tanto la suma como la resta de fracciones.

EJEMPLO 13 Suma y resta de fracciones

Realice las operaciones indicadas: $1\frac{1}{10} + \frac{5}{21} - \frac{3}{28}$

SOLUCIÓN Escribimos primero $1\frac{1}{10}$ como $\frac{11}{10}$ y después hallamos el MCM de 10, 21 y 28. (Utilice cualquier método.)

MÉTODO 1

$$10 = 2 \cdot 5$$
$$21 = 3 \cdot 7$$
$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$$

El MCD es $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

MÉTODO 2

PASO 1 $\quad 10 \;\; 21 \;\; 28 \;|\underline{2}$

PASO 2 $\quad 5 \;\; 21 \;\; 14 \;|\underline{7}$

$\quad\quad\quad\;\; \mathbf{5} \;\; \mathbf{3} \;\; \mathbf{2}$

PASO 3 El MCD es $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 420$.

Ahora

$$1\frac{1}{10} = \frac{11}{10} = \frac{11 \cdot \mathbf{42}}{10 \cdot \mathbf{42}} = \frac{462}{420} \longrightarrow \frac{462}{420}$$

$$\frac{5}{21} = \frac{5 \cdot \mathbf{20}}{21 \cdot \mathbf{20}} = \frac{100}{420} \longrightarrow + \frac{100}{420}$$

$$\frac{3}{28} = \frac{3 \cdot \mathbf{15}}{28 \cdot \mathbf{15}} = \frac{45}{420} \longrightarrow - \frac{45}{420}$$

$$\frac{517}{420}$$

Horizontalmente, tenemos que

$$1\frac{1}{10} + \frac{5}{21} - \frac{3}{28} = \frac{462}{420} + \frac{100}{420} - \frac{45}{420}$$
$$= \frac{462 + 100 - 45}{420}$$
$$= \frac{517}{420}$$

■

EJERCICIO R.1

A **Escriba el número dado como una fracción con un denominador de 1.**

1. 28 2. 93 3. -42 4. -86

5. 0 6. 1 7. -1 8. -17

B **Encuentre el número perdido.**

9. $\frac{1}{8} = \frac{?}{24}$ 10. $\frac{7}{1} = \frac{?}{2}$ 11. $\frac{7}{1} = \frac{?}{6}$

12. $\frac{5}{6} = \frac{?}{48}$ 13. $\frac{5}{3} = \frac{?}{15}$ 14. $\frac{9}{8} = \frac{?}{32}$

15. $\frac{7}{11} = \frac{?}{33}$ 16. $\frac{11}{7} = \frac{?}{35}$ 17. $\frac{1}{8} = \frac{4}{?}$

18. $\frac{3}{5} = \frac{27}{?}$ 19. $\frac{5}{6} = \frac{5}{?}$ 20. $\frac{9}{10} = \frac{9}{?}$

21. $\frac{8}{7} = \frac{16}{?}$ 22. $\frac{9}{5} = \frac{36}{?}$ 23. $\frac{6}{5} = \frac{36}{?}$

24. $\frac{5}{3} = \frac{45}{?}$ 25. $\frac{21}{56} = \frac{?}{8}$ 26. $\frac{12}{18} = \frac{?}{3}$

27. $\frac{36}{180} = \frac{?}{5}$ 28. $\frac{8}{24} = \frac{4}{?}$

29. $\frac{18}{12} = \frac{3}{?}$ 30. $\frac{56}{21} = \frac{8}{?}$