

## §4 Totale Differenzierbarkeit

In Analysis I §9 Satz 1:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar in  $x$

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$  und eine in  $x$  stetige Funktion  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\psi(x) = 0$ , so dass gilt:

$$f(x + \xi) = f(x) + c \cdot \xi + \psi(x + \xi) \cdot \xi$$

$\Leftrightarrow \exists$  lineare Abbildung  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und eine in einer Umgebung von 0 definierte Funktion  $\varphi$ , so dass gilt:

$$f(x + \xi) = f(x) + c \cdot \xi + \varphi(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{V} \quad \text{mit} \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|} = 0$$

Beweis:  $\varphi(\xi) := \psi(x + \xi) \cdot \xi$

$$\Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \psi(x + \xi) = \psi(x)$$

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  Abbildung

**Definition:**  $f$  in  $x \in U$  (total) differenzierbar

$\Leftrightarrow \exists$  eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und eine in einer Umgebung  $\mathbb{V}$  von 0 ( $\subset \mathbb{R}^n$ ) definierte Abbildung  $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt, so dass

$$f(x + \xi) = f(x) + A \cdot \xi + \varphi(\xi) \quad (\forall \xi \in \mathbb{V}) \quad \star$$

$$\text{mit} \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

Bzgl. der Standardbasen von  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  ist die Matrix  $A$  gegeben durch:

$$A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

$$\text{Ist } \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \text{ so ist } A\xi = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} \xi_j \end{pmatrix}_{i,j}$$

$$\text{Ist } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \text{ und } \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix} \text{ so besagt } \star$$

$$f_i(x + \xi) = f_i(x) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j + \varphi_i(\xi) \quad \forall i = 1, \dots, m$$

**Satz 1:** Äquivalent sind für  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^m, x \in U \subset \mathbb{R}^n$

1.  $f$  ist differenzierbar in  $x$
2.  $f_i$  ist differenzierbar in  $x \quad \forall i = 1, \dots, m$

Beispiel:  $C = (c_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch

$$q: \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, Cx \rangle \end{cases} := \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j$$

Behauptung:  $q$  ist differenzierbar mit  $x \in \mathbb{R}^n$

Beweis:

$$\begin{aligned} q(x + \xi) &= \langle x + \xi, C(x + \xi) \rangle \\ &= \langle x, Cx \rangle + \langle x, C\xi \rangle + \langle \xi, Cx \rangle + \langle \xi, C\xi \rangle \\ &= q(x) + \langle Cx, \xi \rangle + \langle Cx, \xi \rangle + q(\xi) \\ &= q(x) + a' \cdot \xi + \varphi(\xi) \end{aligned}$$

mit  $a := 2Cx$ ,  $\varphi(\xi) = q(\xi) = \langle \xi, C\xi \rangle$

wegen  $\|\varphi(\xi)\| = \|\langle \xi, C\xi \rangle\| \leq \|\xi\| \cdot \|C\xi\|$  - Schwartzsche Ungleichung

$$\begin{aligned} &\leq \|\xi\| \cdot \|C\| \cdot \|\xi\| \\ &\Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \|C\| \cdot \|\xi\| = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0 \end{aligned}$$

**Satz 2:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $x \in U$  differenzierbar

Also:  $f(x + \xi) = f(x) + A \cdot \xi + \varphi(\xi)$  mit  $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$

und  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$

Dann gilt:

- a)  $f$  stetig in  $x$
- b) Alle Komponenten von  $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  sind in  $x$  partiell

differenzierbar mit  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}$

Also:  $A$  ist gerade die Matrix der partiellen Ableitungen

Definition:  $Df := \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$  heißt das **Differential** der Abbildung  $f$

oder die **Jacobi-Matrix** von  $f$   
oder die **Funktionalmatrix** von  $f$

Beweis: a)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} A \cdot \xi = 0$  und  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi(\xi) = 0$

★  $\Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} f(x + \xi) = f(x) + 0 + 0 = f(x)$

b) Für  $i = 1, \dots, m$  ist  $f_i(x + \xi) = f_i(x) + \sum_{j=1}^m a_{ij} \xi_j + \varphi_i(\xi)$

$$\text{mit } \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + he_j) - f_i(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_{ij}h + \varphi_i(he_j)}{h} =$$

$$= a_{ij} + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(he_j)}{h}}_{=0} = a_{ij}$$

**Satz 3:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbar  
 $\Rightarrow f$  total differenzierbar

**Beweis:** Es genügt die Behauptung an einer beliebigen Stelle  $x \in U$  zu zeigen.  
 $U$  offen und  $\exists \delta > 0$ , so dass  $B(x, \delta) \subset U$

Sei  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  mit  $\|\xi\| < \delta$

Sei  $z^{(i)} := x + \sum_{v=1}^i \xi_v e_v$  für  $i = 0, \dots, n$

Also:  $z^{(0)} = x$   
 $z^{(n)} = x + \xi$

$z^{(i)}$  und  $z^{(i-1)}$  unterscheiden sich nur in der  $i$ -ten Komponente

MWS (für eine Variable)  $\Rightarrow \exists \theta \in (0, 1)$ , so dass

$$\frac{f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)})}{\xi^i - 0} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i)$$

$$\Rightarrow f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)}) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i) \xi_i$$

$$\Rightarrow f(x + \xi) - f(x) = \sum_{i=1}^n \left( f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)}) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i) \xi_i$$

Setzt man  $a_i = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ , so ist

$$f(x + \xi) = f(x) + \sum_{i=1}^n a_i \xi_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i) - a_i \right)}_{=: \varphi(\xi)} \cdot \xi_i$$

zu Zeigen:  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$

Da  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  stetig in  $x$ , gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i) \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = a_i \\ \Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i) - a_i \right) &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

**Korollar:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbar  
 $\Rightarrow f$  stetig

**Beweis:**  $f$  total differenzierbar  $\Rightarrow f$  stetig

Also:  $f$  stetig partiell differenzierbar  
 $\Rightarrow f$  total differenzierbar  
 $\Rightarrow f$  partiell differenzierbar

**Kurz:**  $f$  stetig differenzierbar  $\Leftrightarrow f$  stetig partiell differenzierbar

**Kettenregel:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen

$g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $f(V) \subset U$

Anmerkung:  $g$  ist in  $x \in U$  differenzierbar  
 $f$  ist in  $y = g(x)$  differenzierbar

$\Rightarrow f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  in  $x \in U$  differenzierbar und für ihr Differential gilt:

$$D(f \circ g) = D(f(g(x))) \cdot Dg(x)$$

**Beweis:** Sei  $A := Dg(x) = \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(x) \right)_{i,k}$ ,  $B := Df(x) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y) \right)_{ij}$

z.Z.:  $D(f \circ g)(x) = B \cdot A$

$g$  differenzierbar in  $x \Leftrightarrow g(x + \xi) = g(x) + A \cdot \xi + \varphi(\xi)$

$$\text{mit } \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

$f$  differenzierbar in  $y = g(x) \Leftrightarrow f(y + \eta) = f(y) + B\eta + \psi(\eta)$  ★

$$\text{mit } \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\psi(\eta)}{\|\eta\|} = 0$$

Insbesondere gilt:

$$\eta := g(x + \xi) - g(x) = A\xi + \varphi(\xi) \quad \star\star$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x + \xi) = f(g(x + \xi)) = f(g(x) + \eta)$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\star}{=} f(g(x)) + B\eta + \psi(\eta) \\
 & \stackrel{\star\star}{=} (f \circ g)(x) + BA\xi + \underbrace{B\varphi(\xi) + \psi(A\xi + \varphi(\xi))}_{\chi(\xi)}
 \end{aligned}$$

z.Z.:  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\chi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$

Beweis:  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{B\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$

und  $\exists K > 0$ , so dass

$$\|\varphi(\xi)\| \leq K \|\xi\| \quad \forall \xi \in \text{Umgebung von } 0$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\psi(\eta)}{\|\eta\|} = 0 \Leftrightarrow \psi(\eta) = \|\eta\| \cdot \psi_1(\eta) \star\star\star$$

mit  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \psi_1(\eta) = 0$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \|\psi(A\xi + \varphi(\xi))\| &= \|A\xi + \varphi(\xi)\| \cdot \|\psi_1(A\xi + \varphi(\xi))\| \\
 &\leq (\|A\xi\| + \|\varphi(\xi)\|) \cdot \|\psi_1(A\xi + \varphi(\xi))\| \\
 &\leq (\|A\| \cdot \|\xi\| + K \|\xi\|) \|\psi_1(A\xi + \varphi(\xi))\| \\
 &= \|\xi\| (\|A\| + K) \cdot \|\psi_1(A\xi + \varphi(\xi))\| \\
 \Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\chi(\xi)}{\|\xi\|} &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{B\varphi(\xi)}{\|\xi\|} + \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\psi(A\xi + \varphi(\xi))}{\|\xi\|} = \\
 &= 0 + (\|A\| + K) \underbrace{\lim_{\xi \rightarrow 0} \psi_1(A\xi + \varphi(\xi))}_{=0} \star\star\star
 \end{aligned}$$