

6. Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Birkenhake / Neumaier

Wintersemester 2003/04

Abgabe: Di, 02.12.03, in der Vorlesung

AUFGABE 24:

(i) Es sei $U \subset \mathbb{R}^5$ der von den Vektoren $(1, 2, 0, 2, 1)$ und $(1, 1, 1, 1, 1)$ aufgespannte lineare Unterraum. Bestimme eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

(ii) Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungs-Verfahren auf folgende Vektoren an:

$$v_1 := (1, 0, 1, 1), v_2 := (1, 1, 0, 1), v_3 := (1, 1, 1, 0).$$

AUFGABE 25:

Sei U ein d -dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Zeige

1. U besitzt eine Orthonormalbasis $u_1, \dots, u_d$.

2. Die Orthogonalprojektion $p: \mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp \rightarrow U$ hat die Gestalt

$$p(v) = \sum_{i=1}^d \langle v, u_i \rangle u_i.$$

3. Es gilt

$$|p(v)|^2 = \sum_{i=1}^d |\langle v, u_i \rangle|^2 \leq |v|^2$$

mit Gleichheit genau für $v \in U$.

4. Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ und $p(v_j) = \sum_{i=1}^d \lambda_{ji} u_i$ für $j = 1, \dots, n$, so sind die Vektoren ${}^t(\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ni})$ für $i = 1, \dots, d$ orthonormal in $\mathbb{R}^n$.

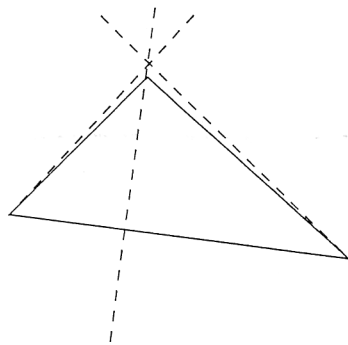
AUFGABE 26:

(i) Finde zu $U_1 := \text{span}((0, 1)) \subset \mathbb{R}^2$ einen komplementären Untervektorraum W_1 in $\mathbb{R}^2$, sowie zu $U_2 := \text{span}((1, 1, 1), (2, 3, 4)) \subset \mathbb{R}^3$ einen komplementären Untervektorraum W_2 in $\mathbb{R}^3$.

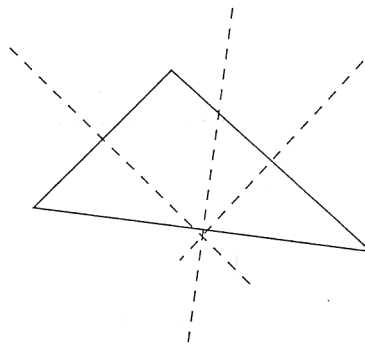
(ii) Zeige, dass man im $\mathbb{R}^3$ mindestens $k = 3$ zweidimensionale Untervektorräume braucht, wenn jeder eindimensionale Untervektorraum zu mindestens einem dieser k zweidimensionalen linearen Unterräume komplementär sein soll.

AUFGABE 27:

- (i) Beweise, dass sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.
- (ii) Beweise, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.
- (iii) Beweise: Für ein ebenes Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der 4 Seitenlängen gleich der Summe der Quadrate der Längen der zwei Diagonalen.



Höhen im Dreieck



Mittelsenkrechten