

Anwendung: Das **Vektor- oder Kreuzprodukt**

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad M = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}; \quad M_{12} = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

$$v \times w := \begin{pmatrix} \det M_{23} \\ -\det M_{13} \\ \det M_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

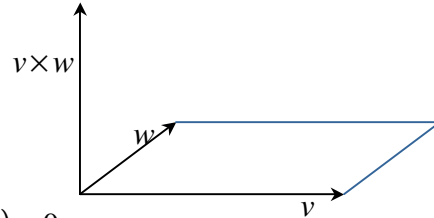
Das Vektorprodukt ist eine Abbildung

$$x: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (v, w) \mapsto v \times w$$

Eigenschaften des Vektorproduktes:

1. x ist alternierend: $v \times w = -w \times v$
2. x ist bilinear: $(a_1 v_1 + a_2 v_2) \times w = a_1 v_1 \times w + a_2 v_2 \times w$
(analog in zweite Variable w)
3. $\langle u, v \times w \rangle = \det(u, v, w)$ [[Matrix hat Spalten u, v, w]]
4. $v \times w = 0 \Rightarrow v, w$ linear abhängig
5. $\langle v_1 \times v_2, w_1 \times w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle \langle v_2, w_2 \rangle - \langle v_1, w_2 \rangle \langle v_2, w_1 \rangle$
6. $u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$
7. $\|v \times w\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot |\sin \angle(v, w)|$

Gegeben: $v, w \in \mathbb{R}^3$



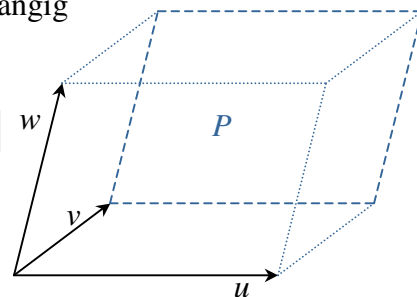
$\text{span}\{v, w\} = \text{Ebene}$

$$\langle v, v \times w \rangle = \det(u, v, w) = 0$$

$$\langle w, v \times w \rangle = 0$$

Gegeben: $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig

$$\text{Vol}(P) = |\langle u, v \times w \rangle| = |\det(u, v, w)|$$



§5 Die symplektische Gruppe

Die nicht ausgeartete alternierende Bilinearform

$$\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \text{ ist äquivalent zu } \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

Beispiel: $n = 3$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad {}^t M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_3 \\ -\mathbb{1}_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition: $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \text{Gl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid {}^t M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

heißt **symplektische Gruppe**.

Bemerkung: $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ ist eine Gruppe, Beweis wie bei den orthogonalen Gruppen.

$\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ ist die Gruppe aller Automorphismen $M : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, die die

alternierende Bilinearform $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto {}^t x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$ invariant läßt.

$M : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ heißt **symplektische Automorphismen**.

Satz 1: Sei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Gl}_{2n}(\mathbb{R})$ mit $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$

Dann sind äquivalent:

- a) $M \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$
- b) ${}^t M \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$
- c) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} {}^t M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- d) ${}^t A C, {}^t B D$ symmetrisch und ${}^t A D - {}^t C B = \mathbb{1}_n$

Beweis: Wir benutzen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{a)} \Rightarrow \text{b)} \quad M \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow {}^t M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow {}^t M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} {}^t M &= M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= M M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{a)} \Leftrightarrow \text{c)} \quad \text{a)} \Leftrightarrow {}^t M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} {}^t M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= M^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{a)} \Leftrightarrow \text{d)} \quad \text{a)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^t A & {}^t C \\ {}^t B & {}^t D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t A & {}^t C \\ {}^t B & {}^t D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} {}^t AC - {}^t CA & {}^t AD - {}^t CB \\ {}^t BC - {}^t DA & {}^t BD - {}^t DB \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow {}^t AC &= {}^t CA = {}^t ({}^t AC) \\ {}^t BD &= {}^t DB = {}^t ({}^t BD), \quad {}^t AD - {}^t CB = 1 \quad \square\end{aligned}$$

$$n = 1$$

$$\text{Sp}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \underbrace{ad - bc}_{\det} = 1 \right\} = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}$$

$$\text{Gl}_2(\mathbb{R}) = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det M \neq 0 \} \quad \text{allgemeine lineare Gruppe}$$

$$\text{Sl}_2(\mathbb{R}) = \{ M \in \text{Gl}_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \} \quad \text{spezielle lineare Gruppe}$$

$$\Rightarrow \text{Sl}_2(\mathbb{R}) = \text{Sp}_2(\mathbb{R}) \quad \text{Das ist ein Sonderfall!}$$

$$\text{für } n > 1 \Rightarrow \text{span}(\mathbb{R}) \neq \text{Sl}_{2n}(\mathbb{R}) = \{ M \in \text{Gl}_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}$$

$$\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R}), \text{Sl}_n(\mathbb{R}), \text{Gl}_n(\mathbb{R}) \text{ gehören zu den klassischen Gruppen.}$$

§6 Die symmetrische Gruppe

Sei $\mathbb{V}$ ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum

Definition: Eine lineare Abbildung $f: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **hermetisch**, wenn

- 1) φ im 1. Argument linear ist

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 \varphi(v_1, w) + \alpha_2 \varphi(v_2, w) \quad \forall v_1, v_2, w \in \mathbb{V}; \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$
- 2) $\forall v, w \in \mathbb{V}$ gilt:

$$\varphi(v, w) = \overline{\varphi(w, v)}$$

Bemerkung: Ist φ hermitesch, so ist φ im zweiten Argument $\mathbb{C}$ -antilinear

$$\text{d.h. } \varphi(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \bar{\alpha}_1 \varphi(v, w_1) + \bar{\alpha}_2 \varphi(v, w_2)$$

Beweis: $\varphi(v, \alpha w) = \overline{\varphi(\alpha w, v)} = \overline{\alpha \varphi(w, v)} = \bar{\alpha} \varphi(v, w) \quad \square$

Bemerkung: f hermitesch $\Rightarrow \varphi(v, v) \in \mathbb{R}$, denn $\varphi(v, v) = \overline{\varphi(v, v)}$

Standardbeispiel:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = {}^t x \bar{y}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist die hermitesche Fortsetzung des euklidischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$.

Allgemein: $\varphi: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ hermitesch

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ eine Basis

$$h_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$$

$\Rightarrow H = (h_{ij})$ Darstellungsmatrix von φ

Für $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i v_i \in \mathbb{V}$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{y}_j \varphi(v_i, v_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i h_{ij} \bar{y}_j = {}^t x \bar{y} \end{aligned}$$

Bemerkung: $h_{ij} = \varphi(v_j, v_i) = \overline{\varphi(v_i, v_j)} = \bar{h}_{ji}$

$$\Rightarrow {}^t H = \bar{H}$$

D.h. Die Darstellungsmatrix H einer hermiteschen Form erfüllt die Gleichung:

$${}^t H = \bar{H} \quad \Leftrightarrow \quad {}^t \bar{H} = H$$

Eine solche Matrix ist hermitesch.

Umgekehrt: Ist $H \in M_n(\mathbb{C})$ mit ${}^t \bar{H} = H$ so wird durch

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \rightarrow {}^t x H \bar{y}$$

eine hermitesche Form mit der Darstellungsmatrix H definiert.

Sei $H = (h_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$

$$\operatorname{Re} H = (\operatorname{Re} h_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\operatorname{Im} H = (\operatorname{Im} h_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow H = \operatorname{Re} H + i \operatorname{Im} H$$

$$H \text{ hermitesch} \Leftrightarrow {}^t (\overline{\operatorname{Re} H + i \operatorname{Im} H}) = \operatorname{Re} H + i \operatorname{Im} H$$

$${}^t (\operatorname{Re} H) + i {}^t (\operatorname{Im} H)$$

$$\Leftrightarrow {}^t \operatorname{Re} H = \operatorname{Re} H, \quad {}^t (\operatorname{Im} H) = \operatorname{Im} H$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} H \text{ symmetrisch} \\ \operatorname{Im} H \text{ alternierend} \end{array} \right\} \text{ insbesondere sind Diagonaleinträge} \in \mathbb{R}$$

d.h. h_{ij} ist reell

Bemerkung: Die hermiteschen Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$ bilden einen reellen Vektorraum der Dimensionen:

$$\underbrace{n + 2(1 + 2 + \dots + (n-1))}_{\substack{\# \text{ Diagonal-} \\ \text{einträge}}} = n + 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} n(n-1)}_{\substack{\text{Real- \& Imaginärteil} \\ \text{Oberhalb der Diagonalen}}} = n^2$$

Die hermiteschen Matrizen bilden keinen $\mathbb{C}$ -Vektorraum, denn:

H hermitesch $\Rightarrow$ i.A. iH ist nicht hermitesch