

10. Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Birkenhake / Neumaier

Wintersemester 2003/04

Abgabe: Di, 13.01.04, in der Vorlesung

AUFGABE 40:

- (i) Warum ist $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z}$ für natürliche Zahlen $a > 1$ und $b > 1$ kein Körper?
- (ii) Überprüfe das Assoziativ - und Distributivgesetz in $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
- (iii) Die Ordnung eines Elements $[a] \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $a \neq 0$ ist die kleinste Zahl $d \in \mathbb{N}$ mit $[a]^d = [1]$. Bestimme die Ordnung in den folgenden Fällen:

$$\begin{array}{ll} a = 5, & q = 7, \\ a = 10, & q = 17, \\ a = 8, & q = 15, \\ a = 2, & q = 7. \end{array}$$

AUFGABE 41:

Bestimme für den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$ den Rang über $\mathbb{K}$ der Matrix

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{K}.$$

AUFGABE 42:

- (i) Für eine Primzahl $p > 1$ zeige:
 - (a) Jeder eindimensionale Untervektorraum von $\mathbb{F}_p^2$ hat genau p Elemente.
 - (b) Es gibt genau $p+1$ verschiedene eindimensionale Untervektorräume $U_0, U_1, \dots, U_p$ in $\mathbb{F}_p^2$, und es gilt:

$$U_i \cap U_j = \{0\} \text{ für } i, j \in \{0, \dots, p\} \quad \text{ sowie } \bigcup_{i=0}^p U_i = \mathbb{F}_p^2.$$

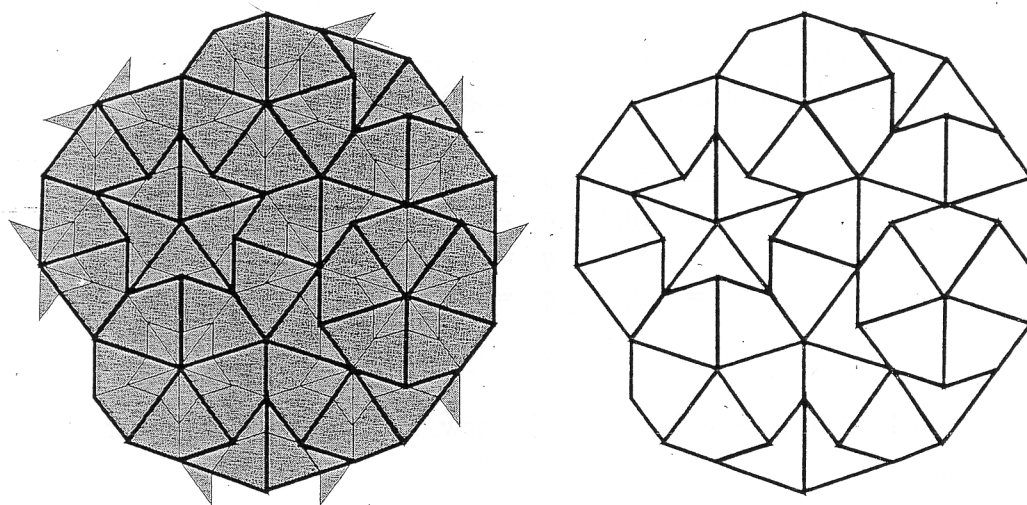
- (ii) Bestimme die Anzahl der eindimensionalen Untervektorräume in $\mathbb{F}_k^3$.

AUFGABE 43:

Sei A die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung f . Zeige: Der von den Spalten von A aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{K}^m$ ist isomorph zu $\text{im}(f)$.

AUFGABE 44*:

- (i) Wieviel Drachenköpfe (bzw. Pfeilköpfe) können an einer Ecke liegen? Wieviele Drachenschwänze (bzw. Pfeilschwänze) können an einer Ecke liegen?
- (ii) Bestimme alle Möglichkeiten von Ecken in einem Penrose Parkett.



AUFGABE 45*:

Zeige mit Hilfe des Bildes, dass nach dem Inflation-Verfahren wieder nur Drachen und Pfeile entstehen.

AUFGABE 46*:

Emma und ihr kleiner Bruder haben zwei gleichvolle Gläser vor sich stehen - eines mit Glühwein, das andere mit Wasser. Selbstverständlich steht Emma der Glühwein zu. Das ärgert den kleinen Bruder gar sehr, und als Emma kurz wegsieht, nimmt er sich eine volle Kelle ihres Glühweins und kippt sie in sein Wasser. Nun muß er gut umrühren, damit Emma nichts merkt. Ohjee, nun ist in seinem Glas mehr drin als in dem anderen. Schnell nimmt er eine volle Kelle aus seinem Mix und kippt sie zurück in das Glühweinglas. Ist nun mehr Glühwein im Wasserglas oder mehr Wasser im Glühweinglas?

AUFGABE 47*:

Ruprecht: „Alle Weihnachtspakete haben den gleichen Inhalt!”

Klaus: „Das glaube ich nicht!”

Ruprecht: „Das stimmt aber, ich kann es sogar mathematisch beweisen! Dazu benutze ich das Prinzip der vollständigen Induktion. Ich beweise also, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass jeweils n Weihnachtspakete den gleichen Inhalt haben:

Der Induktionsanfang ($n = 1$) ist trivial. Der Induktionsschritt ist einfach: Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben mit der Eigenschaft, dass jeweils n Weihnachtspakete den gleichen Inhalt haben. Nun betrachte ich $n + 1$ Weihnachtspakete. Ich möchte zeigen, dass dann auch diese $n + 1$ den gleichen Inhalt haben. Dazu stelle ich ein beliebiges Paket beiseite und betrachte nur noch die verbleibenden n . Sie haben nach Voraussetzung alle den gleichen Inhalt. Nun kann ich eines dieser n Pakete, das ja den gleichen Inhalt hat wie die $n - 1$ anderen, weglegen und dafür das anfangs beiseite gelegte Weihnachtspaket wieder zu den $n - 1$ Paketen legen. Nach Induktionsvoraussetzung haben diese n Pakete den gleichen Inhalt. Damit haben alle $n + 1$ Pakete den gleichen Inhalt.”

Stimmen die Ausführungen von Ruprecht, falls nicht, wo liegt der Fehler?

Mehr mathematisch-besinnlich weihnachtliches findet ihr unter:

<http://www.Fzt86.DE/Adventskalender>

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr wünschen
Christina Birkenhake und Alexander Neumaier.