

12. Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Birkenhake / Neumaier
Wintersemester 2003/04
Abgabe: Di, 27.01.04, in der Vorlesung

AUFGABE 52:

Berechne die folgenden Determinanten:

$$\det P_\sigma, \quad \begin{vmatrix} 44 & -26 & 27 \\ -96 & 84 & -47 \\ 109 & -84 & 60 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 64 & 192 & -128 & 63 \\ 202 & 607 & 377 & -203 \\ 151 & 454 & 467 & 395 \\ 193 & 579 & -387 & 244 \end{vmatrix}.$$

Dabei ist $\sigma \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation und $P_\sigma \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die durch σ definierte Permutationsmatrix.

AUFGABE 53:

- (i) Gegeben seien ein Körper $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sowie $b, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$. Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M((n+1) \times (n+1), \mathbb{K})$ gelte:

$$\begin{aligned} a_{ii} &:= b & i &= 1, \dots, n+1 \\ a_{i,n+1} = a_{n+1,i} &:= c_i & i &= 1, \dots, n \\ a_{ij} &:= 0 & & \text{sonst.} \end{aligned}$$

Zeige: $\det A = b^{n+1} - b^{n-1}(c_1^2 + \dots + c_n^2)$.

- (ii) Für $n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $B = (b_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gelte:

$$b_{ij} := \begin{cases} 5 & \text{für } i = j, \\ 2 & \text{für } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige: $\det B = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$.

AUFGABE 54:

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$; zeige:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

(„Vandermondesche Determinante“)

AUFGABE 55:

Zeige

(i) Der Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & a & 0 \\ 0 & c & 0 & a \end{pmatrix}$$

ist eine gerade Zahl.

(ii) A ist genau dann invertierbar, wenn $a^2 \neq bc$ ist.

(iii) Geben Sie in diesem Fall A^{-1} an.