Annexe A

Pseudo-inverse d'une matrice diagonale

Admettons que l'on cherche à résoudre un système d'équation tel que :

$$A \cdot p = D_0, \tag{A.1}$$

Si la matrice A est inversible, la solution p s'obtient aisément :

$$p = A^{-1} \cdot D_0. \tag{A.2}$$

Dans le cas où le système est surdimensionné, on sait résoudre en utilisant la méthode des moindres carrés. Cette méthode consiste à projeter D_0 sur l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A. Ainsi $A^T D_0$ est la solution la plus proche possible de D_0, au sens des moindres carrés :

$$A^T A \cdot p = A^T D_0, \tag{A.3}$$

$$p = \left(A^T A\right)^{-1} \cdot A^T D_0. \tag{A.4}$$

Cette méthode s'applique uniquement si $A^T A$ est inversible. Dans le cas contraire, il faut distinguer les deux problèmes qui peuvent intervenir :

1. Les lignes de A sont dépendantes
2. Les colonnes de A sont dépendantes

Si les lignes de A sont dépendantes, on définit la projection de D_0 sur les colonnes de A :

$$D_A = proj_A(D_0) \tag{A.5}$$

autrement dit (a_j est la j^{e} colonne de A) :

$$D_A = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\langle a_j \mid D_0 \rangle}{\| a_j \|} a_j \right) \tag{A.6}$$

On résout le système dont on sait qu'il possède au moins une solution :

$$A\bar{p} = D_A \tag{A.7}$$

Si les colonnes de A sont dépendantes, il existe une infinité de solution $\bar{p}$. On peut écrire, $\bar{p} = p^+ + p_0$, où p_0 appartient au noyau (Ker) de A. On définit p^+ comme étant le vecteur poids de longueur minimale satisfaisant l'équation :

$$Ap^+ = D_A \tag{A.8}$$

Le terme de pseudo-inverse désigne la matrice qui permettra de calculer p^+ à partir de D_0. Pour illustrer cette notion de pseudo-inverse, prenons le cas d'une matrice diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

Le système à résoudre n'a pas de solution en général. On projette D_0 sur les colonnes de A pour obtenir D_A :

$$D_A = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il suffit de résoudre le système suivant dont on sait qu'il possède au moins une solution (et même une infinité de solutions) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_1 \bar{p}_1 &= d_1 \\ \sigma_2 \bar{p}_2 &= d_2 \\ 0 \bar{p}_3 &= 0 \\ 0 \bar{p}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Remarque : Comme les deux dernières lignes sont identiques $0 \cdot \bar{p}_3 = 0$, on n'en retient qu'une.

Le choix de $\bar{p}_3$ est libre. Or, par définition de $\bar{p}$, on exige que la norme $\| \bar{p} \|$ soit minimale. On choisit $\bar{p}_3 = 0$. Finalement p^+ (minimal) se calcule par :

$$p^+ = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{\sigma_1} \\ \frac{d_2}{\sigma_2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}.$$

La matrice pseudo-inverse A^+ de A est définie par :

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, p^+ se calcule effectivement à l'aide de D_0 et de la matrice pseudo-inverse A^+ :

$$p^+ = A^+ \cdot D_0. \tag{A.9}$$

En se basant sur cet exemple, on peut définir A^+ d'une manière un peu plus générale. La matrice A est $m \times n$ avec r valeurs σ_i sur la diagonale. Sa pseudo-inverse A^+ est $n \times m$ avec r valeurs $\frac{1}{\sigma_i}$ sur la diagonale. Tous les espaces sont remplis par des 0.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ alors } A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \text{ et } p^+ = A^+ \cdot D_0.$$

Il reste à considérer le cas général où A n'est pas diagonale. C'est ici qu'intervient la décomposition en valeurs singulières (voir page 29).