

8. Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Birkenhake / Neumaier

Wintersemester 2003/04

Abgabe: Di, 16.12.03, in der Vorlesung

AUFGABE 33:

- (i) Zeige, dass die Menge $M(m \times n, \mathbb{R})$ der reellen $m \times n$ -Matrizen zusammen mit der durch

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij})$$

bzw.

$$c \cdot A = c(a_{ij}) = (ca_{ij})$$

definierten Addition bzw. Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum ist.

- (ii) Betrachte nun den Vektorraum $V := M(3 \times 3, \mathbb{R})$ und die Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$f \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right) := a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

- (a) Zeige, dass die Abbildung f linear ist.

- (b) Gib eine Basis von $\ker(f)$ an.

AUFGABE 34:

Es sei $\{(v_1, v_2)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$ -Vektorraums $\mathbb{R}^2$; für $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ existiert dann genau ein Endomorphismus ϕ des $\mathbb{R}^2$ mit $\phi(v_i) = w_i$ ($i = 1, 2$). Bestimme für die Fälle:

(a) $v_1 := (1, 0), \quad v_2 := (0, 1), \quad w_1 := (1, 1), \quad w_2 := (100, 6)$

(b) $v_1 := (-2, 3), \quad v_2 := (1, 5), \quad w_1 := (-6, 9), \quad w_2 := (2, -3)$

(c) $v_1 := (3, -7), \quad v_2 := (-2, 5), \quad w_1 := (-1, 3), \quad w_2 := (-1, 3)$

die Matrix von ϕ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. In welchem Fall ist ϕ injektiv, surjektiv, bzw. bijektiv?

AUFGABE 35:

Gegeben seien vier endlich-dimensionale reelle Vektorräume $V_1, \dots, V_4$ sowie die linearen Abbildungen

$$\phi_i : V_i \rightarrow V_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{und} \quad \phi_4 : V_4 \rightarrow V_1,$$

für die gilt:

$$\operatorname{im}(\phi_i) = \ker(\phi_{i+1}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{und} \quad \operatorname{im}(\phi_4) = \ker(\phi_1).$$

Zeige:

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^i \dim V_i = 0.$$

AUFGABE 36:

- (i) Sei U ein Untervektorraum eines $\mathbb{R}$ -Vektorraums V . Überprüfe die Vektorraumaxiome für den Faktorraum $(V/U, +, \cdot)$.
- (ii) V sei der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$. Ferner sei $p(x) := x^2 - 3x + 2 \in V$ und $U := \operatorname{span}(p)$ der von p aufgespannte Unterraum. Bestimme eine Basis des Faktorraums V/U und stelle $2x^2 - 5x + 7 + U$ in dieser Basis dar.
- (iii) Sei W ein reeller Vektorraum und U ein Untervektorraum von W . Zeige: Sind $w_1 + U, \dots, w_n + U$ linear unabhängig im Faktorraum W/U , dann sind $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig in W . Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes?