

7. Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Birkenhake / Neumaier
Wintersemester 2003/04
Abgabe: Di, 09.12.03, in der Vorlesung

AUFGABE 28:

(i) Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto n^3.\end{aligned}$$

Zeige oder widerlege:

- (a) Es gibt eine injektive Abbildung $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass $\psi \circ \phi$ bijektiv ist.
- (b) Es gibt eine surjektive Abbildung $\psi': \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass $\psi' \circ \phi$ bijektiv ist.
- (ii) Für ein fest gewähltes $k \in \mathbb{Z}$ seien folgende Abbildungen definiert:

$$\phi: \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ n \rightarrow (3n + k, 4n). \end{cases} \quad \psi: \begin{cases} \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \\ (m, n) \rightarrow 2n - 3m + 6k. \end{cases}$$

Untersuche ϕ , ψ , $\psi \circ \phi$, $\phi \circ \psi$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

AUFGABE 29:

Es seien $\phi: X \rightarrow Y$ und $\psi: X \rightarrow Y$ Abbildungen.

(i) Zeige:

- (a) ϕ und ψ injektiv $\Rightarrow \psi \circ \phi$ injektiv,
- (b) ϕ und ψ surjektiv $\Rightarrow \psi \circ \phi$ surjektiv.

(ii) Zeige die Äquivalenz der Aussagen:

- (a) ϕ injektiv.
- (b) $\forall A \subseteq X \quad \forall B \subseteq X: \quad A \subseteq B \iff \phi(A) \subseteq \phi(B).$

(iii) Zeige: Sind X und Y endliche Mengen mit $|X| = |Y|$ (hier bezeichnet $|X|$ die Anzahl der Elemente von X), so gilt:

$$\phi \text{ injektiv} \iff \phi \text{ surjektiv.}$$

AUFGABE 30:

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die folgendermaßen definierte Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$:

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5x - 18y - 24z \\ 4x + 13y + 16z \\ -2x - 6y - 7z \end{pmatrix}.$$

Desweiteren seien folgende Basen des $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (i) Bestimme die Darstellungsmatrizen von f bzgl. B und von f bzgl. B' .
- (ii) Gib die Darstellungsmatrizen von $id : (\mathbb{R}^3, B) \rightarrow (\mathbb{R}^3, B')$ und von $id : (\mathbb{R}^3, B') \rightarrow (\mathbb{R}^3, B)$ an.
- (iii) Bestimme $\ker(f)$ und eine Basis von $\operatorname{im}(f)$.

AUFGABE 31:

Es seien $V, \tilde{V}$ reelle Vektorräume und $\phi : V \rightarrow \tilde{V}$ linear. Zeige:

- (i) Die Abbildung ϕ ist injektiv genau dann, wenn für jeden reellen Vektorraum W und für jede lineare Abbildung $\psi : W \rightarrow V$ mit $\phi \circ \psi = 0$ gilt $\psi = 0$.
- (ii) Die Abbildung ϕ ist surjektiv genau dann, wenn für jeden reellen Vektorraum $\tilde{W}$ und für jede lineare Abbildung $\tilde{\psi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{W}$ mit $\tilde{\psi} \circ \phi = 0$ gilt $\tilde{\psi} = 0$.