

Innere Produkte:

$$\begin{aligned} \text{Standardbeispiele: } \quad \mathbb{R} : \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \langle x, y \rangle &= {}^t x \cdot 1 \cdot y \\ \mathbb{C} : \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \\ \langle x, y \rangle &= {}^t x \bar{y} = {}^t x \cdot 1 \cdot \bar{y} \end{aligned}$$

Ist $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} < \infty$ und $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ inneres Produkt.

Nach dem Satz über die Diagonalisierung hermitescher Formen §6 Satz 2 gibt es eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{V}$, so dass die Darstellungsmatrix von g die

Einheitsmatrix ist, denn σ ist positiv definit, d.h.

$$\sigma(v_i, v_j) = \delta_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{Identifizieren wir } \quad \mathbb{K}^n &\xrightarrow{\sim} \mathbb{V} \\ e_i &\mapsto v_i \end{aligned}$$

so wird aus σ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{K}^n$.

$$\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{V} \times \mathbb{V} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{K}$$

$$(e_i, e_j) \mapsto (v_i, v_j) \rightarrow \delta_{ij}$$

$$(x, y) \mapsto \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{y}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = {}^t x \bar{y} = \langle x, y \rangle$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n y_i e_i$$

Folgerung: Ein inneres Produkt auf einen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist die koordinatenfrei (basisfreie) Version des euklidischen bzw. hermiteschen Skalarprodukts.

Ist σ inneres Produkt auf $\mathbb{V}$, so definiert man die zugehörige Norm:

$$\|\cdot\|_{\sigma} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|v\|_{\sigma} : \sqrt{\underbrace{\sigma(v, v)}_{\text{positive reelle Zahl}}}$$

Dann gilt:

- a) $\|c \cdot v\|_{\sigma} = |c| \|v\|_{\sigma}$
- b) $\|v\|_{\sigma} \geq 0$
- c) $\|v\|_{\sigma} = 0 \iff v = 0$
- d) $|\sigma(v, w)| \leq \|v\|_{\sigma} \cdot \|w\|_{\sigma}$ - Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung
- e) $\|v + w\|_{\sigma} \leq \|v\|_{\sigma} + \|w\|_{\sigma}$ - Dreiecksungleichung

Bezeichnungen:

- euklidischer Raum $(V, \sigma) = \mathbb{R}$ -Vektorraum V mit innerem Produkt σ
- unitärer Raum $(V, \sigma) = \mathbb{C}$ -Vektorraum V mit innerem Produkt σ
- Metrik = Abstandsfunktion (z.B. $(x, y) \mapsto \|x - y\|_\sigma$)
- Isometrie = lineare Abbildung, welche σ enthält
 - § Orthogonale Abbildungen = Isometrie für $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n \Rightarrow O_n(\mathbb{R})$
 - § Unitäre Abbildung = Isometrie für $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{C}^n \Rightarrow U_n(\mathbb{C})$
- Orthogonalsystem = Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$ mit $\sigma(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j$
- Orthonormalsystem = Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$ mit $\sigma(v_i, v_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j$

Proposition 1: Ein Orthonormalsystem ist immer linear unabhängig.

Beweis: Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Orthonormalsystem

Annahme: $\sum_{i=1}^k c_i v_i = 0$

$$0 = \sigma\left(\left(\sum_{i=1}^k c_i v_i\right), v_j\right) = \sum_{i=1}^k c_i \underbrace{\sigma(v_i, v_j)}_{\delta_{ij}} = c_j \quad \square$$

Satz 2: Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Orthonormalsystem, dann ist jeder Vektor v aus $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ eine endliche Linearkombination der v_i der Form

$$v = \sum_{\text{endlich}} \sigma(v, v_i) v_i$$

Beweis: Nach Definition gilt: $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \left\{ \sum_{\text{endlich}} c_i v_i \right\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v = \sum_{i=1}^k c_i v_i &\Rightarrow c_j = c_j \cdot \sigma(v_j, v_i) = \sum_{i=1}^k c_i \underbrace{\sigma(v_i, v_j)}_{\delta_{ij}} = \\ &\sigma\left(\left(\sum_{i=1}^k c_i v_i\right), v_j\right) = \sigma(v, v_j) \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung: Proposition 1 gilt auch für Orthogonalsystem, wenn $\text{char } \mathbb{K} = 0$, z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
 $c \cdot d = 0, \quad d \neq 0 \Rightarrow c = 0$

Satz 3: Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit innerem Produkt σ
 Für jeden endlich-dimensionalen Untervektorraum $U \subset V$ gilt:
 $V = U \oplus U^\perp$

Beweis: Da $\sigma > 0 \Rightarrow \sigma|_U = 0 \Rightarrow \sigma|_U$ nicht ausgeartet
 $\Rightarrow$ Wende §1 Satz 4 an $\Rightarrow$ Behauptung

Neuer Beweis: $(\mathbb{U}, \sigma/\mathbb{U})$ endlich-dimensionaler unitärer Raum

$$\Rightarrow \exists \text{ ONB: } u_1, \dots, u_r$$

$$\text{Sei } v \in \mathbb{V} \Rightarrow v_i = \sum_{i=1}^r \sigma(v, u_i) u_i \in \mathbb{U}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma(v - v_0, u_k) &= \sigma(v, u_k) - \sigma(v_0, u_k) \\ &= \sigma(v, u_k) - \sum_{i=1}^r \sigma(v, u_i) \cdot \underbrace{\sigma(u_i, u_k)}_{\delta_{ik}} \\ &= \sigma(v, u_k) - \sigma(v, u_k) = 0 \end{aligned}$$

Das gilt für $k = 1, \dots, r$

$$\Rightarrow \sigma(v - v_0, u) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{U}$$

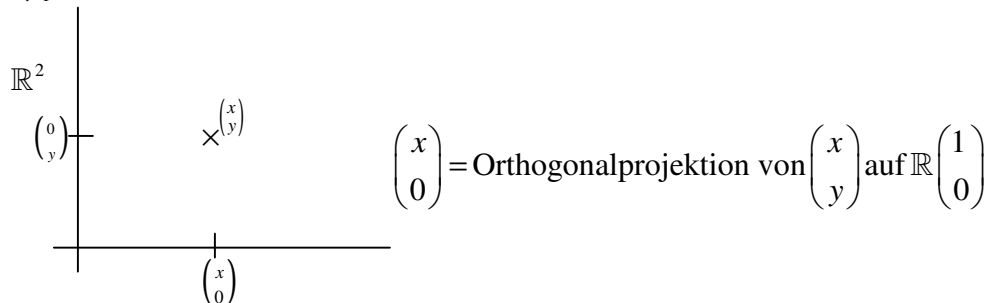
$$\Rightarrow v - v_0 \in \mathbb{U}^\perp$$

$$v = \underbrace{v_0}_{\in \mathbb{U}} + \underbrace{(v - v_0)}_{\in \mathbb{U}^\perp}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V} = \mathbb{U} + \mathbb{U}^\perp \quad \square$$

$$\text{Sei } u \in \mathbb{U} \cap \mathbb{U}^\perp \Rightarrow \sigma(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$$

Bemerkung: $v_0 = \sum_{i=1}^r \sigma(v, u_i) u_i \in \mathbb{U}$ ist orthogonale Projektion von v auf $\mathbb{U}$.

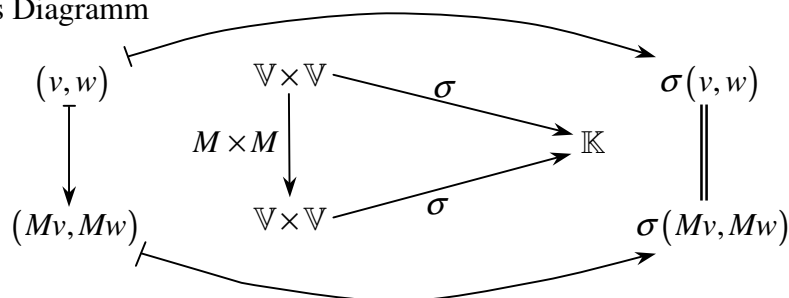


§ 9 Adjungierte Operatoren

Wiederholung: $(\mathbb{V}, \sigma)$ $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit innerem Produkt σ

$$M : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \text{ Isometrie, d.h. } \sigma(Mx, My) = \sigma(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{V}$$

Als Diagramm



Schreibe $\sigma(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$ als inneres Produkt

Definition: Seien $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_v)$ und $(\mathbb{W}, \langle \cdot, \cdot \rangle_w)$ $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit inneren Produkten

Sei $M : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineare Abbildung

Eine lineare Abbildung $M^* : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$ heißt **adjungiert** zu M , wenn:

$$\langle M(v), w \rangle_w = \langle v, M^*(w) \rangle_v \quad \forall v \in \mathbb{V}, w \in \mathbb{W}$$

Bezeichnung: M^* ist die Adjungierte (zu M)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} \times \mathbb{W} & \xrightarrow{M \times \text{id}_w} & \mathbb{W} \times \mathbb{W} \\ \text{id}_v \times M^* \downarrow & & \downarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_w \\ \mathbb{V} \times \mathbb{V} & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle_v} & \mathbb{K} \end{array}$$

Beispiele: 1) $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_n); \quad (\mathbb{W}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_m)$

$$M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

$$\langle Mx, y \rangle_m = {}^t(Mx)y = {}^tx({}^tMy) = \langle x, {}^tMy \rangle_n$$

$$\Rightarrow {}^tM : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist Adjungierte } M^* = {}^tM$$

2) $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_n), \quad (\mathbb{W}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (\mathbb{C}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_m)$

$$M : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m, \quad x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m$$

$$\langle Mx, y \rangle_m = {}^t(Mx)\bar{y} = {}^tx({}^tM\bar{y}) = {}^tx(\overline{{}^tMy}) = \langle x, {}^t\bar{My} \rangle_n$$

$$\Rightarrow {}^t\bar{M} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ ist adjungiert zu } M, M^* = {}^t\bar{M}$$

- Satz 1:**
- a) Die adjungierte Abbildung M^* einer linearen Abbildung $M : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ ist, falls sie existiert, eindeutig bestimmt
 - b) Sind $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ endlich dimensional, so existiert zu jeder linearen Abbildung M eine Adjungierte
 - c) Ist M^* adjungiert zu M , so ist auch M adjungiert zu M^* , d.h. $M^{**} = M$

Beweis: a) Sei $M : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ und $M^*, M^+ : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$ Adjungierte zu M

$$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{V}, w \in \mathbb{W} : \langle v, M^*w \rangle = \langle Mv, w \rangle = \langle v, M^+w \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle v, M^*w - M^+w \rangle = 0 \quad \forall v, w$$

$$\Leftrightarrow \langle v, (M^* - M^+)w \rangle = 0 \quad \forall v, w$$

$$\Leftrightarrow (M^* - M^+)w = 0 \quad \forall w \in \mathbb{W}$$

$$\Leftrightarrow M^* = M^+ \quad \Rightarrow \text{a)}$$

b) $\dim \mathbb{V} < \infty, \quad \dim \mathbb{W} < \infty$

$\Rightarrow \exists$ ONB von $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ bzgl. Welcher gilt:

$$(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_v) \simeq (\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_n)$$

$$(\mathbb{W}, \langle \cdot, \cdot \rangle_w) \simeq (\mathbb{K}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_m)$$

$$\Rightarrow M^* = \begin{cases} {}^t M & \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ {}^t \bar{M} & \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

c) Definition von M^* : $\langle Mv, w \rangle = \langle v, M^* w \rangle \quad \forall v, w$

Definition von M^{**} : $\langle M^* w, v \rangle = \langle w, M^{**} v \rangle \quad \forall v, w$

z.Z.: $\langle w, M^{**} v \rangle = \langle w, Mv \rangle \quad \forall v, w$

Aber: $\langle w, M^{**} v \rangle = \langle M^* w, v \rangle = \overline{\langle v, M^* w \rangle} = \overline{\langle Mv, w \rangle} = \langle w, Mv \rangle \quad \forall v, w$

$$\Rightarrow M^{**} = M \quad \square$$